

Lecture 5 Quadric Surfaces

Chapter 1 Surfaces and Coordinate Systems

¹ ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาสมการของผิวที่สำคัญนอกเหนือจากทรงกลม และทรงกระบอก ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

บทนิยาม 1. ผิวกำลังสอง (quadric surface) คือ กราฟของสมการดีกรีสองในปริภูมิ xyz โดยทั่วไปแล้ว สมการดีกรีสองจะอยู่ในรูป

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

โดยที่ A, B, \dots, J เป็นค่าคงตัว

ในการวิเคราะห์ลักษณะของผิวกำลังสองนั้นเราจำเป็นต้องจัดรูปสมการใหม่ในรูปแบบของสมการที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้

กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก และ h, k, l เป็นจำนวนจริง

(i) **ทรงรี** (ellipsoid) คือ ผิวของสมการที่อยู่ในรูป

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

(ii) **ทรงไฮเพอร์โบลาชั้นเดียว** (hyperboloid of one sheet) คือ ผิวของสมการที่อยู่ในรูป

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

หรือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

หรือ

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

¹ABD12 : Section 11.7 : 1-2, 3, 4, 5, 6, 7-8, 9-10, 11-14, 15-26, 27-32, 37-40, 41-42, 43-46, 47-48, 54, 56, 57

(iii) ทรงไฮเพอร์โบลาสองชั้น (hyperboloid of two sheets) คือ ผิวของสมการที่อยู่ในรูป

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

หรือ

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

หรือ

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

(iv) กรวยเชิงวงรี (elliptic cone) คือ ผิวของสมการที่อยู่ในรูป

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 0$$

หรือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 0$$

หรือ

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 0$$

(v) ทรงพาราโบลาเชิงวงรี (elliptic paraboloid) คือ ผิวของสมการที่อยู่ในรูป

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)}{c} = 0$$

หรือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)}{b} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 0$$

หรือ

$$-\frac{(x-h)}{a} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 0$$

(vi) ทรงพาราโบลาเชิงไฮเพอร์โบลา (hyperbolic paraboloid) คือ ผิวของสมการที่อยู่ในรูป

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)}{c} = 0$$

หรือ

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)}{c} = 0$$

หรือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)}{b} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 0$$

หรือ

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)}{b} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 0$$

หรือ

$$-\frac{(x-h)}{a} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 0$$

หรือ

$$-\frac{(x-h)}{a} - \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 0$$

ตัวอย่างของผิวของสมการข้างต้นเป็นดังรูปต่อไปนี้

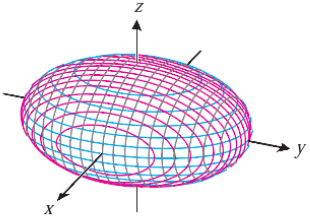
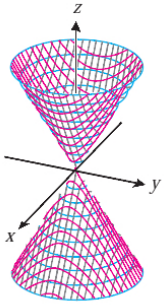
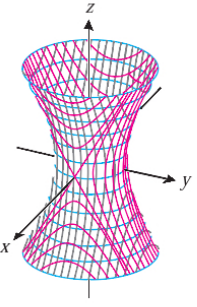
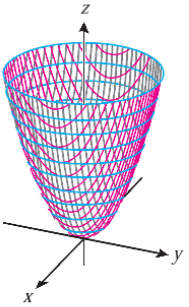
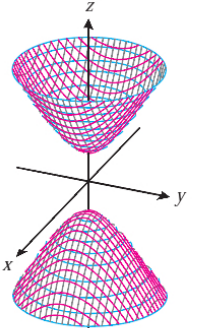
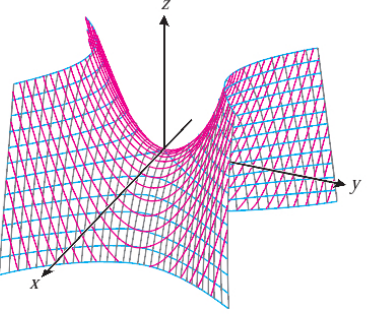
SURFACE	EQUATION	SURFACE	EQUATION
<p>ELLIPSOID</p> 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>The traces in the coordinate planes are ellipses, as are the traces in those planes that are parallel to the coordinate planes and intersect the surface in more than one point.</p>	<p>ELLIPTIC CONE</p> 	$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ <p>The trace in the xy-plane is a point (the origin), and the traces in planes parallel to the xy-plane are ellipses. The traces in the yz- and xz-planes are pairs of lines intersecting at the origin. The traces in planes parallel to these are hyperbolas.</p>
<p>HYPERBOLOID OF ONE SHEET</p> 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>The trace in the xy-plane is an ellipse, as are the traces in planes parallel to the xy-plane. The traces in the yz-plane and xz-plane are hyperbolas, as are the traces in those planes that are parallel to these and do not pass through the x- or y-intercepts. At these intercepts the traces are pairs of intersecting lines.</p>	<p>ELLIPTIC PARABOLOID</p> 	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ <p>The trace in the xy-plane is a point (the origin), and the traces in planes parallel to and above the xy-plane are ellipses. The traces in the yz- and xz-planes are parabolas, as are the traces in planes parallel to these.</p>
<p>HYPERBOLOID OF TWO SHEETS</p> 	$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ <p>There is no trace in the xy-plane. In planes parallel to the xy-plane that intersect the surface in more than one point the traces are ellipses. In the yz- and xz-planes, the traces are hyperbolas, as are the traces in those planes that are parallel to these.</p>	<p>HYPERBOLIC PARABOLOID</p> 	$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$ <p>The trace in the xy-plane is a pair of lines intersecting at the origin. The traces in planes parallel to the xy-plane are hyperbolas. The hyperbolas above the xy-plane open in the y-direction, and those below in the x-direction. The traces in the yz- and xz-planes are parabolas, as are the traces in planes parallel to these.</p>

Figure 1: ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 823)

ตัวอย่าง 1. จงหาค่าตัดแกน รอยตัดบนระนาบพิกัด พิจารณาสมมาตรที่จุดกำเนิดและสมมาตรโดยระนาบพิกัด พร้อมทั้งร่างผิวของสมการดีกรีสอง

$$36x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 144 = 0$$

ตัวอย่าง 2. จงร่างผิวของสมการดีกรีสอง

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 + 8y - 4z + 4 = 0$$

ตัวอย่าง 3. จงหาค่าตัดแกน รอยตัดบนระนาบพิกัด พิจารณาสมมาตรที่จุดกำเนิดและสมมาตรโดยระนาบพิกัด พร้อมทั้งร่างผิวของสมการดีกรีสอง

$$4x^2 - y^2 + 4z^2 - 1 = 0$$

ตัวอย่าง 4. จงร่างผิวของสมการดีกรีสอง

$$-x^2 + 0.25y^2 + z^2 = 1$$

ตัวอย่าง 5. จงหาค่าตัดแกน รอยตัดบนระนาบพิกัด พิจารณาสมมาตรที่จุดกำเนิดและสมมาตรโดยระนาบพิกัด พร้อมทั้งร่างผิวของสมการดีกรีสอง

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z = 0$$

ตัวอย่าง 6. จงร่างผิวของสมการดีกรีสอง

$$x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$$