

## Lecture 1 Conic Sections

### Chapter 1 Surfaces and Coordinate Systems

ในหัวข้อนี้ เราจะทบทวนเรื่องภาคตัดกรวยซึ่งมีความสำคัญมากในการศึกษาวิชาแคลคูลัสสำหรับวิศวกรรมศาสตร์ 3 นี้

#### บทนิยาม 1. วงกลม (circle)

- วงกลม (circle) คือเซตของจุดใด ๆ บนระนาบที่มีระยะห่างจากจุดที่ตรึงไว้ (fixed point) เป็นค่าคงตัว
- เราเรียกจุดที่ตรึงไว้ว่า **จุดศูนย์กลาง** (center) ของวงกลม
- เราเรียกระยะห่างที่เป็นค่าคงตัวนี้ว่า **รัศมี** (radius) ของวงกลม

สมการมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง  $(h, k)$  และรัศมี  $r$  หน่วย คือ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

#### ตัวอย่าง 1. จงหาสมการมาตรฐานของวงกลมที่มีสมบัติต่อไปนี้

1. จุดศูนย์กลางที่  $(1, 1)$  และรัศมี 3 หน่วย
2. จุดศูนย์กลางที่  $(3, -2)$  และสัมผัสกับเส้นตรง  $x = 1$

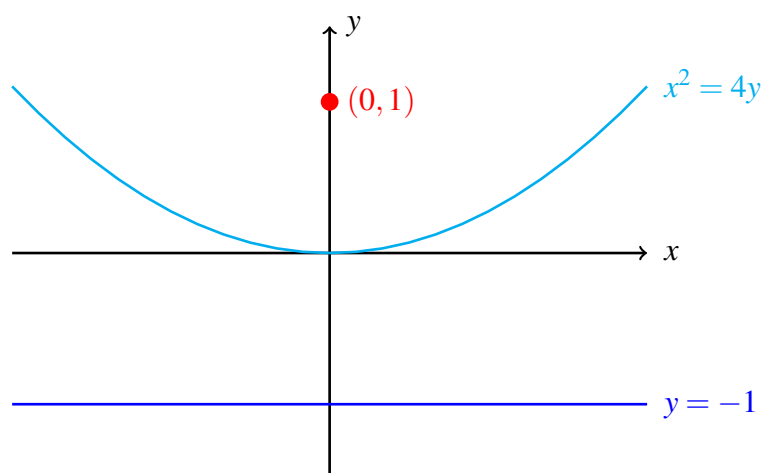
**ตัวอย่าง 2.** จงหาจุดศูนย์กลาง รัศมี และร่างกราฟของวงกลมต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1.  $2x^2 + 2y^2 + 16x + 8y + 22 = 0$

2.  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$

## บทนิยาม 2. พาราโบลา (parabola)

- พาราโบลา (parabola) คือเซตของจุดใด ๆ บนระนาบที่มีระยะห่างจากจุดที่ตรึงไว้ (fixed point) และเส้นที่ตรึงไว้ (fixed line) เป็นค่าคงตัว
- เราเรียกจุดที่ตรึงไว้ว่า **โฟกัส** (focus) ของพาราโบลา
- เราเรียกเส้นที่ตรึงไว้ว่า **เส้นกำกับ** (directrix) ของพาราโบลา



| สมการมาตรฐาน       | $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ | $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ |
|--------------------|-------------------------|-------------------------|
| จุดยอด             | $(h, k)$                | $(h, k)$                |
| โฟกัส              | $(h + p, k)$            | $(h, k + p)$            |
| เส้นบังคับ         | $x = h - p$             | $y = k - p$             |
| ความยาวเลตัสเรกตัม | $4 p $                  | $4 p $                  |
| แกนพาราโบลา        | ขนานแกน $x$             | ขนานแกน $y$             |

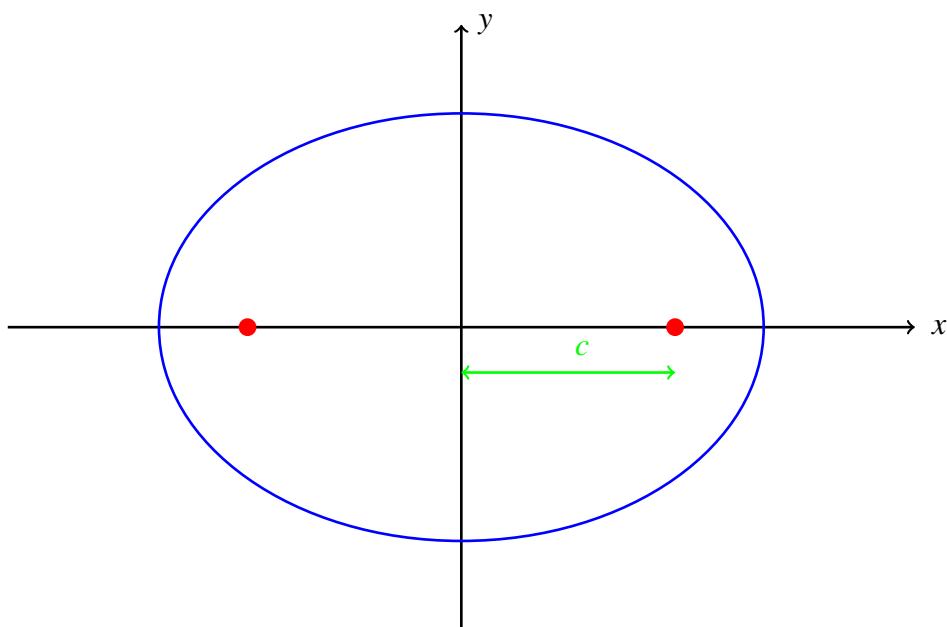
**ตัวอย่าง 3.** จงหาพิกัดของจุดยอด โฟกัส สมการเส้นบังคับ ความยาวเลตัสเรกตัม และร่างกราฟของพาราโบลาต่อไปนี้

1.  $x^2 = 10y$

2.  $y^2 - 8x - 6y - 23$

### บทนิยาม 3. วงรี (ellipse)

- วงรี (ellipse) คือเซตของจุดใด ๆ บนระนาบที่มีผลรวมของระยะห่างจากจุดที่ตรึงไว้ (fixed point) สองจุดเป็นค่าคงตัว
- เราเรียกจุดที่ตรึงไว้ทั้งสองจุดนี้ว่า **โฟกัส** (focus) ของวงรี



สมมติให้  $a \geq b > 0$

| สมการมาตรฐาน                | $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ | $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ |
|-----------------------------|---|---|
| แกนเอก                      | $x = h$   | $y = k$   |
| แกนโท                       | $y = k$   | $x = h$   |
| ความยาวแกนเอก               | $2a$  | $2a$  |
| ความยาวแกนโท                | $2b$  | $2b$  |
| จุดศูนย์กลาง                | $(h, k)$  | $(h, k)$  |
| ความยาวจุดศูนย์กลางสู่โฟกัส | $c = \sqrt{a^2 - b^2}$                          | $c = \sqrt{a^2 - b^2}$                          |
| โฟกัส                       | $(h \pm c, k)$                                  | $(h, k \pm c)$                                  |

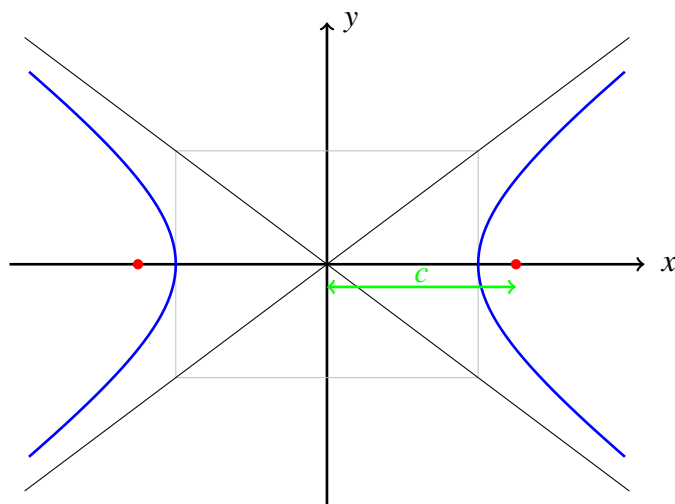
**ตัวอย่าง 4.** จงหาแกนเอก แกนโท ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท จุดศูนย์กลาง จุดยอด ความยาวจุดศูนย์กลางสู่อโฟกัส โฟกัส และร่างกราฟของวงรีต่อไปนี้

1.  $x^2 + 2y^2 = 4$

2.  $5x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$

#### บทนิยาม 4. ไฮเพอร์โบลา (hyperbola)

- ไฮเพอร์โบลา (hyperbola) คือเซตของจุดใด ๆ บนระนาบที่มีผลต่างของระยะห่างจากจุดที่ตรึงไว้ (fixed point) สองจุดเป็นค่าคงตัว
- เราเรียกจุดที่ตรึงไว้ทั้งสองจุดนี้ว่า **โฟกัส** (focus) ของไฮเพอร์โบลา
- เราเรียกเส้นที่ผ่านโฟกัสทั้งสองของไฮเพอร์โบลาว่า **แกนโฟกัส** (focal axis) หรือ **แกนตามขวาง** (transverse axis) ของไฮเพอร์โบลา
- เราเรียกจุดบนแกนโฟกัสที่อยู่กึ่งกลางระหว่างโฟกัสว่า **จุดศูนย์กลาง** (center)
- เราเรียกจุดตัดระหว่างโฟกัสและแกนโฟกัสว่า **จุดยอด** (vertex)



สมมติให้  $a \geq b > 0$

| สมการมาตรฐาน                | $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ | $\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$ |
|-----------------------------|---|---|
| จุดศูนย์กลาง                | $(h, k)$  | $(h, k)$  |
| จุดยอด                      | $(h \pm a, k)$                                  | $(h, k \pm b)$                                  |
| ความยาวจุดศูนย์กลางสู่โฟกัส | $c = \sqrt{a^2 + b^2}$                          | $c = \sqrt{a^2 + b^2}$                          |
| โฟกัส                       | $(h \pm c, k)$                                  | $(h, k \pm c)$                                  |
| แกนโฟกัส                    | $y = k$   | $x = h$   |

**หมายเหตุ 1.** เราสามารถหาสมการของเส้นกำกับได้โดยการแทน 1 ทางฝั่งขวามือของสมการมาตรฐานด้วย 0 จากนั้นจัดรูปสมการใหม่เป็น  $y = \pm rx + s$

**ตัวอย่าง 5.** จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด ความยาวจุดศูนย์กลางสู่โฟกัส โฟกัส แกนโฟกัส สมการเส้นกำกับ และร่างกราฟของวงรีต่อไปนี้

1.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

2.  $x^2 - 4y^2 - 2x + 8y - 7 = 0$