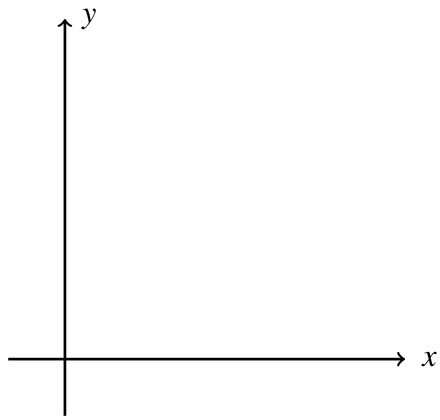
Calculus for Engineering III SC402202

Lecture 2 Parametric Equations

Chapter 1 Surfaces and Coordinate Systems

[1] พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคตามเส้นโค้ง C ดังรูปต่อไปนี้



สังเกตว่าเราไม่สามารถอธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคนี้ในรูปฟังก์ชันบนระบบพิกัดฉาก xy ได้ (Why?) อย่างไรก็ตาม เราสามารถระบุตำแหน่งของอนุภาคบนระบบพิกัดฉาก xy ในรูปฟังก์ชันของเวลา t (function of time) โดยอธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคนี้ด้วยฟังก์ชัน $x = f(t)$ และ $y = g(t)$ แทน

บทนิยาม 1. ให้ I เป็นช่วงของจำนวนจริงใด ๆ และ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I กำหนดให้

$$x = f(t), \qquad y = g(t) \qquad \text{สำหรับทุก } t \in I \tag{1}$$

เราจะเรียก

- สมการ (1) ว่า **สมการอิงตัวแปรเสริม** (parametric equations)
- เซตของจุด $(x, y) = (f(t), g(t))$ ที่กำหนดโดย (1) ว่า **เส้นโค้งอิงตัวแปรเสริม** (parametric curve) หรือ **กราฟ** (graph) ของสมการอิงตัวแปรเสริม
- ตัวแปร $t \in I$ ว่า **ตัวแปรเสริม** (parameter) ของสมการอิงตัวแปรเสริม
- ช่วง $I \subset \mathbb{R}$ ว่า **ช่วงอิงตัวแปรเสริม** (parametric interval)

[1]**ABD12** : Section 10.1 : 2, 3-12, 13-18, 20, 23, 24(a), 25, 26, 27, 28, 33, 34, 37, 38, 39, 40
TWH14 : Section 11.1 : 1-18, 19-20, 21-24, 26, 27, 28

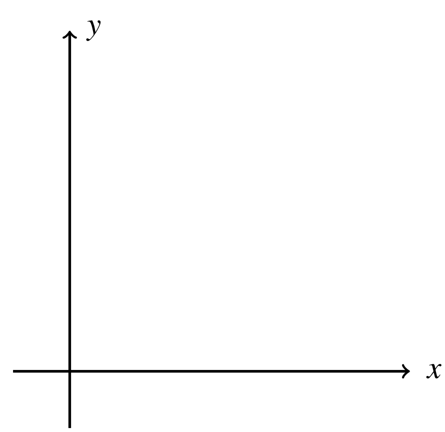
หมายเหตุ 1. ในกรณีที่ช่วง I เป็นช่วงปิด กล่าวคือ $I = [a,b] := \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$ เราจะเรียก จุด $(f(a), g(a))$ และ จุด $(f(b), g(b))$ ว่า **จุดเริ่มต้น** (initial point) และ**จุดปลาย** (terminal point) ตามลำดับ และในกรณีที่ไม่ระบุช่วง I ให้เป็นข้อตกลงว่า $I = \mathbb{R}$

หมายเหตุ 2. ในกรณีที่เส้นโค้ง C เป็นการเคลื่อนที่ของอนุภาคบนระนาบ xy ที่เขียนในรูปสมการอิงตัวแปรเสริมดังสมการ (1) เราจะเรียกเส้นโค้ง C ว่า **แนววิถี** (trajectory) ของอนุภาค

ตัวอย่าง 1. พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่กำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = t - 1, \qquad y = t + 1 \qquad \text{สำหรับทุก } t \in [0,5]$$

1. จงพิจารณาพิกัดของอนุภาคเมื่อ $t = 0, 1, 2, 3, 4$ และ 5
2. จงวาดแนววิถีการเคลื่อนที่ของอนุภาค
3. จงระบุทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค



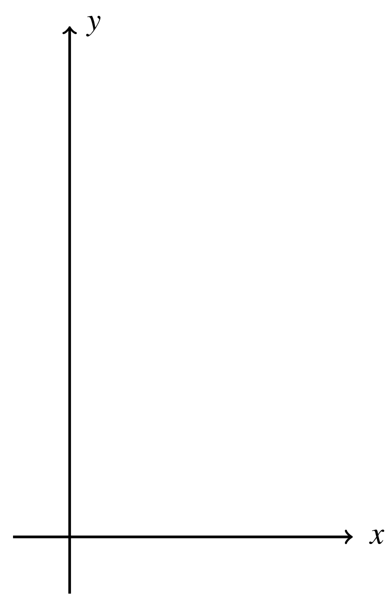
สังเกตว่ากราฟของสมการอิงตัวแปรเสริมหรือแนววิถีการเคลื่อนที่ของอนุภาคจะไม่ปรากฏตัวแปรเสริม t บนกราฟหรือบนแนววิถี นอกจากนี้ ทิศทางของสมการอิงตัวแปรเสริมจะมีการเปลี่ยนแปลงตามตัวแปรเสริม t ที่มีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งเราเรียกการเพิ่มขึ้นของ t นี้ว่า **ทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริม** (direction of increasing parameter) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า **มีการกำหนดทิศทาง** (orientation) ให้กับกราฟโดยสมการอิงตัวแปรเสริม

หมายเหตุ 3. เส้นโค้งอิงตัวแปรเสริมหรือกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริมมีความแตกต่างจากเส้นโค้งหรือกราฟที่เรารู้จักโดยทั่วไป กล่าวคือ เส้นโค้งอิงตัวแปรเสริมเป็นเส้นโค้งที่มีการกำหนดทิศทางด้วย

ตัวอย่าง 2. จงเขียนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = \sqrt{t}, \qquad y = t \qquad \text{สำหรับทุก } t \geq 0$$

พร้อมทั้งระบุทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริม



ตัวอย่าง 3. 1. จงเขียนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

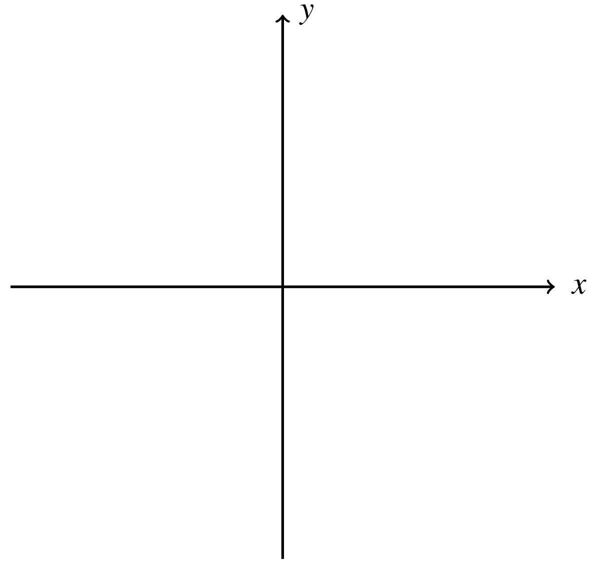
$$x = \cos t, \qquad y = \sin t \qquad \text{สำหรับทุก } t \in [0, 2\pi]$$

พร้อมทั้งระบุทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริม

ฝาก! 2. กำหนดให้ h, k เป็นค่าคงตัว และ $r > 0$ จงเขียนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = h + r\cos t, \qquad y = k + r\sin t \qquad \text{สำหรับทุก } t \in [0, 2\pi]$$

พร้อมทั้งระบุทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริม



ตัวอย่าง 4. 1. จงเขียนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

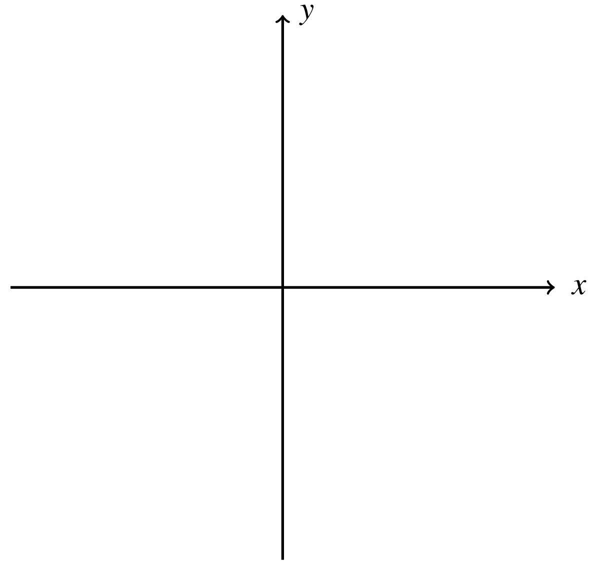
$$x = \sec t, \qquad y = \tan t \qquad \text{สำหรับทุก } t \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

พร้อมทั้งระบุทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริม

ฝาก! 2. กำหนดให้ h, k เป็นค่าคงตัว และ $a, b > 0$ จงเขียนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = h + a\sec t, \qquad y = k + b\tan t \qquad \text{สำหรับทุก } t \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

พร้อมทั้งระบุทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริม



ในบางครั้ง เราสามารถเขียนฟังก์ชัน $y = h(x)$ ที่นิยามได้บนช่วง I ให้อยู่ในรูปของสมการอิงตัวแปรเสริมได้โดยการกำหนดตัวแปรเสริม $t = x$ ซึ่งจะทำให้ได้ว่า $y = h(t)$ สำหรับทุก $t \in I$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง 5. จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. $y = x^2 + 2x + 3$
2. $y = \cos x$ สำหรับทุก $x \in [-2\pi, 2\pi]$

ตัวอย่าง 6. จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของส่วนของเส้นตรงที่มีจุดเริ่มต้น $P(x_0, y_0)$ และจุดปลาย $Q(x_1, y_1)$

ตัวอย่าง 7. จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของรังสีที่มีจุดเริ่มต้น $(2,3)$ และผ่านจุด $(-1,-1)$