

Lecture 3 Surfaces

Chapter 1 Surfaces and Coordinate Systems

พิจารณาความสัมพันธ์ $f(x,y,z) = 0$ ในระบบพิกัดฉาก xyz เราจะเรียก กราฟ (graph) ของความสัมพันธ์นี้ว่า ผิว (surface)

บทนิยาม 1. ให้ S เป็นผิวของความสัมพันธ์ $f(x,y,z) = 0$ ในระบบพิกัดฉาก xyz เราจะกล่าวว่า

- $x = a$ เป็น ค่าตัดแกน x (x -intercept) ถ้า $f(a,0,0) = 0$
- $y = b$ เป็น ค่าตัดแกน y (y -intercept) ถ้า $f(0,b,0) = 0$
- $z = c$ เป็น ค่าตัดแกน z (z -intercept) ถ้า $f(0,0,c) = 0$

เราจะเรียกจุด $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ และ $(0,0,c)$ ข้างต้นว่า จุดตัดแกน x, y และ z ตามลำดับ

ตัวอย่าง 1. จงหาค่าตัดแกน x ค่าตัดแกน y ค่าตัดแกน z และจุดตัดแกน x, y และ z ของผิว S ที่กำหนดโดยความสัมพันธ์ต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1. $x + 2y + 3z - 12 = 0$
2. $4x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$
3. $x^2 + y^2 - z - 1 = 0$

บทนิยาม 2. ให้ S เป็นผิวของความสัมพันธ์ $f(x,y,z) = 0$ ในระบบพิกัดฉาก xyz เราจะเรียก

- เส้นโค้งที่เกิดจากการตัดตัดกันของผิว S กับระนาบในระบบพิกัดฉาก xyz ว่า **รอยตัด** (trace) ของ S บนระนาบดังกล่าว
- รอยตัดที่เกิดจากผิว S กับระนาบพิกัด xy ว่า **รอบตัดบนระนาบ xy** (xy -trace)
- รอยตัดที่เกิดจากผิว S กับระนาบพิกัด yz ว่า **รอบตัดบนระนาบ yz** (yz -trace)
- รอยตัดที่เกิดจากผิว S กับระนาบพิกัด xz ว่า **รอบตัดบนระนาบ xz** (xz -trace)

ตัวอย่าง 2. ให้ S เป็นผิวที่กำหนดโดยความสัมพันธ์ $x^2 + 2y^2 - 4y + 3z - 7 = 0$ จงหารอยตัดของ S บนระนาบ xy รอยตัดของ S บนระนาบ $x = 2$ และรอยตัดของ S บนระนาบ $z = 3$

ตัวอย่าง 3. ให้ S เป็นผิวที่กำหนดโดยความสัมพันธ์ $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 8z - 7 = 0$ จงหารอยตัดของ S บนระนาบ xy รอยตัดของ S บนระนาบ $x = -2$ และรอยตัดของ S บนระนาบ $y = 3$

บทนิยาม 3. ให้ S เป็นผิวของความสัมพันธ์ $f(x,y,z) = 0$ ในระบบพิกัดฉาก xyz เราจะกล่าวว่า

- S สมมาตรโดยจุดกำเนิด (symmetry with respect to the origin) ถ้า $f(x,y,z) = f(-x,-y,-z)$ สำหรับทุก (x,y,z) ในโดเมนของ f
- S สมมาตรโดยแกน x (symmetry with respect to x -axis) ถ้า $f(x,y,z) = f(x,-y,-z)$ สำหรับทุก (x,y,z) ในโดเมนของ f
- S สมมาตรโดยแกน y (symmetry with respect to y -axis) ถ้า $f(x,y,z) = f(-x,y,-z)$ สำหรับทุก (x,y,z) ในโดเมนของ f
- S สมมาตรโดยแกน z (symmetry with respect to z -axis) ถ้า $f(x,y,z) = f(-x,-y,z)$ สำหรับทุก (x,y,z) ในโดเมนของ f
- S สมมาตรโดยระนาบ xy (symmetry with respect to xy -plane) ถ้า $f(x,y,z) = f(x,y,-z)$ สำหรับทุก (x,y,z) ในโดเมนของ f
- S สมมาตรโดยระนาบ yz (symmetry with respect to yz -plane) ถ้า $f(x,y,z) = f(-x,y,z)$ สำหรับทุก (x,y,z) ในโดเมนของ f
- S สมมาตรโดยระนาบ xz (symmetry with respect to xz -plane) ถ้า $f(x,y,z) = f(x,-y,z)$ สำหรับทุก (x,y,z) ในโดเมนของ f

ตัวอย่าง 4. ให้ S เป็นผิวที่กำหนดโดยความสัมพันธ์ $x^2 - y^2 + z^2 + 2x - 5 = 0$ จงตรวจสอบว่า S สมมาตรโดยจุดกำเนิด สมมาตรโดยแกน x และสมมาตรโดยระนาบ xz หรือไม่