Calculus for Engineering III SC402202

Lecture 7 Cylindrical and Spherical Coordinate Systems

Chapter 1 Surfaces and Coordinate Systems

[1] ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาระบบพิกัดในปริภูมิสามมิติอีกสองระบบได้แก่ ระบบพิกัดทรงกระบอก และระบบพิกัดทรงกลม ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

บทนิยาม 1. ให้ P เป็นจุดในระบบพิกัดทรงกระบอก (cylindrical coordinate system) แล้ว P มีพิกัดในรูป (r,θ,z) โดยที่

i) $r \geq 0$ และ $\theta \in [0,2\pi)$ เป็นตำแหน่งในระบบพิกัดเชิงขั้วของภาพฉาย (projection) ของจุด P บนระนาบ xy

ii) $z \in \mathbb{R}$ เป็นตำแหน่งของ z ในระบบพิกัดฉากของจุด P ตามแนวแกน z

ซึ่งสามารถอธิบายได้ดัง Figure 1

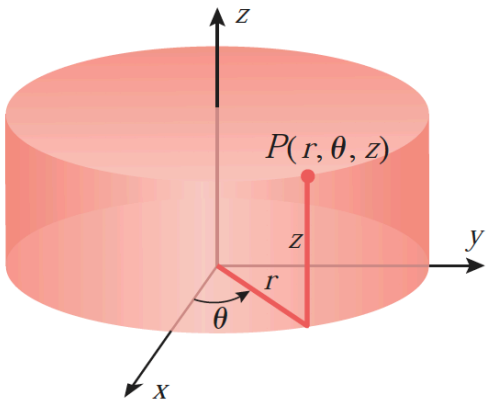

Figure 1: จุด P ในระบบพิกัดทรงกระบอก. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 832)

[1] **ABD12** : Section 11.8 : 1-2,3-4,5-6,7-8,15-18,19-26,27-34,35-46,47-50,51,52,53

โดยปกติ เราทราบว่าพื้นผิวของสมการ

$$x = x_0 \qquad y = y_0 \qquad \text{และ} \qquad z = z_0$$

โดยที่ x_0, y_0 และ z_0 เป็นค่าคงตัว เป็นระนาบที่ขนานกับระนาบ yz, xz และ xy ตามลำดับ ดัง Figure 2

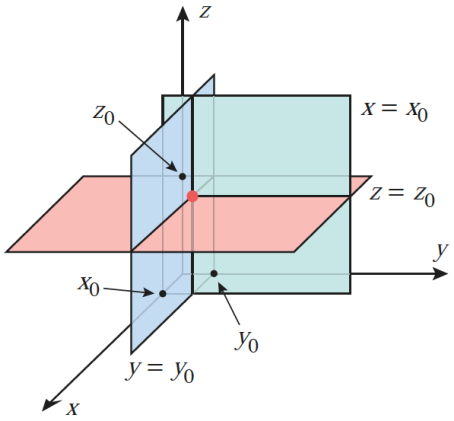

Figure 2: พื้นผิวของสมการ $x = x_0, y = y_0, z = z_0$. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 832)

อย่างไรก็ตาม ในระบบพิกัดทรงกระบอก พื้นผิวของสมการ

$$r = r_0 \qquad \theta = \theta_0 \qquad \text{และ} \qquad z = z_0$$

โดยที่ $r_0 \geq 0, \theta \in [0, 2\pi)$ และ $z_0 \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัว เป็นดัง Figure 3

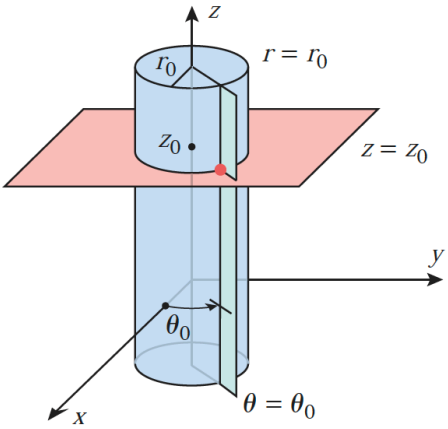

Figure 3: พื้นผิวของสมการ $r = r_0, \theta = \theta_0, z = z_0$. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 833)

หมายเหตุ 1. จากพื้นผิวของสมการ $r = r_0, \theta = \theta_0$ และ $z = z_0$ สามารถสรุปลักษณะได้ดังนี้

i) พื้นผิว $r = r_0$ เป็นพื้นผิวทรงกระบอกตั้งตรงที่มีรัศมี r_0 และจุดศูนย์กลางเป็นแกน z

ii) พื้นผิว $\theta = \theta_0$ เป็นครึ่งระนาบตั้งตรงตามแนวแกน z และทำมุม θ_0 กับฝั่งบวกของแกน x

iii) พื้นผิว $z = z_0$ เป็นระนาบขนานกับระนาบ xy

บทนิยาม 2. ให้ P เป็นจุดในระบบพิกัดทรงกลม (spherical coordinate system) แล้ว P มีพิกัดในรูป (ρ, θ, ϕ) โดยที่

i) $\rho \geq 0$ เป็นระยะห่างของจุด P วัดจากจุดกำเนิด O

ii) $\theta \in [0, 2\pi)$ เป็นมุมที่วัดจากฝั่งบวกของแกน x ไปยังตำแหน่งของภาพฉาย (projection) ของจุด P บนระนาบ xy

iii) $\phi \in [0, \pi]$ เป็นมุมที่วัดจากฝั่งบวกของแกน z ไปยังส่วนของเส้นตรง OP

ซึ่งสามารถอธิบายได้ดัง Figure 4

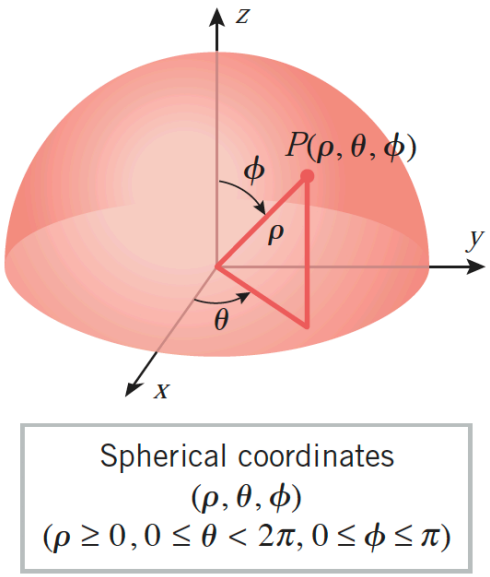

Figure 4: จุด P ในระบบพิกัดทรงกลม. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 832)

ในระบบพิกัดทรงกลม พื้นผิวของสมการ

$$\rho = \rho_0 \qquad \theta = \theta_0 \qquad \text{และ} \qquad \phi = \phi_0$$

โดยที่ $\rho_0 \geq 0, \theta \in [0, 2\pi)$ และ $\phi \in [0, \pi]$ เป็นค่าคงตัว เป็นดัง Figure 5

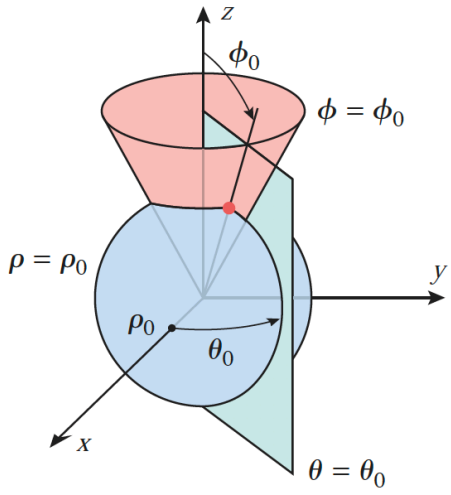

Figure 5: พื้นผิวของสมการ $\rho = \rho_0, \theta = \theta_0, \phi = \phi_0$. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 833)

หมายเหตุ 2. จากพื้นผิวของสมการ $\rho = \rho_0, \theta = \theta_0$ และ $\phi = \phi_0$ สามารถสรุปลักษณะได้ดังนี้

i) พื้นผิว $\rho = \rho_0$ เป็นพื้นผิวทรงกลมที่มีรัศมี ρ_0 และจุดศูนย์กลางเป็นจุดกำเนิด

ii) พื้นผิว $\theta = \theta_0$ เป็นครึ่งระนาบตั้งตรงตามแนวแกน z และทำมุม θ_0 กับฝั่งบวกของแกน x

iii) พื้นผิว $\phi = \phi_0$ แบ่งเป็นหลายกรณี ดังนี้

ถ้า $\phi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ แล้วพื้นผิวเป็นกรวยหงายที่ผิวกรวยทำมุม ϕ_0 กับฝั่งบวกของแกน z

ถ้า $\phi_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ แล้วพื้นผิวเป็นกรวยคว่ำที่ผิวกรวยทำมุม ϕ_0 กับฝั่งบวกของแกน z

ถ้า $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ แล้วพื้นผิวเป็น.....

ถ้า $\phi_0 = 0$ แล้วพื้นผิวเป็น.....

ถ้า $\phi_0 = \pi$ แล้วพื้นผิวเป็น.....

พิจารณาระบบพิกัดทรงกระบอก ระบบพิกัดทรงกลม และระบบพิกัดฉากบนระนาบ xy โดยที่จุดกำเนิดของทั้งสองระบบเป็นจุดเดียวกัน จะพบว่าระบบพิกัดต่าง ๆ มีความสัมพันธ์กันดังนี้

จาก	เป็น	สูตร	ข้อจำกัด
(r,θ,z)	(x,y,z)	$x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$ $z = z$	$r \geq 0$ $\theta \in [0,2\pi)$ $z \in \mathbb{R}$
(x,y,z)	(r,θ,z)	$r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\tan\theta = \frac{y}{x}$ $z = z$	
(ρ,θ,ϕ)	(x,y,z)	$x = \rho\sin\phi\cos\theta$ $y = \rho\sin\phi\sin\theta$ $z = \rho\cos\phi$	$\rho \geq 0$ $\theta \in [0,2\pi)$ $\phi \in [0,\pi]$
(x,y,z)	(ρ,θ,ϕ)	$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\cos\phi = \frac{z}{\rho}$	

ตัวอย่าง 1. จงหาตำแหน่งในระบบพิกัดฉากของจุดในระบบพิกัดทรงกระบอกต่อไปนี้

1. $P(1,0,1)$
2. $Q(4,\frac{\pi}{6},3)$

ตัวอย่าง 2. จงหาตำแหน่งในระบบพิกัดทรงกระบอกของจุดในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้

1. $P(1,-1,-1)$
2. $Q(4\sqrt{3},4,-4)$

ตัวอย่าง 3. จงหาตำแหน่งในระบบพิกัดฉากของจุดในระบบพิกัดทรงกลมต่อไปนี้

1. $P(1, 0, \pi)$
2. $Q(5, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$

ตัวอย่าง 4. จงหาตำแหน่งในระบบพิกัดทรงกลมของจุดในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้

1. $P(1,0,0)$
2. $Q(1,\sqrt{3},-2)$

ตัวอย่าง 5. จงหาสมการในระบบพิกัดฉากของพื้นผิวที่มีสมการในระบบพิกัดทรงกระบอกต่อไปนี้

1. $z = 2\cos\theta$
2. $r^2 + z^2 = r^2\cos\theta\sin\theta$

ตัวอย่าง 6. จงหาสมการในระบบพิกัดฉากของพื้นผิวที่มีสมการในระบบพิกัดทรงกลมต่อไปนี้

1. $\rho = 2\cos\phi$
2. $\rho = 6\sin\phi\sin\theta$
3. $\rho\sin\phi = 4\cos\theta$

ตัวอย่าง 7. จงหาสมการในระบบพิกัดทรงกระบอกและระบบพิกัดทรงกลมของพื้นผิวที่มีสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้

1. $x+2y+3z=1$
2. $x^2+y^2+z^2=16$
3. $z=\sqrt{x^2+y^2}$