สมการเชิงอนุพันธ์

(Differential Equations)

ดร.นิมิต นิมานะ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยขอนแก่น

สมการเชิงอนุพันธ์

(Differential Equations)

ดร.นิมิต นิมานะ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยขอนแก่น

คำนำ

เอกสารประกอบการสอนนี้เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนรายวิชา 314231 และ SC402301 สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) สำหรับนักศึกษาชั้นปีที่ 2 คณะวิทยาศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ และคณะเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยขอนแก่น

เอกสารประกอบการสอนนี้ประกอบด้วยเนื้อหาที่สำคัญ 7 บทด้วยกัน กล่าวคือ ในบทที่ 1 จะกล่าวถึงนิยามศัพท์เบื้องต้นของสมการเชิงอนุพันธ์ ในบทที่ 2 จะกล่าวถึงการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งในลักษณะต่าง ๆ จากนั้นจะกล่าวถึงการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งในบทที่ 3 ตามลำดับ สำหรับบทที่ 4 จะกล่าวถึงทฤษฎีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง ตลอดจนการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และในบทที่ 5 จะกล่าวถึงตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง โดยจะเน้นตัวแบบที่เกี่ยวข้องกับการสั่นทางกลแบบอิสระ ในบทที่ 6 จะกล่าวถึงการแปลงลาปลาซ การแปลงลาปลาซผกผัน สมบัติของผลการแปลง รวมทั้งการนำความรู้เกี่ยวกับผลการแปลงลาปลาซไปใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ และระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ตามลำดับ ในบทสุดท้าย จะกล่าวถึงการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรทั้งในกรณีที่สมการอยู่ในรูปแบบเฉพาะ และการหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์

สุดท้ายนี้ ผู้เรียบเรียงขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ มากชู ผู้ประศาสน์วิชาสมการเชิงอนุพันธ์ขณะผู้เรียบเรียงเป็นนิสิตระดับปริญญา

ตรี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร โดยผู้เรียบเรียงได้ใช้องค์ความรู้ที่ได้รับเป็นแนวทางในการเรียบเรียงเอกสารประกอบการสอนนี้ ขอขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.นรินทร์ เพชร์โรจน์ อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ระดับปริญญาเอกของผู้เรียบเรียง รองศาสตราจารย์ ดร.สาธิต แซ่จึง และรองศาสตราจารย์ ดร.คณิต มุกดาใส อาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่นที่ได้ให้คำแนะนำเกี่ยวกับการเรียบเรียงเอกสารประกอบการสอนนี้ ตลอดจนอาจารย์และบุคลากรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่นทุกท่านที่อำนวยความสะดวกในการจัดทำเอกสารประกอบการสอนนี้ด้วยความอบอุ่นเสมอมา

อนึ่ง หากเนื้อหาในเอกสารประกอบการนี้มีข้อผิดพลาด หรือมีจุดที่ควรพัฒนาปรับปรุงให้นำสมัยยิ่งขึ้น ผู้เรียบเรียงยินดีรับคำแนะนำและร่วมอภิปรายโดยตรง ทั้งนี้ ผู้เรียบเรียงยินดีรับข้อเสนอผ่าน E-mail ส่วนตัว nimitni@kku.ac.th หรือผ่าน Webpage ส่วนตัว http://math.kku.ac.th/nimana_n จักขอบพระคุณยิ่ง

นิมิต นิมานะ

สารบัญ

บทที่ 1
สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

1.1 สมการเชิงอนุพันธ์

<u>หากเรายังจำได้!</u> ในวิชาแคลคูลัส ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน $y = f(x)$ แล้วเราจะได้ว่า อนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

คือฟังก์ชันของตัวแปร x ที่ได้จากการคำนวณโดยใช้บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เหมาะสมกับฟังก์ชัน f นั้น ๆ ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน $y = e^{x^2}$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $(-\infty, +\infty)$ และโดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}$$

ซึ่งหากเราแทนค่าตัวแปร y ในสมการด้วย e^{x^2} จะได้ว่า อนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \qquad (1.1)$$

ทีนี้ลองพิจารณาในทางกลับกันว่า ถ้าเรากำลังสนทนากับเพื่อนคนหนึ่ง และเพื่อนคนดังกล่าวนี้ให้เราหาผลเฉลย (solution) ของสมการในรูป (1.1) นี้ แน่นอนว่าเราจะต้อง **"งง"** แล้วถามเพื่อนคนนั้นกลับไปว่า **"ฟังก์ชัน y คืออะไร?"**

ทำใจนะ! เราจะพบกับคำถามนี้ตลอดทั้งรายวิชาสมการเชิงอนุพันธ์

ก่อนที่จะนิยาม "สมการเชิงอนุพันธ์" เราจำเป็นต้องรู้จักศัพท์เฉพาะเบื้องต้นดังนี้

ถ้าเรามีสมการที่มีอนุพันธ์ของตัวแปรหนึ่งเทียบกับอีกตัวแปรหนึ่ง แล้วเราจะเรียกตัวแปรแรกว่า **ตัวแปรตาม** (dependent variable) และเรียกอีกตัวแปรว่า **ตัวแปรต้น** หรือ **ตัวแปรอิสระ** (independent variable) ตัวอย่างเช่น สมการ

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+x=0$$

มีตัวแปร x เป็นตัวแปรต้น และตัวแปร y เป็นตัวแปรตาม

> **บทนิยาม 1.1 (สมการเชิงอนุพันธ์)**
> เราเรียกสมการที่มีอนุพันธ์ของตัวแปรตามอย่างน้อยหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรต้นอย่างน้อยหนึ่งตัวว่า **สมการเชิงอนุพันธ์** (differential equation, DE)

เราสามารถจำแนกสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

1) **จำแนกโดยชนิด (type)** เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรอย่างน้อยหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรต้นเพียงหนึ่งตัวว่า **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ** (ordinary differential equation, ODE) ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}+y&=e^x\\ \frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-y&=0\\ \frac{dy}{dt}+\frac{dx}{dt}&=t\end{aligned}$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Why?) และเราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรอย่างน้อยหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรต้นอย่างน้อยสองตัวว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย** (partial differential equation, PDE) ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial x}{\partial s}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2k\frac{\partial u}{\partial t}$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Why?) [1]

2) **จำแนกโดยอันดับ (order)** เราเรียกอันดับสูงสุดของอนุพันธ์ในสมการเชิงอนุพันธ์ว่า **อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์** (order of a differential equation) ตัวอย่างเช่น
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$
เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง (Why?) ในบางครั้งสมการเชิงอนุพันธ์จะเขียนอยู่ในรูป
$$x^2dy + ydx = 0$$
ซึ่งสามารถจัดรูปใหม่ได้
$$x^2\frac{dy}{dx} + y = 0$$
หรือ
$$x^2y' + y = 0$$
ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

3) **จำแนกโดยความเป็นเชิงเส้น (linearity)** เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป

[1] ในที่นี้ เราใช้สัญลักษณ์แบบไลบ์นิทซ์ (Leibniz notation) เช่น $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$ ควบคู่ไปกับสัญลักษณ์แบบไพร์ม (prime notation) เช่น $y', y'', y''', \ldots$ แทนอนุพันธ์สามัญ และในกรณีทั่วไป เราใช้สัญลักษณ์ $\frac{d^ny}{dx^n}$ และ $y^{(n)}$ แทนอนุพันธ์สามัญอันดับ n และในรายวิชานี้เราจะศึกษาเฉพาะสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเท่านั้น และจากนี้ไปจะเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ใด ๆ ในรายวิชานี้ ว่า สมการเชิงอนุพันธ์

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

โดยที่ $a_n(x),a_{n-1}(x),\ldots,a_1(x),a_0(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x ว่า **สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น** (linear equation) สังเกตว่า สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นมีลักษณะสำคัญดังนี้

i) ตัวแปรตาม y และอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\frac{d^ny}{dx^n}$ มีเลขชี้กำลัง (degree) เท่ากับ 1

ii) สัมประสิทธิ์ $a_n(x),a_{n-1}(x),\ldots,a_1(x)$ และ $a_0(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรต้น x

ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned}(y-x)dx+4xdy&=0\\ y''-2y'+y&=0\\ x^3y^{(3)}-y''+3xy'+5y&=e^{3x}\end{aligned}$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (Why?) และเราจะเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นว่า **สมการไม่เชิงเส้น** (nonlinear equation) ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned}(1-y)y'+2y&=\ln x\\ y''+\sin y&=0\\ (y'')^2+y^2&=0\end{aligned}$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น (Why?)

แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 1.1 จงระบุตัวแปรต้น ตัวแปรตาม และอันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(1-x)y''' - 4xy + 5y = \cos x$
2. $x\frac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$
3. $yy' + 2y = 1 = x^2$
4. $x^2dy + (y - xy - xe^x)dx = 0$
5. $x^3y^{(4)} - x^2y'' + 4xy' - 3y = 0$
6. $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \sin y$
7. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$
8. $\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{k}{R^2}$
9. $(\sin x)y''' - (\cos x)y' = 2$
10. $(1-y^2)dx + xdy = 0$

แบบฝึกหัด 1.2 จงระบุว่าสมการเชิงอนุพันธ์แต่ละข้อในแบบฝึกหัด 1.1 เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นหรือไม่

1.2 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

โดยทั่วไปแล้ว เราจะเขียนสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ของตัวแปรต้น x และตัวแปรตาม y ในรูป

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \tag{1.2}$$

โดยที่ F เป็นฟังก์ชันของตัวแปร $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$ และเราสามารถนิยามผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (1.2) ได้ดังนี้

> **บทนิยาม 1.2 (ผลเฉลยชัดแจ้ง)**
> ให้ I เป็นช่วงของจำนวนจริงใด ๆ และกำหนดให้สมการเชิงอนุพันธ์ (1.2) นิยามบนช่วง I เราจะกล่าวว่า ฟังก์ชัน $\phi(x)$ ที่นิยามบนช่วง I เป็น **ผลเฉลยชัดแจ้ง** (explicit solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ (1.2) บนช่วง I ถ้า $\phi(x)$ สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ (1.2) สำหรับทุกจำนวนจริง $x \in I$

ตัวอย่าง 1.1 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\phi(x) = \frac{x^4}{16}$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์

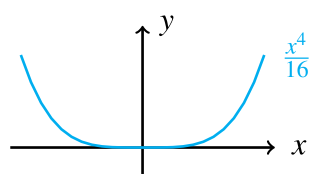
$$\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = 0$$

บนช่วง $(-\infty, +\infty)$

วิธีทำ กำหนดให้ $x \in (-\infty, +\infty)$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ เนื่องจาก $\frac{d}{dx}\phi(x) = \frac{x^3}{4}$ ซึ่งแทนค่าในสมการเชิงอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\phi(x) - x \cdot (\phi(x))^{1/2} &= \frac{x^3}{4} - x \cdot \left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} \\ &= \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} = 0\end{aligned}$$

เนื่องจาก x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ในช่วง $(-\infty,+\infty)$ เพราะฉะนั้น ฟังก์ชัน $\phi(x) = \frac{x^4}{16}$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้บนช่วง $(-\infty,+\infty)$ ซึ่งลักษณะของเส้นโค้งผลเฉลย (solution curve) แสดงในรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1: เส้นโค้งผลเฉลยชัดแจ้ง $\frac{x^4}{16}$

■

สังเกตว่า ฟังก์ชัน $\phi(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in (-\infty,+\infty)$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ในตัวอย่าง 1.1 ด้วย (Why?) ซึ่งเราเรียกผลเฉลย $\phi(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in I$ ว่า **ผลเฉลยชัด** (trivial solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่าง 1.2 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\phi(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x^2}y = 0$$

บนช่วง $(-\infty,+\infty)\setminus\{0\}$ และจงแสดงว่าฟังก์ชัน $\varphi(x) = x^3$ ไม่เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้บนช่วง $(-\infty,+\infty)$

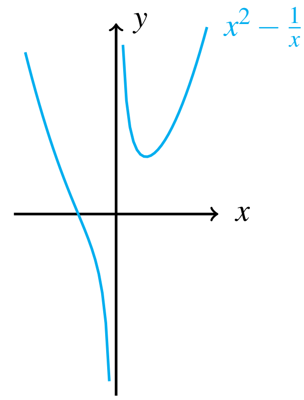
วิธีทำ กำหนดให้ $x \in (-\infty,+\infty)\setminus\{0\}$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ เนื่องจาก $\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$ ซึ่งแทนค่าในสมการเชิงอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) - \frac{2}{x^2}\cdot\phi(x) = \left(2 - \frac{2}{x^3}\right) - \frac{2}{x^2}\cdot\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) = 0$$

เนื่องจาก x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ในช่วง $(-\infty,+\infty)\setminus\{0\}$ เพราะฉะนั้น ฟังก์ชัน $\phi(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์บนช่วง $(-\infty,+\infty)$ โดยลักษณะของเส้นโค้งผลเฉลยแสดงในรูปที่ 1.2

อย่างไรก็ตาม สำหรับแต่ละ $x \in (-\infty,+\infty)\setminus\{0\}$ เราทราบว่า $\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) = 6x$ ซึ่งแทนค่าในสมการเชิงอนุพันธ์ ทำให้ได้ว่า

รูปที่ 1.2: เส้นโค้งผลเฉลยชัดแจ้ง $x^2 - \frac{1}{x}$



$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) - \frac{2}{x^2}\cdot\varphi(x) = 6x - \frac{2}{x^2}\cdot x^3 = 4x \neq 0$$

นั่นคือ ฟังก์ชัน $\varphi(x) = x^3$ ไม่เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์บนช่วง $(-\infty, +\infty)$ ■

ข้อตกลง 1.1 เราจะละข้อความ "บนช่วง I" ในกรณีที่ $I = (-\infty, +\infty)$

ตัวอย่าง 1.3 กำหนดให้ $c_1, c_2 \in \{-1, 1\}$ จงแสดงว่าฟังก์ชัน

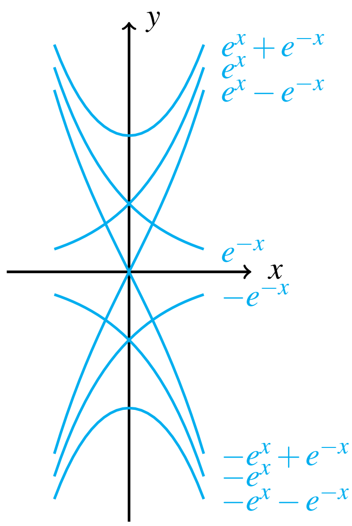
$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= e^x \\
\phi_2(x) &= e^{-x} \\
\phi_3(x) &= -e^x \\
\phi_4(x) &= -e^{-x} \\
\phi_5(x) &= c_1e^x + c_2e^{-x}
\end{aligned}$$

เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' - y = 0$

วิธีทำ กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ เนื่องจาก $\phi_1''(x) = e^x$ จึงได้ว่า $\phi_1''(x) - \phi_1(x) = e^x - e^x = 0$ นั่นคือ ฟังก์ชัน $\phi_1(x)$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์

ในทำนองเดียวกัน พิจารณา $c_1 = 1$ และ $c_2 = 1$ จะได้ว่า $\phi_5(x) = e^x + e^{-x}$ และ $\phi_5''(x) = e^x + e^{-x}$ จึงได้ว่า $\phi_5''(x) - \phi_5(x) = 0$ นั่นคือ ฟังก์ชัน $\phi_4(x)$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์

ส่วนการแสดงว่าฟังก์ชัน $\phi_2(x), \phi_3(x)$ และ $\phi_4(x)$ ที่เหลือนั้น ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ทั้งนี้ ลักษณะของเส้นโค้งผลเฉลยบางค่าแสดงในรูปที่ 1.7



รูปที่ 1.3: เส้นโค้งผลเฉลยชัดแจ้งบางค่าของ $y''-y=0$

■

บทนิยาม 1.3 (ผลเฉลยโดยปริยาย)
ให้ I เป็นช่วงของจำนวนจริงใด ๆ และกำหนดให้สมการเชิงอนุพันธ์ (1.2) นิยามบนช่วง I เราจะกล่าวว่า ความสัมพันธ์ $\Phi(x,y)=0$ เป็น **ผลเฉลยโดยปริยาย** (implicit solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ (1.2) บนช่วง I ถ้ามีฟังก์ชัน $y=\phi(x)$ อย่างน้อยหนึ่งตัวที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ $\Phi(x,y)=0$ และเป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ (1.2) บนช่วง I

ตัวอย่าง 1.4 จงแสดงว่าความสัมพันธ์ $x^2+y^2=9$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

บนช่วงเปิด $(-3,3)$

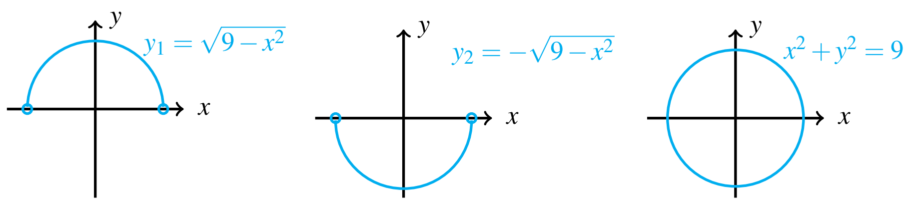
วิธีทำ กำหนดให้ $x\in(-3,3)$ พิจารณาความสัมพันธ์ $x^2+y^2=9$ เมื่อจัดตัวแปร y ให้อยู่ในรูปของตัวแปรต้น x จะได้

$$y_1 = \sqrt{9-x^2} \qquad \text{และ } y_2 = -\sqrt{9-x^2}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เมื่อ $x \in (-3,3)$

เนื่องจาก y_1 และ y_2 เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ (Why?) โดยมีลักษณะของเส้นโค้งผลเฉลยชัดแจ้งดังรูปที่ 1.4 (ก) และ (ข)

จึงสรุปได้ว่า ความสัมพันธ์ $x^2 + y^2 = 9$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ ซึ่งลักษณะของเส้นโค้งผลเฉลยโดยปริยายแสดงในรูปที่ 1.4 (ค)



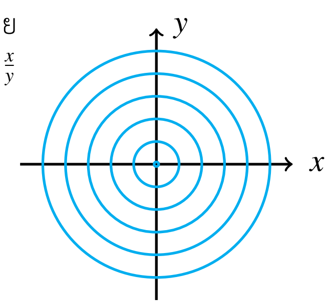
(ก) เส้นโค้งผลเฉลยชัดแจ้ง $y_1 = \sqrt{9-x^2}$ (ข) เส้นโค้งผลเฉลยชัดแจ้ง $y_2 = -\sqrt{9-x^2}$ (ค) เส้นโค้งผลเฉลยโดยปริยาย $x^2 + y^2 = 9$

รูปที่ 1.4: เส้นโค้งผลเฉลยชัดแจ้งและเส้นโค้งผลเฉลยโดยปริยายของ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

■

หมายเหตุ 1.1 สำหรับแต่ละ $c \geq 0$ จะได้ว่า ความสัมพันธ์ $x^2 + y^2 = c$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์ในตัวอย่าง 1.4 บนช่วง $(-\sqrt{c}, \sqrt{c})$ เสมอ (Why?) ซึ่งตัวอย่างของเส้นโค้งผลเฉลยโดยปริยายแสดงในรูปที่ 1.5

รูปที่ 1.5: เส้นโค้งผลเฉลยโดยปริยายบางค่าของ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$



จากตัวอย่าง 1.3 และ หมายเหตุ 1.1 จะพบว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อาจมีเป็นจำนวนอนันต์ โดยขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ c

พิจารณา สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง $F(x,y,y')=0$ ซึ่งมีเซตของผลเฉลยเป็นวงศ์ของความสัมพันธ์ $G(x,y,c)=0$ [2] เราเรียกเซตของผลเฉลยดังกล่าวนี้ว่า **วงศ์ผลเฉลย** (family of solutions) ของสมการเชิงอนุพันธ์ และเราเรียกผลเฉลยที่ไม่ปรากฏค่าพารามิเตอร์ c ว่า **ผลเฉลยเฉพาะ** (particular solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ ในกรณีทั่วไป เราจะเรียกวงศ์ของความสัมพันธ์ $G(x,y,c_1,c_2,\dots,c_n)=0$ เมื่อ $c_1,c_2,\dots,c_n$ เป็นพารามิเตอร์ใด ๆ ที่เป็นเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (อันดับ n) $F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0$ ว่า วงศ์ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั่นเอง เช่น พิจารณาตัวอย่าง 1.3 จะพบว่า วงศ์ของฟังก์ชัน $c_1e^x+c_2e^{-x}$ เมื่อ c_1,c_2 เป็นพารามิเตอร์ใด ๆ เป็นวงศ์ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-y=0$ (Why?) และ e^x,e^{-x} และ e^x-e^{-x} เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ $y''-y=0$ เป็นต้น (Why?)

อย่างไรก็ตาม บางสมการเชิงอนุพันธ์อาจมีผลเฉลยเฉพาะอื่นที่ไม่ได้อยู่ในวงศ์ผลเฉลยก็ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.5 จงแสดงว่าวงศ์ของฟังก์ชัน $y_1=cx^4$ เมื่อ c เป็นพารามิเตอร์ใด ๆ เป็นวงศ์ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$xy'-4y=0$$

และจงแสดงว่าฟังก์ชันนิยามเป็นช่วง

$$y_2=\begin{cases}-x^4 & \text{ถ้า } x<0\\ x^4 & \text{ถ้า } x\geq 0\end{cases}$$

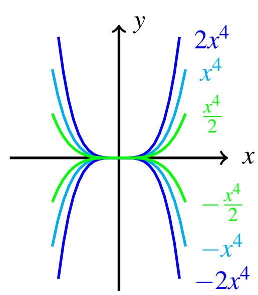
เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้

---

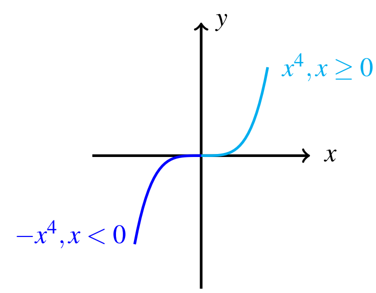
[2] วงศ์ของความสัมพันธ์ $\{G(x,y,c)=0 : c\in J\}$ คือ เซตของความสัมพันธ์ทั้งหลายที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ $c\in J$ โดยที่ J เป็นช่วงที่ความสัมพันธ์ทั้งหลายนี้นิยามได้และเขียนแทนด้วย $G(x,y,c)=0$ ตัวอย่างเช่น ในหมายเหตุ 1.1 จะได้ว่า $J=[0,+\infty)$ ทั้งนี้เพราะมีจำนวนจริง x และ y อย่างน้อยหนึ่งคู่ที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ $x^2+y^2=c$ อย่างไรก็ตาม เมื่อ $J=(-\infty,0)$ จะพบว่า ไม่มีจำนวนจริง x และ y คู่ใด ที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ $x^2+y^2=c$

วิธีทำ กำหนดให้พารามิเตอร์ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ และให้ $x \in (-\infty, +\infty)$ เนื่องจาก $y_1' = 4cx^3$ จึงได้ว่า $xy_1' - 4y_1 = x \cdot (4cx^3) - 4 \cdot (cx^4) = 0$ เพราะฉะนั้น วงศ์ของฟังก์ชัน $y_1 = cx^4$ เป็นวงศ์ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยมีลักษณะของเส้นโค้งผลเฉลยเฉพาะบางค่าดังรูปที่ 1.6 (ก)

ในอีกด้านหนึ่ง จะได้ว่า y_2 เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ด้วย (Why?) ซึ่งลักษณะเส้นโค้งผลเฉลยแสดงในรูปที่ 1.6 (ข)



(ก) เส้นโค้งผลเฉลยเฉพาะของวงศ์ผลเฉลย $y = cx^4$ สำหรับบางค่า c



(ข) เส้นโค้งผลเฉลยนิยามเป็นช่วง

รูปที่ 1.6: เส้นโค้งผลเฉลยเฉพาะและเส้นโค้งผลเฉลยนิยามเป็นช่วงของ $xy' - 4y = 0$

■

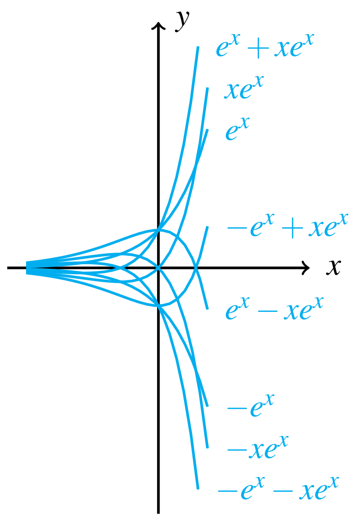
ตัวอย่าง 1.6 จงแสดงว่าวงศ์ของฟังก์ชัน $y = c_1e^x + c_2xe^x$ เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นพารามิเตอร์ใด ๆ เป็นวงศ์ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 2y +' y = 0$$

วิธีทำ กำหนดให้พารามิเตอร์ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ และให้ $x \in (-\infty, +\infty)$ เนื่องจาก $y' = (c_1 + c_2)e^x + c_2xe^x$ และ $y'' = (c_1 + 2c_2)e^x + c_2xe^x$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} y'' - 2y +' y &= ((c_1 + 2c_2)e^x + c_2xe^x) - 2 \cdot ((c_1 + c_2)e^x + c_2xe^x) + (c_1e^x + c_2xe^x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น วงศ์ของฟังก์ชัน $y = c_1e^x + c_2xe^x$ เป็นวงศ์ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยมีลักษณะของเส้นโค้งผลเฉลยเฉพาะบางค่าดังรูปที่ 1.7



รูปที่ 1.7: เส้นโค้งผลเฉลยเฉพาะบางค่าของ $y'' - 2y' + y = 0$

■

แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 1.3 จงแสดงว่า $\phi(x) = x^2$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ $xy' = 2y$

แบบฝึกหัด 1.4 จงแสดงว่า $\phi(x) = e^x - x$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ $y' + y^2 = e^{2x} + (1-2x)e^x + x^2 - 1$

แบบฝึกหัด 1.5 จงแสดงว่า $y^2 + x - 3 = 0$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์ $y' = -1/(2y)$ บนช่วง $(-\infty, 3)$

แบบฝึกหัด 1.6 จงแสดงว่า $x + y + e^{xy} = 0$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์ $(1 + xe^{xy})y' + 1 + ye^{xy} = 0$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ในแบบฝึกหัด 1.7 - 1.12 เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ในข้อนั้น ๆ หรือไม่

แบบฝึกหัด 1.7 $x = 2\cos t - 3\sin t, \qquad x'' + x = 0$

แบบฝึกหัด 1.8 $y = \sin x + x^2, \qquad y'' + y = x^2 + 2$

แบบฝึกหัด 1.9 $x = \cos 2t, \qquad x' + tx = \sin 2t$

แบบฝึกหัด 1.10 $\theta = 2e^{3t} - e^{2t}, \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} - \theta\frac{d\theta}{dt} + 3\theta = -2e^{2t}$

แบบฝึกหัด 1.11 $y = 3\sin 2x + e^{-x}, \qquad y'' + 4y = 5e^{-x}$

แบบฝึกหัด 1.12 $y = e^{2x} - 3e^{-x}, \qquad y'' - y' - 2y = 0$

จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ในแบบฝึกหัด 1.13 - 1.17 เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ในข้อนั้น ๆ หรือไม่ (บนช่วงที่ความสัมพันธ์ในแต่ละข้อนิยามได้)

แบบฝึกหัด 1.13 $y - \ln y = x^2 + 1, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y-1}$

แบบฝึกหัด 1.14 $x^2 + y^2 = 4, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

แบบฝึกหัด 1.15 $e^{xy}+y=x-1,\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{e^{-xy}-y}{e^{-xy}+x}$

แบบฝึกหัด 1.16 $x^2-\sin(x+y)=1,\qquad y'=2x\sec(x+y)-1$

แบบฝึกหัด 1.17 $\sin y+xy-x^3=2,\qquad y''=\frac{6xy'+(y')^3\sin y-2(y')^2}{3x^2-y}$

1.3 ปัญหาค่าเริ่มต้น

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาปัญหาการหาผลเฉลย $\phi(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์โดยที่ $\phi(x)$ สอดคล้องเงื่อนไขเพิ่มเติมที่กำหนดให้บางอย่าง ดังนี้

บทนิยาม 1.4 (ปัญหาค่าเริ่มต้น)
กำหนดให้สมการเชิงอนุพันธ์ (1.2) นิยามบนช่วง I และ $x_0 \in I$ เราจะเรียกการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (1.2) บนช่วง I ที่ผลเฉลยดังกล่าวสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition)

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ \frac{d}{dx}y(x_0) &= y_1, \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}y(x_0) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

โดยที่ $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ เป็นค่าคงตัว ว่า **ปัญหาค่าเริ่มต้น** (initial value problem)

ในกรณีของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ปัญหาค่าเริ่มต้นจะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(x_0) = y_0$$

และในกรณีของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง เงื่อนไขเริ่มต้นจะอยู่ในรูป

$$y(x_0) = y_0, \qquad \frac{d}{dx}y(x_0) = y_1$$

เงื่อนไขเริ่มต้นมีที่มาจากวิชาฟิสิกส์ กล่าวคือ เมื่อให้เวลา t เป็นตัวแปรต้น จะพบว่าเงื่อนไข $y(t_0) = y_0$ และ $y'(t_0) = y_1$ หมายถึง ตำแหน่ง และความเร็วของวัตถุ ณ บางจุดเริ่มต้น ขณะเวลา t_0 ตามลำดับนั่นเอง

ในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นนั้น เรามักจะวงศ์ของผลเฉลยที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ก่อน จากนั้นจึงใช้เงื่อนไขเริ่มต้นในการหาผลเฉลยเฉพาะที่นิยามบนช่วง I ที่พิจารณาตามลำดับ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.7 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} - y = 0; \quad y(0) = 3$$

วิธีทำ กำหนดให้พารามิเตอร์ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ และให้ $x \in (-\infty, +\infty)$ พิจารณา $\phi(x) = ce^x$ จะได้ $\phi'(x) = ce^x$ จึงได้ว่า $\phi'(x) - \phi'(x) = ce^x - ce^x = 0$ เพราะฉะนั้นวงศ์ของฟังก์ชัน $\phi(x) = ce^x$ เป็นวงศ์ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้

พิจารณาเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 3$ (แทนค่า $x = 0$ และ $y = 3$) ในวงศ์ของผลเฉลยดังกล่าว จะได้ $3 = ce^0 = c$ นั่นคือฟังก์ชัน $y = 3e^x$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

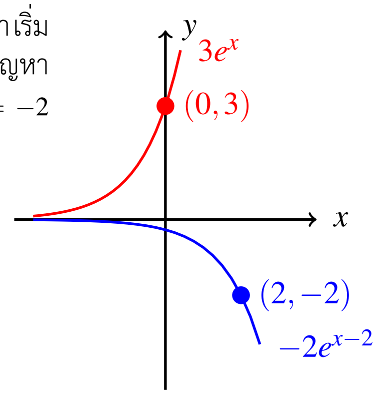
$$\frac{dy}{dx} - y = 0; \quad y(0) = 3$$

พิจารณาเงื่อนไขเริ่มต้นอื่น เช่น $y(2) = -2$ จะได้ว่า $-2 = ce^2$ นั่นคือ $c = -2e^{-2}$ ซึ่งทำให้ได้ว่า ฟังก์ชัน $y = -2e^{x-2}$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} - y = 0; \quad y(2) = -2$$

ซึ่งเส้นโค้งผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นทั้งสองนี้แสดงในรูปที่ 1.8 ■

จากตัวอย่างข้างต้น จะพบว่า ณ ขณะนี้ ข้อจำกัดในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น กลายเป็นการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ แน่นอนว่า ถ้าเราทราบผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ เราจะสามารถหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นนั้น ๆ ได้โดยใช้เพียงการแทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้นนั่นเอง ซึ่งตัวอย่างที่เหลือต่อจากนี้ไปจะกำหนดฟังก์ชันที่เหมาะสมให้ ทั้งนี้การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น เราจะเริ่มศึกษาตั้งแต่บทที่ 2 เป็นต้นไป



รูปที่ 1.8: เส้นโค้งผลเฉลยปัญหาค่าเริ่มต้น $y' - y = 0$, $y(0) = 3$ และปัญหาค่าเริ่มต้น $y' - y = 0$, $y(2) = -2$

ตัวอย่าง 1.8 จงหาค่า c_1 และ c_2 ที่ทำให้ฟังก์ชัน $\phi(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0; \qquad y(0) = 3, \qquad \frac{d}{dx}y(0) = 1$$

วิธีทำ กำหนดให้พารามิเตอร์ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ เนื่องจาก $\frac{d}{dx}\phi(x) = c_1e^xc_2e^{-x}$ และ $\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$ ซึ่งแทนค่าในสมการเชิงอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) - \phi(x) = \left(c_1e^x + c_2e^{-x}\right) - \left(c_1e^x + c_2e^{-x}\right) = 0$$

เนื่องจาก x เป็นจำนวนจริงใด ๆ จึงสรุปได้ว่า วงศ์ของฟังก์ชัน $\phi(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

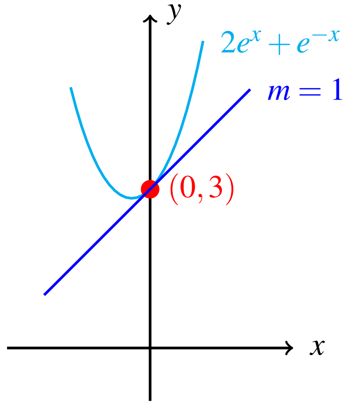
พิจารณา จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 3$ จะได้ว่า

$$3 = \phi(0) = c_1e^0 + c_2e^0 = c_1 + c_2 \tag{1.3}$$

และจากเงื่อนไขเริ่มต้น $\frac{d}{dx}y(0) = 1$ จะได้ว่า

$$1 = \phi(0) = c_1e^0 - c_2e^0 = c_1 - c_2 \tag{1.4}$$

หาผลเฉลยของระบบสมการ (1.3) และ (1.4) จะได้ $c_1 = 2$ และ $c_1 = 1$ (Why?) เพราะฉะนั้น ฟังก์ชัน $\phi(x) = 2e^x + e^{-x}$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น โดยลักษณะของเส้นโค้งผลเฉลยแสดงในรูปที่ 1.9



รูปที่ 1.9: เส้นโค้งผลเฉลย $2e^x + e^{-x}$

ทั้งนี้ จากรูปจะพบว่า เส้นโค้งผลเฉลยผ่านจุด $(0,3)$ และมีความชัน (m) ของเส้นสัมผัสโค้งที่ $x = 0$ เท่ากับ 1 นั่นเอง ■

ตัวอย่าง 1.9 จงหาค่า c_1 และ c_2 ที่ทำให้ฟังก์ชัน $\phi(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0; \quad y(0) = -1, \quad \frac{d}{dx}y(0) = 1$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ตัวอย่าง 1.10 จงหาค่า c_1 และ c_2 ที่ทำให้ฟังก์ชัน $\phi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' - y' - 2y = 0; \quad y(0) = 2, \quad \frac{d}{dx}y(0) = -3$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

จากตัวอย่างข้างต้นทั้งหมด เราจะสังเกตได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์ที่ศึกษาผ่านมาจะมีผลเฉลยเสมอ และปัญหาค่าเริ่มต้นข้างต้นมีผลเฉลยเพียงค่าเดียวเสมอ อย่างไรก็ตาม ในความเป็นจริงแล้ว **โลกไม่ได้สวยงามขนาดนั้น!**

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.11 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\phi(x) \equiv 0$ และ $\varphi(x) = \frac{1}{16}x^4$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}; \quad y(0) = 0$$

วิธีทำ เราเห็นได้ชัดเจนว่าฟังก์ชัน $\phi(x) \equiv 0$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นนี้ ในอีกด้านหนึ่ง จากตัวอย่าง 1.1 และการแทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 0$ จะพบว่าฟังก์ชัน $\varphi(x) = \frac{1}{16}x^4$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นด้วย ■

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ กล่าวถึงสถานการณ์ที่ทำให้ปัญหาค่าเริ่มต้นมีผลเฉลยเพียงตัวเดียวบนบางช่วงของจำนวนจริง ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

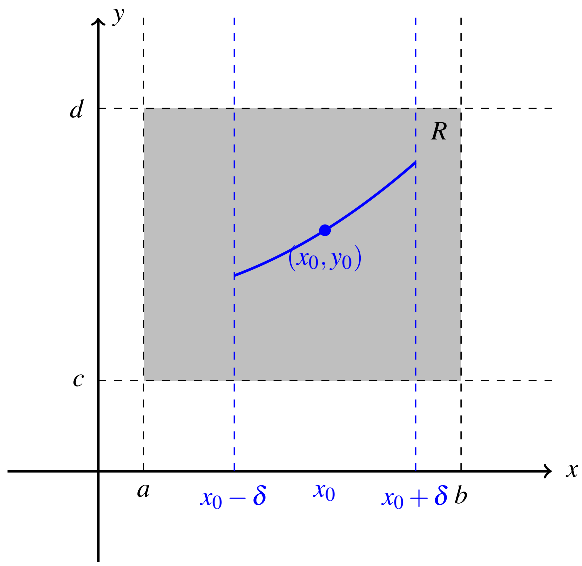
ทฤษฎีบท 1.1 (การมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยบนบางช่วง) *พิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้น*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y); \quad y(x_0) = y_0$$

ถ้า f และ $\frac{\partial f}{\partial y}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก (rectangle)

$$R := \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : a < x < b, c < y < d\}$$

ที่บรรจุจุด (x_0, y_0) แล้ว ปัญหาค่าเริ่มต้นจะมีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวบนช่วง $I_0 := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$ ที่ผลเฉลยนี้นิยามได้ สำหรับบางค่าคงตัว δ ที่มีค่าเป็นบวก



รูปที่ 1.10: อธิบายลักษณะการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยบนบริเวณรูปสี่เหลี่ยม R

ถ้าสมมติให้ $y(x)$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y); \qquad y(x_0) = y_0$$

บนบางช่วง I และ จุด (x_0, y_0) อยู่ในบริเวณรูปสี่เหลี่ยม R เงื่อนไขความต่อเนื่องของฟังก์ชัน $f(x,y)$ บน R เป็นเงื่อนไขเพียงพอในการยืนยันการมีอยู่จริงของผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นที่นิยามได้บนบางช่วง I ทั้งนี้ ช่วง I_0 ที่สามารถยืนยันการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นซึ่งเกิดขึ้นตามทฤษฎีบท 1.1 อาจไม่เท่ากับช่วง I ก็ได้

ตัวอย่าง 1.12 จงใช้ทฤษฎีบท 1.1 แสดงว่ามีช่วง I_0 ที่ทำให้ฟังก์ชัน $\phi(x) = 3e^x$ เป็นผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} - y = 0; \quad y(0) = 3$$

บนช่วง I_0 ดังกล่าว

วิธีทำ จากตัวอย่าง 1.7 เราทราบว่าฟังก์ชัน $\phi(x) = 3e^x$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นนี้ และเนื่องจาก $f(x,y) = y$ และ $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = 1$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนระนาบ xy เพราะฉะนั้น โดยใช้ทฤษฎีบท 1.1 จะได้ว่า มีช่วง I_0 ที่ทำให้ฟังก์ชัน $\phi(x) = 3e^x$ เป็นผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวของปัญหาค่าเริ่มต้นที่กำหนดให้ ■

ตัวอย่าง 1.13 จงใช้ทฤษฎีบท 1.1 ตรวจสอบว่ามีช่วง I_0 ที่ทำให้ปัญหาค่าเริ่มต้น

$$3\frac{dy}{dx} = x^2 - xy^3; \quad y(1) = 6$$

มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวบนช่วง I_0 ดังกล่าวหรือไม่

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ตัวอย่าง 1.14 จงใช้ทฤษฎีบท 1.1 ตรวจสอบว่ามีช่วง I_0 ที่ทำให้ปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y' = 3y^{2/3}; \quad y(2) = 0$$

มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวบนช่วง I_0 ดังกล่าวหรือไม่

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 1.18 จงแสดงว่าวงศ์ของฟังก์ชัน $\phi(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x}$ เป็นวงศ์ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' + y' - 2y = 0$$

สำหรับทุกค่าคงตัว c_1 และ c_2 และจงหาค่า c_1 และ c_2 ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นต่อไปนี้

1. $y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1$
2. $y(1) = 1, \qquad y'(1) = 0$

แบบฝึกหัด 1.19 จงแสดงว่าวงศ์ของฟังก์ชัน $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ เป็นวงศ์ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x'' + x = 0$$

สำหรับทุกค่าคงตัว c_1 และ c_2 และจงหาค่า c_1 และ c_2 ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นต่อไปนี้

1. $x(0) = -1, \qquad x'(0) = 8$
2. $x(\pi/2) = 0, \qquad x'(\pi/2) = 1$
3. $x(\pi/6) = 1/2, \qquad x'(\pi/6) = 0$
4. $x(\pi/4) = \sqrt{2}, \qquad x'(\pi/2) = 2\sqrt{2}$

จงใช้ทฤษฎีบท 1.1 ตรวจสอบว่ามีช่วง I_0 ที่ทำให้ปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวบนช่วง I_0 ดังกล่าวหรือไม่

แบบฝึกหัด 1.20 $\frac{dy}{dx} = y^4 - x^4; \qquad y(0) = 7$

แบบฝึกหัด 1.21 $\frac{dy}{dt} - ty = \sin^2 t; \qquad y(\pi) = 5$

แบบฝึกหัด 1.22 $y\frac{dy}{dx} = x; \qquad y(1) = 0$

แบบฝึกหัด 1.23 $3x\frac{dy}{dx} + 4t = 0; \qquad y(2) = -\pi$

แบบฝึกหัด 1.24 $\frac{dy}{dt} - \cos t = \sin t; \qquad y(\pi) = 0$

แบบฝึกหัด 1.25 $\frac{dy}{dx} = 3x - \sqrt[3]{y-1}; \qquad y(2) = 1$

บทที่ 2
สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

จากบทก่อนหน้าพบว่า เราสามารถจำแนกสมการเชิงอนุพันธ์ออกเป็นได้หลายรูปแบบตามชนิด อันดับ และความเป็นเชิงเส้นของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น ๆ ในบทนี้เราจะศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ตามโครงสร้างของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์แยกตัวแปรได้

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{2.1}$$

ถ้าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร x เท่านั้น กล่าวคือ $f(x,y) = g(x)$ แล้วสมการเชิงอนุพันธ์ (2.1) จะอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

และถ้าเราทราบว่าฟังก์ชัน g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้วเราสามารถหาผลเฉลยได้โดยการหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการ ซึ่งจะทำให้ได้ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$y = \int g(x)dx = G(x) + c$$

โดยที่ $G(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $g(x)$ และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ในกรณีทั่วไป ฟังก์ชัน $f(x,y)$ ที่สามารถเขียนในรูปผลคูณของฟังก์ชัน กล่าวคือ

$$f(x,y) = g(x)p(y)$$

โดยที่ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ $p(y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y ทำให้สามารถนิยามสมการแยกตัวแปรได้ดังนี้

บทนิยาม 2.1 (สมการแยกตัวแปรได้)
เราจะกล่าวว่า สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

เป็น **สมการแยกตัวแปรได้** (separable equation) ถ้าฟังก์ชัน $f(x,y)$ สามารถเขียนอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชัน $g(x)$ ของตัวแปร x และฟังก์ชัน $p(y)$ ของตัวแปร y

ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+xy}{y^2+1}$$

เป็นสมการแยกตัวแปรได้ เพราะว่า

$$\frac{2x+xy}{y^2+1} = x\frac{2+y}{y^2+1} =: g(x)p(y)$$

แต่สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = 1+xy$$

ไม่เป็นสมการแยกตัวแปรได้ (Why?)

จากแนวคิดของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร x เท่านั้น เราสามารถพิจารณาแนวทางการหาผลเฉลยของสมการแยกตัวแปรได้นี้ดังนี้ สมมติว่าสมการเชิงอนุพันธ์ (2.1) เป็นสมการแยกตัวแปรได้ นั่นคือ

$$\frac{dy}{dx} = g(x)p(y)$$

โดยที่ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ $p(y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y หากเราจัดรูปสมการใหม่โดยให้ฟังก์ชัน $g(x)$ อยู่กับ dx และ $p(y)$ อยู่กับ dy จะได้ว่า

$$\frac{1}{p(y)}dy = g(x)dx$$

ซึ่งต่อไปจะเขียน $p(y) := \frac{1}{h(y)}$ นั่นคือ

$$h(y)dy = g(x)dx$$

จากนั้นหาปริพันธ์ของฟังก์ชันในแต่ละฝั่งจะได้

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

นั่นคือ

$$H(y) + c_1 = G(x) + c_2$$

โดยที่ $H(y)$ และ $G(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $h(y)$ และ $g(x)$ ตามลำดับ และ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ซึ่งส่งผลให้ได้ว่า ผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์ (2.1) คือ

$$H(y) = G(x) + c$$

โดยที่ $c := c_2 - c_1$

สังเกตว่า เราไม่จำเป็นต้องใช้ค่าคงตัวที่เกิดจากการหาปริพันธ์ทั้งสองตัวดังข้างต้น เพราะในที่สุดแล้ว เรามักนำค่าคงตัวที่ได้ดังกล่าวนั้นมาเขียนเป็นค่าคงตัวใด ๆ อีกครั้งเสมอ

วิธีการหาผลเฉลยของสมการแยกตัวแปรได้

1. จัดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูป

$$h(y)dy = g(x)dx$$

2. หาปริพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

จะได้ ผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูป

$$H(y) = G(x) + c$$

ตัวอย่าง 2.1 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-5}{y^2}$$

วิธีทำ จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ เราจัดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ใหม่ได้เป็น

$$y^2dy = (x-5)dx$$

ทำการหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้

$$\int y^2 dy = \int (x-5)dx$$

ดังนั้น ผลเฉลยโดยปริยายของสมการแยกตัวแปรได้ คือ

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 5x + c$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ซึ่งจัดรูปสมการได้เป็น

$$y^3 = \frac{3x^2}{2} - 15x + c_1$$

โดยที่ $c_1 := 3c$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

การหาผลเฉลยของสมการแยกตัวแปรได้นั้นมักอาศัยการคำนวณหาปริพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้ความรู้เรื่องเทคนิคการหาปริพันธ์ที่ผู้เรียนได้ศึกษามาก่อนหน้านี้แล้ว (เคาะสนิมด่วน!) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.2 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+3}$$

วิธีทำ จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ เราจัดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ใหม่ได้เป็น

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x+3}dx$$

ทำการหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x+3}dx$$

ทำให้ได้ว่า

$$\ln|y| = \ln|x+3| + c$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ นั่นคือ

$$y = |y| = e^{\ln|x+3|+c} = e^{\ln|x+3|} \cdot e^c = |x+3| \cdot e^c$$

หรือ

$$y = |x+3| \cdot e^c$$

พิจารณา ถ้า $x \geq -3$ แล้ว $|x+3| = x+3$ และในอีกด้านหนึ่ง ถ้า $x < -3$ แล้ว จะได้ว่า $|x+3| = -(x+3)$ ทำให้ได้ว่า

$$y = \pm e^c(x+3)$$

เพราะฉะนั้น กำหนดให้ $c_1 := \pm e^c$ ซึ่งเป็นค่าคงตัวใด ๆ จะได้ว่า

$$y = c_1(x+3)$$

เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ ■

หมายเหตุ 2.1 จากตัวอย่างข้างต้น จะพบว่าเราต้องทำการหาปริพันธ์ที่ได้ผลลัพท์ในรูปของฟังก์ชันลอการิทึม ซึ่งในสถานการณ์นี้เราอาจเขียนค่าคงตัวใด ๆ ที่ได้จากการหาปริพันธ์ในรูปลอการิทึม $\ln|c|$ แทนได้ กล่าวคือ การหาปริพันธ์

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x+3} dx$$

ทำให้ได้ว่า

$$\ln|y| = \ln|x+3| + \ln|c|$$

หรือ

$$\ln|y| = \ln|c(x+3)|$$

และทำให้ได้ทันทีว่า

$$y = c(x+3)$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ซึ่งเท่ากับผลเฉลยที่ได้ข้างต้น

ตัวอย่าง 2.3 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y \ln x \frac{dx}{dy} = \frac{(y+1)^2}{x}$$

บนช่วง $(0, +\infty)$

วิธีทำ จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ เราจัดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ใหม่ได้เป็น

$$x \ln x dx = \frac{y^2+2y+1}{y} dy$$

หรือ

$$x \ln x dx = \left(y + 2 + \frac{1}{y} \right) dy$$

ทำการหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้

$$\int x \ln x dx = \int \left(y + 2 + \frac{1}{y} \right) dy$$

การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วนกับพจน์ฝั่งซ้ายมือ และการหาปริพันธ์ผลบวกกับฝั่งขวามือ ทำให้ได้ว่า ผลเฉลยโดยปริยายของสมการแยกตัวแปรได้บนช่วง $(0, +\infty)$ คือ

$$\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{2} + 2y + \ln|y| + c$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ หรือ

$$2x^2 \ln x - x^2 = 2y^2 + 8y + 4\ln|y| + c_1$$

โดยที่ $c_1 := 4c$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

ตัวอย่าง 2.4 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{x^2-1}, \quad y(2) = 2$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ตัวอย่าง 2.5 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\left(e^{2y} - y\right)\cos x \frac{dy}{dx} = e^y \sin 2x, \quad y(0) = 0$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ในบางครั้ง เราจะพบว่าผลเฉลยโดยปริยายของสมการแยกตัวแปรได้หนึ่ง ๆ อาจเขียนได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.6 จงหาแสดงว่าวงศ์ของฟังก์ชัน

$$\arctan x + \arctan y = c$$

และ

$$\frac{x+y}{1-xy} = c$$

เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\left(1+y^2\right)dx + \left(1+x^2\right)dy = 0$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

แบบฝึกหัด

จงพิจารณาว่าสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งต่อไปนี้เป็นสมการแยกตัวแปรได้หรือไม่

แบบฝึกหัด 2.1 $\frac{dy}{dx} - \sin(x+y) = 0$

แบบฝึกหัด 2.2 $\frac{dy}{dx} = 4y^2 - 3y + 1$

แบบฝึกหัด 2.3 $\frac{ds}{dt} = t\ln(s^{2t}) + 8t^2$

แบบฝึกหัด 2.4 $\frac{dy}{dx} = \frac{ye^{x+y}}{x^2+2}$

แบบฝึกหัด 2.5 $(xy^2 + 3y^2)dy - 2xdx = 0$

แบบฝึกหัด 2.6 $s^2 + \frac{ds}{dt} = \frac{s+1}{st}$

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 2.7 $\frac{dx}{dt} = 3xt^2$

แบบฝึกหัด 2.8 $x\frac{dy}{dx} = y^{-3}$

แบบฝึกหัด 2.9 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2\sqrt{1+x}}$

แบบฝึกหัด 2.10 $(1+x^2)dy - \sec^2 y dx = 0$

แบบฝึกหัด 2.11 $x\frac{dv}{dx} = \frac{1-4v^2}{3v}$

แบบฝึกหัด 2.12 $\frac{dy}{dx} = e^{2x+3y}$

แบบฝึกหัด 2.13 $y^{-1}dy + ye^{\cos x}\sin x dx = 0$

แบบฝึกหัด 2.14 $(x+xy^2)dx + e^{x^2}ydy = 0$

แบบฝึกหัด 2.15 $e^x y\frac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$

แบบฝึกหัด 2.16 $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2y+3}{4x+5}\right)^2$

แบบฝึกหัด 2.17 $\csc y dx + \sec^2 x dy = 0$

แบบฝึกหัด 2.18 $\left(e^{y}+1\right)e^{-y}dx+\left(e^{x}+1\right)^{3}e^{-x}dy=0$

แบบฝึกหัด 2.19 $x\sqrt{1+y^2}dx=y\sqrt{1+x^2}dy$

แบบฝึกหัด 2.20 $\frac{dN}{dt}+N=Nte^{t+2}$

แบบฝึกหัด 2.21 $\frac{dy}{dx}=\frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$

แบบฝึกหัด 2.22 $\left(e^{x}+e^{-x}\right)\frac{dy}{dx}=y^2$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 2.23 $y'=x^3(1-y), \qquad y(0)=3$

แบบฝึกหัด 2.24 $\frac{dy}{dx}=(1+y)^2\tan x, \qquad y(0)=\sqrt{3}$

แบบฝึกหัด 2.25 $dy=2\sqrt{y+1}\cos x dx, \qquad y(\pi)=0$

แบบฝึกหัด 2.26 $\frac{1}{\theta}\frac{dy}{d\theta}=\frac{y\sin\theta}{y^2+1}, \qquad y(\pi)=1$

แบบฝึกหัด 2.27 $x^2dx+2ydy=0, \qquad y(0)=2$

แบบฝึกหัด 2.28 $t^{-1}\frac{dx}{dt}=2\cos^2 x, \qquad x(0)=\pi/4$

แบบฝึกหัด 2.29 $dv=t^2(1+v)dt, \qquad v(0)=3$

แบบฝึกหัด 2.30 $\sqrt{y}dx+(1+x)dy=0, \qquad y(0)=1$

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง

ในหัวข้อ 1.1 เราได้รู้จักสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น หรือสมการเชิงเส้นมาแล้ว (และน่าจะลืมแล้ว) เพื่อความสะดวก เราจะทบทวนสมการเชิงเส้นในบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.2 (สมการเชิงเส้น)
เราจะเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=b(x) \tag{2.2}$$

โดยที่ $a_1(x), a_0(x)$ และ $b(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เท่านั้น ว่า **สมการเชิงเส้น** (linear equation)

ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์

$$x^2\sin x-(\cos x)y=\sin x\frac{dy}{dx}$$

เป็นสมการเชิงเส้น เพราะว่า เราสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\sin x\frac{dy}{dx}+(\cos x)y=x^2\sin x$$

ได้นั่นเอง อย่างไรก็ตาม สมการเชิงอนุพันธ์

$$y\frac{dy}{dx}+(\sin x)y^3=e^x+1$$

ไม่เป็นสมการเชิงเส้น (Why?)

การหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นสามารถแบ่งพิจารณาเป็นกรณีได้ดังนี้
กรณีที่ 1 ฟังก์ชัน $a_0(x)$ มีค่าเป็นศูนย์ สำหรับทุก x
เนื่องจาก $a_0(x)\equiv 0$ จะได้ว่า สมการเชิงเส้น (2.2) ลดรูปเป็น

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} = b(x)$$

ซึ่งจัดรูปได้เป็น

$$dy = \frac{b(x)}{a_1(x)}dx$$

ซึ่งเป็นสมการแยกตัวแปรได้ ส่งผลให้ได้ว่า

$$y = \int \frac{b(x)}{a_1(x)}dx + c$$

โดยที่ $a_1(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นศูนย์ สำหรับทุก x

กรณีที่ 2 ฟังก์ชัน $a_0(x)$ มีค่าเท่ากับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $a_1(x)$ สำหรับทุก x เนื่องจาก $a_0(x) = a_1'(x)$ จึงได้ว่า

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = a_1(x)y' + a_1'(x)y = \frac{d}{dx}\left[a_1(x)y)\right] \tag{2.3}$$

นั่นคือ สมการเชิงเส้น (2.2) จะอยู่ในรูป

$$\frac{d}{dx}\left[a_1(x)y)\right] = b(x) \tag{2.4}$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$d[a_1(x)y] = b(x)dx$$

ซึ่งเป็นสมการแยกตังแปรได้ (Why?) และเมื่อหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้

$$a_1(x)y = \int b(x)dx + c$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในกรณีนี้อยู่ในรูป

$$y(x) = \frac{1}{a_1(x)}\left[\int b(x)dx + c\right]$$

กรณีทั่วไป โดยปกติแล้วสมการเชิงเส้นมักไม่อยู่ในรูปอย่างง่ายดังสองกรณีที่กล่าวมาข้างต้น อย่างไรก็ตาม เราสามารถจัดรูปสมการเชิงเส้น (2.2) ให้อยู่ในรูป (2.4) ได้ โดยการคูณตลอดทั้งสมการเชิงเส้น (2.2) ด้วยฟังก์ชัน $\mu(x)$ ที่เหมาะสมโดยนัยว่า ทำให้สมการที่เกิดจากการคูณตลอดทั้งสมการเชิงเส้นที่พิจารณาด้วยฟังก์ชัน $\mu(x)$ นี้เป็นสมการแยกตัวแปรได้ ซึ่งต่อไปเราจะเรียกฟังก์ชัน $\mu(x)$ นี้ว่า **ตัวประกอบปริพันธ์** (integrating factor) ของสมการเชิงเส้น (2.2)

การหาฟังก์ชัน $\mu(x)$ ที่เหมาะสมตามข้างต้นนั้น เราจะเริ่มพิจารณาดังนี้ จากสมการเชิงเส้น (2.2) ที่ว่า

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x)$$

การหารตลอดทั้งสมการนี้ด้วย $a_1(x)$ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{b(x)}{a_1(x)}$$

และเมื่อกำหนดให้

$$P(x) := \frac{a_0(x)}{a_1(x)} \qquad \text{และ} \qquad Q(x) := \frac{b(x)}{a_1(x)}$$

จะได้สมการเชิงเส้น

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.5}$$

ซึ่งเราจะเรียกสมการที่เขียนในรูปแบบ (2.5) ว่า **รูปมาตรฐาน** (standard form)

สมมติว่าฟังก์ชัน $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I และสมมติให้ฟังก์ชัน $\mu(x)$ เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้บนช่วง I ดังกล่าวนี้

ทบทวนอีกครั้ง! เป้าหมายของเราคือการหาฟังก์ชัน $\mu(x)$ ที่ทำให้ฝั่งซ้ายมือของสมการเชิงเส้น

$$\mu(x)\frac{dy}{dx}+\mu(x)P(x)y=\mu(x)Q(x) \tag{2.6}$$

เท่ากับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $\mu(x)y$ ดังเช่นการพิจารณาใน (2.3) (Why?)

พิจารณาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $\mu(x)y$ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y]=\mu(x)\frac{dy}{dx}+\mu'(x)y$$

แต่เป้าหมายของเราต้องการให้ได้ว่า

$$\mu(x)\frac{dy}{dx}+\mu(x)P(x)y=\frac{d}{dx}[\mu(x)y]$$

ดังนั้น เราต้องทำให้ได้ว่า

$$\mu(x)\frac{dy}{dx}+\mu(x)P(x)y=\mu(x)\frac{dy}{dx}+\mu'(x)y$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์พจน์ต่อพจน์ จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่า $\mu(x)$ ที่ต้องการนั้นต้องสอดคล้อง

$$\mu(x)P(x)=\mu'(x)$$

หรือ

$$\mu(x)P(x)=\frac{d}{dx}\mu(x) \tag{2.7}$$

เพราะฉะนั้น เพื่อจะหาฟังก์ชัน $\mu(x)$ ที่ต้องการเราต้องหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (2.7) โดยทำการแยกตัวแปรได้เป็น

$$\frac{1}{\mu(x)}d\mu(x) = P(x)dx$$

และ หาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้

$$\ln|\mu(x)| = \int P(x)dx + \ln|c_1|$$

โดยที่ c_1 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ดังนั้น

$$\mu(x) = c_1 e^{\int P(x)dx} \tag{2.8}$$

เป็นฟังก์ชันที่ทำให้ฝั่งซ้ายมือของสมการเชิงเส้น (2.6) เป็นอนุพันธ์ของ $\mu(x)y$ นั่นเอง

เพราะฉะนั้น สมการเชิงเส้น (2.6) จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)Q(x)$$

หรือ

$$d[\mu(x)y] = \mu(x)Q(x)dx$$

ซึ่งเป็นสมการแยกตัวแปรได้ และเมื่อหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการนี้ จะได้

$$\mu(x)y(x) = \int \mu(x)Q(x)dx + c$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ซึ่งทำให้ได้ **ผลเฉลยทั่วไป** (general solution) ของสมการเชิงเส้น (2.5) บนช่วง I เป็น

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)Q(x)dx + c\right]$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

สังเกตว่า เราสามารถพิจารณาตัวประกอบปริพันธ์ $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ ได้โดยไม่ต้องคำนึงถึงค่าคงตัว c_1 ดังสมการ (2.8) (Why?) และจากการพิจารณาข้างต้น เราสามารถสรุปขั้นตอนการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นได้ดังนี้

วิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้น

1. จัดรูปสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปมาตรฐาน

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

และหาช่วง I ที่ฟังก์ชัน $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

2. คำนวณตัวประกอบปริพันธ์ $\mu(x)$ โดย

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

3. คูณตลอดทั้งสมการในรูปมาตรฐานด้วย $\mu(x)$ และระลึกเสมอว่าฝั่งซ้ายมือของสมการคือ $\frac{d}{dx}[\mu(x)y]$ จะได้ว่า

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$$

หรือ

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)Q(x) \tag{2.9}$$

4. ทำการแยกตัวแปรและหาปริพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ (2.9) จากนั้นหารตลอดด้วย $\mu(x)$ จะได้ ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นบนช่วง I คือ

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)Q(x)dx + C\right]$$

ตัวอย่าง 2.7 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้น

$$3\frac{dy}{dx} - y = 1$$

วิธีทำ ในตัวอย่างนี้ เราจะแสดงการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นตามลำดับขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 จากสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้สามารถจัดรูปให้อยู่ในรูปมาตรฐานได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{-1}{3}\right) y = \frac{1}{3}$$

นั่นคือ $P(x) = \frac{-1}{3}$ และ $Q(x) = \frac{1}{3}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-\infty, +\infty)$

ขั้นที่ 2 จากสูตรตัวประกอบปริพันธ์ $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ จะได้ตัวประกอบปริพันธ์สำหรับสมการเชิงเส้นนี้ คือ

$$\mu(x) = e^{\int \left(\frac{-1}{3}\right)dx} = e^{\left(\frac{-x}{3}\right)}$$

ขั้นที่ 3 นำตัวประกอบปริพันธ์ $\mu(x) = e^{\left(\frac{-x}{3}\right)}$ คูณตลอดทั้งสมการเชิงเส้น

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{-1}{3}\right) y = \frac{1}{3}$$

จะได้

$$e^{\left(\frac{-x}{3}\right)}\frac{dy}{dx} + e^{\left(\frac{-x}{3}\right)}\left(\frac{-1}{3}\right) y = e^{\left(\frac{-x}{3}\right)}\frac{1}{3}$$

และเนื่องจากพจน์ฝั่งซ้ายมือของสมการเท่ากับ $\frac{d}{dx}[\mu(x)y]$ จึงได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = e^{\left(\frac{-x}{3}\right)}\frac{1}{3}$$

ขั้นที่ 4 ทำการแยกตัวแปรสมการข้างต้น จะได้

$$d[\mu(x)y] = e^{\left(\frac{-x}{3}\right)}\frac{1}{3}dx$$

และทำการหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้

$$\int d[\mu(x)y] = \int e^{\left(\frac{-x}{3}\right)}\frac{1}{3}dx$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ นั่นคือ

$$\mu(x)y = -e^{\left(\frac{-x}{3}\right)} + c$$

ดังนั้น

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[-e^{\left(\frac{-x}{3}\right)} + c\right]$$

หรือ

$$y = \frac{1}{e^{\left(\frac{-x}{3}\right)}}\left[-e^{\left(\frac{-x}{3}\right)} + c\right]$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นบนช่วง $(-\infty, +\infty)$ คือ

$$y = -1 + ce^{\frac{x}{3}}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

ตัวอย่าง 2.8 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้น

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$$

บนช่วง $(0, +\infty)$

วิธีทำ สมการเชิงเส้นที่กำหนดให้สามารถจัดให้อยู่ในรูปมาตรฐานได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{-4}{x}\right)y = x^5e^x$$

นั่นคือ $P(x) = \frac{-4}{x}$ และ $Q(x) = x^5e^x$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(0, +\infty)$
พิจารณาตัวประกอบปริพันธ์

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int\left(\frac{-4}{x}\right)dx} = e^{-4\ln|x|} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}$$

และเมื่อนำตัวประกอบปริพันธ์ $\mu(x) = x^{-4}$ คูณตลอดทั้งสมการในรูปมาตรฐาน จะได้

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} + x^{-4}\left(\frac{-4}{x}\right)y = x^{-4}x^5e^x$$

เนื่องจากฝั่งซ้ายมือของสมการเท่ากับ $\frac{d}{dx}[\mu(x)y]$ จึงได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[x^{-4}y] = xe^x$$

ทำการแยกตัวแปรและหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้

$$\int d[x^{-4}y] = \int xe^x dx$$

นั่นคือ

$$x^{-4}y = xe^x - e^x + c$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นบนช่วง $(0, +\infty)$ คือ

$$y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

สังเกตว่า การจัดรูปสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปมาตรฐาน เราต้องทำการหารตลอดทั้งสมการด้วย $a_1(x)$ ซึ่งส่งผลให้สมการเชิงเส้นดังกล่าวนิยามได้บนช่วง I เมื่อ $a_1(x) \neq 0$ สำหรับทุก $x \in I$ ทั้งนี้ เราจะเรียก x ที่ทำให้ $a_1(x) = 0$ ว่า **จุดเอกฐาน** (singular point) ของสมการเชิงเส้น จากตังอย่างข้างต้น จะพบว่า $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานของสมการเชิงเส้น $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$ นั่นเอง

ตัวอย่าง 2.9 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้น

$$(x^2-4)\frac{dy}{dx}+xy=0$$

วิธีทำ สมการเชิงเส้นที่กำหนดให้สามารถจัดให้อยู่ในรูปมาตรฐานได้เป็น

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{x^2-4}\right)y=0$$

นั่นคือ $P(x)=\frac{1}{x^2-4}$ และ $Q(x)=0$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$ และ $(2,+\infty)$ และในที่นี้ เราจะพิจารณาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นบนช่วง $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ เท่านั้น (Why?)

พิจารณาตัวประกอบปริพันธ์

$$\mu(x)=e^{\int P(x)dx}=e^{\int\frac{1}{x^2-4}dx}=e^{\frac{1}{2}\ln|x^2-4|}=e^{\ln(x^2-4)^{1/2}}=\sqrt{x^2-4}$$

และเมื่อนำตัวประกอบปริพันธ์ $\mu(x)=\sqrt{x^2-4}$ คูณตลอดทั้งสมการในรูปมาตรฐาน จะได้

$$\sqrt{x^2-4}\frac{dy}{dx}+\sqrt{x^2-4}\left(\frac{1}{x^2-4}\right)y=0$$

เนื่องจากฝั่งซ้ายมือของสมการเท่ากับ $\frac{d}{dx}[\mu(x)y]$ จึงได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[\sqrt{x^2-4}y]=0$$

ทำการแยกตัวแปรและหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้

$$\int d[\sqrt{x^2-4}y]=\int 0dx$$

นั่นคือ

$$\sqrt{x^2-4}y = c$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นบนช่วง $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ คือ

$$y = \frac{c}{\sqrt{x^2-4}}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

จากตัวอย่างข้างต้น จะพบว่า ± 2 เป็นจุดเอกฐานของสมการเชิงเส้น นอกจากนี้จะเห็นได้ว่าตัวประกอบปริพันธ์จะหาได้เมื่อ $x \notin (-2,2)$ เราจึงพิจารณาการผลเฉลยของสมการเชิงเส้นในตัวอย่างนี้บนช่วง $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ เท่านั้น

ตัวอย่าง 2.10 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x, \qquad y(0) = -3$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

สังเกตว่า สมการเชิงอนุพันธ์หนึ่งอาจไม่เป็นสมการเชิงเส้นบนตัวแปรหนึ่ง แต่อาจเป็นสมการเชิงเส้นบนอีกตัวแปรหนึ่งก็ได้ ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.11 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y^2}$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ในบางครั้งฟังก์ชัน $P(x)$ และ $Q(x)$ ในสมการเชิงเส้นอาจเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง[1] ซึ่งในกรณีนี้เราสามารถหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นหรือปัญหาค่าเริ่มต้นได้โดยการแยกหาผลเฉลยเป็นช่วงตามที่ฟังก์ชันดังกล่าวนิยามได้ ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

[1] บทนิยาม 6.3

ตัวอย่าง 2.12 จงหาผลเฉลยทั่วไปของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx}+y=Q(x), \qquad y(0)=0$$

โดยที่ $Q(x)=\begin{cases} 1, & 0\leq x\leq 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นต่อไปนี้ (บนช่วงที่เหมาะสม)

แบบฝึกหัด 2.31 $2\frac{dy}{dx}+10y=0$

แบบฝึกหัด 2.32 $\frac{dy}{dx}=y+e^x$

แบบฝึกหัด 2.33 $t^2\frac{ds}{dt}+ts=1$

แบบฝึกหัด 2.34 $xdy=(x\sin x-y)dx$

แบบฝึกหัด 2.35 $(1+x^2)dy+(xy+x^3+x)dx=0$

แบบฝึกหัด 2.36 $\cos x\frac{dy}{dx}+y\sin x=1$

แบบฝึกหัด 2.37 $x^2y'+x(x+2)y=e^x$

แบบฝึกหัด 2.38 $\cos^2 x\sin x dy+(y\cos^3 x-1)dx=0$

แบบฝึกหัด 2.39 $ydx+(xy+2x-ye^y)dy=0$

แบบฝึกหัด 2.40 $ydx-4(x+y^6)dy=0$

แบบฝึกหัด 2.41 $(x+1)y'+(x+2)y=2xe^{-x}$

แบบฝึกหัด 2.42 $(x^2-1)y'+2y=(x+1)^2$

แบบฝึกหัด 2.43 $xy'+(1+x)y=e^{-x}\sin 2x$

แบบฝึกหัด 2.44 $(x+2)^2\frac{dy}{dx}=5-8y-4xy$

แบบฝึกหัด 2.45 $\frac{dr}{d\theta}+r\sec\theta=\cos\theta$

แบบฝึกหัด 2.46 $x\frac{dy}{dx}+3(y+x^2)=\frac{\sin x}{x}$

แบบฝึกหัด 2.47 $(1+x^2)\frac{dy}{dx}-xy^2=(1+x)\sqrt{1-x^2}$

แบบฝึกหัด 2.48 $t\frac{dQ}{dt}+Q=t^4\ln t$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้ (บนช่วงที่เหมาะสม)

แบบฝึกหัด 2.49 $\frac{dx}{dt}+5t=20, \qquad y(0)=2$

แบบฝึกหัด 2.50 $y'=2y+x(e^{3x}-e^{2x}), \qquad y(0)=2$

แบบฝึกหัด 2.51 $\frac{dy}{dx}-x=2y^2, \qquad y(1)=5$

แบบฝึกหัด 2.52 $y'+(\tan x)y=\cos^2 x, \qquad y(0)=-1$

แบบฝึกหัด 2.53 $(x+1)\frac{dv}{dx}+v=\ln x, \qquad v(1)=0$

แบบฝึกหัด 2.54 $x(x-2)y'+2y=0, \qquad y(3)=6$

แบบฝึกหัด 2.55 $(\sin x)y'+(\cos x)y=0, \qquad y(-\pi/2)=1$

แบบฝึกหัด 2.56 $\frac{ds}{st}=\frac{s}{s-t}, \qquad s(5)=2$

แบบฝึกหัด 2.57 จงหาผลเฉลยทั่วไปของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx}+y=Q(x), \qquad y(0)=1$$

โดยที่ $Q(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ -1, & x>1\end{cases}$

แบบฝึกหัด 2.58 จงหาผลเฉลยทั่วไปของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx}+2y=Q(x), \qquad y(0)=0$$

โดยที่ $Q(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$

แบบฝึกหัด 2.59 จงหาผลเฉลยทั่วไปของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=Q(x), \qquad y(0)=0$$

โดยที่ $Q(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x, & x > 1 \end{cases}$

แบบฝึกหัด 2.60 จงหาผลเฉลยทั่วไปของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 4x, \qquad y(0) = 3$$

โดยที่ $P(x) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{-2}{x}, & x > 1 \end{cases}$

2.3 สมการเชิงอนุพันธ์แม่นตรง

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$$ydx+xdy=0$$

จะพบว่าสมการนี้เป็นสมการแยกตัวแปรได้ และหากลองพิจารณาพจน์ในฝั่งซ้ายมือของสมการนี้ จะพบว่ามีค่าเท่ากับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $F(x,y)=xy$ นั่นคือ

$$\frac{d}{dx}[xy]=x\frac{dy}{dx}+y\frac{dx}{dx}$$

หรือ

$$d[xy]=ydx+xdy$$

นั่นเอง

จากข้อสังเกตข้างต้น ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่อยู่ในรูป

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

โดยการพิจารณาว่า นิพจน์เชิงอนุพันธ์ (differential expression)

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

มีค่าเท่ากับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $F(x,y)$ บางฟังก์ชันหรือไม่ ซึ่งถ้าเราทราบว่านิพจน์เชิงอนุพันธ์ $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ เป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $F(x,y)$ แล้ว เราจะสามารถสร้างฟังก์ชัน F ได้โดยอาศัยการหาปริพันธ์นั่นเอง

ในอีกด้านหนึ่ง พิจารณาฟังก์ชัน $F(x,y)$ ของตัวแปร x และ y ที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งมีความต่อเนื่องบนบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก R บนระนาบ xy จะพบว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน F คือ

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy \tag{2.10}$$

กล่าวคือ พิจารณาวงศ์ของฟังก์ชัน $F(x,y) = c$ โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ถ้าเราหาอนุพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้ว่า สมการ (2.10) เขียนได้เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \tag{2.11}$$

หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ วงศ์ของฟังก์ชัน $F(x,y) = c$ โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์ (2.11) (Why?) ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ $x^2 - 5xy + y^3 = c$ เราพบว่า

$$d[x^2 - 5xy + y^3] = (2x - 5y)dx + (-5x + 3y^2)dy$$

ซึ่งทำให้ได้ว่าวงศ์ของฟังก์ชัน $x^2 - 5xy + y^3 = c$ โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(2x - 5y)dx + (-5x + 3y^2)dy = 0 \tag{2.12}$$

แน่นอนว่า ถ้ามีสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

เราอาจจะไม่สามารถหาฟังก์ชัน $F(x,y)$ ที่อนุพันธ์ของ F เท่ากับนิพจน์ทางฝั่งซ้ายมือของ (2.11) ได้โดยง่าย

ดังนั้น เป้าหมายหลักของหัวข้อนี้คือ ถ้ามีสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น (2.12) เราจะทำอย่างไรให้นิพจน์เชิงอนุพันธ์ $(2x-5y)dx + (-5x+3y^2)dy$ เขียนอยู่ในรูปอนุพันธ์ของบางฟังก์ชัน เช่น $d[x^2 - 5xy + y^3]$ ได้ ซึ่งจะส่งผลให้ได้ว่า ผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์ในสมการ (2.12) คือ $x^2 - 5xy + y^3 = c$ นั่นเอง

ในลำดับแรกนี้ เราจำเป็นต้องรู้จักบทนิยามเบื้องต้นดังนี้

บทนิยาม 2.3 (สมการแม่นตรง)
พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

(i) เราจะเรียกนิพจน์เชิงอนุพันธ์

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

ว่า **นิพจน์เชิงอนุพันธ์แม่นตรง** (exact differential expression) บนบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก R ถ้า มีฟังก์ชัน $F(x,y)$ ที่ทำให้

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = M(x,y) \text{ และ } \frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = N(x,y)$$

สำหรับทุก $(x,y) \in R$
(ii) ถ้า $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ เป็นนิพจน์เชิงอนุพันธ์แม่นตรง แล้ว เราจะเรียกสมการเชิงอนุพันธ์

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

ว่า **สมการแม่นตรง** (exact equation)

ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์

$$x^2y^3dx + x^3y^2dy = 0$$

เป็นสมการแม่นตรง เพราะว่า เราสามารถหาฟังก์ชัน $F(x,y) := \frac{1}{3}x^3y^3$ ที่ทำให้

$$d\left[\frac{1}{3}x^3y^3\right] = x^2y^3dx + x^3y^2dy$$

และถ้ากำหนดให้ $M(x,y) := x^2y^3$ และ $N(x,y) := x^3y^2$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ในทฤษฎีบทต่อไปนี้ จะแสดงว่าการเท่ากันของอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial M}{\partial y}$ และ $\frac{\partial N}{\partial x}$ ข้างต้นนี้ เป็นเงื่อนไขจำเป็นสำหรับความแม่นตรงของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วย

ทฤษฎีบท 2.1 (เงื่อนไขจำเป็น-เพียงพอสำหรับสมการแม่นตรง) [a]
ให้ R เป็นบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากบนระนาบ xy และกำหนดให้ $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งมีความต่อเนื่องบนบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก R จะได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

เป็นสมการแม่นตรงบน R ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

สำหรับทุก $(x,y) \in R$

[a] ทฤษฎีบทนี้ถูกพิสูจน์ครั้งแรกโดย เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) (ค.ศ. 1707 - 1783) ในปี ค.ศ. 1734

การพิสูจน์ สมมติให้สมการเชิงอนุพันธ์

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

เป็นสมการแม่นตรงบน R นั่นคือ จะมีฟังก์ชัน $F(x,y)$ ที่ทำให้

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = M(x,y) \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = N(x,y)$$

สำหรับทุก $(x,y) \in R$

เนื่องจาก $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งมีความต่อเนื่องบนบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก R จึงได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

สำหรับทุก $(x,y) \in R$

ในอีกหน้าหนึ่ง พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.13}$$

และสมมติว่า

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y) \tag{2.14}$$

สำหรับทุก $(x,y) \in R$ เราจะพิสูจน์ว่าสมการ (2.13) เป็นสมการแม่นตรงบน R โดยการแสดงว่ามีฟังก์ชัน $F(x,y)$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = M(x,y) \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = N(x,y) \tag{2.15}$$

สำหรับทุก $(x,y) \in R$

เนื่องจากเราต้องการแสดงว่ามีฟังก์ชัน $F(x,y)$ ที่สอดคล้อง (2.15) ในลำดับแรกนี้ พิจารณาการหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของพจน์แรกใน (2.15) เทียบตัวแปร x จะได้

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \tag{2.16}$$

โดยที่ $g(y)$ แทนค่าคงที่ได้จากการหาปริพันธ์ [สังเกตว่า ในทีนี้เราใช้ฟังก์ชัน $g(y)$ ของตัวแปร y เป็นค่าคงตัวที่ได้จากการหาปริพันธ์แทนที่ค่าคงตัว c ใด ๆ เพราะว่า

เมื่อเราทำการหาปริพันธ์เทียบตับแปร x โดยให้ y เป็นค่าคงตัว ส่งผลให้ค่าคงตัวที่ได้จากการหาปริพันธ์อาจขึ้นอยู่กับตัวแปร y ได้]

ทบทวนอีกครั้ง เป้าหมายของเราคือการหาฟังก์ชัน $F(x,y)$ ที่สอดคล้อง (2.15) และเราสามารถคาดการณ์ได้ว่าฟังก์ชัน $F(x,y)$ ดังกล่าวนี้คือ ฟังก์ชัน $F(x,y)$ ในสมการ (2.16) ดังนั้น ในลำดับนี้ เราจะต้องหาฟังก์ชัน $g(y)$ ก่อนนั่นเอง

พิจารณาการอนุพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการ (2.16) เทียบตัวแปร y จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) + g'(y)$$

[เนื่องจาก $g(y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เราสามารถเขียน $g'(y)$ แทน $\frac{\partial}{\partial y}g(y)$ ได้]

เนื่องจาก เราต้องการหาฟังก์ชัน $F(x,y)$ ที่สอดคล้อง $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = N(x,y)$ ส่งผลให้ฟังก์ชัน $g(y)$ ที่ต้องการจะต้องสอดคล้องกับสมการ

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) \tag{2.17}$$

ด้วย สังเกตว่า เราสามารถหาฟังก์ชัน $g(y)$ ได้โดยการหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการ (2.17) เทียบตัวแปร y นั่นเอง อย่างไรก็ตาม ข้อสังเกตที่สำคัญมากคือ เราจำเป็นต้องยืนยันให้ได้ว่า $g'(y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เท่านั้น [มิเช่นนั้น เมื่อทำการหาปริพันธ์เทียบตับแปร y โดยให้ x เป็นค่าคงตัว อาจส่งผลให้ค่าคงตัวที่ได้จากการหาปริพันธ์นั้นขึ้นอยู่กับตัวแปร x ได้]

[การแสดงว่า $g'(y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เท่านั้น สามารถทำได้โดยการหาอนุพันธ์พจน์ฝั่งขวามือของสมการ (2.17) เทียบตัวแปร x ถ้าพบว่าอนุพันธ์ที่ได้มีค่าเท่ากับศูนย์ เราจะสรุปได้ว่า $g'(y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เท่านั้น ซึ่งส่งผลให้สามารถหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการ (2.17) เทียบตัวแปร y ได้]

พิจารณาอนุพันธ์พจน์ฝั่งขวามือของสมการ (2.17) เทียบตัวแปร x ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)-\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\left(\int M(x,y)dx\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)\\ &= 0\end{aligned}$$

ซึ่งเป็นจริงจากสมมติฐาน (2.14)

เพราะฉะนั้น การหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการ (2.17) เทียบตัวแปร y จะได้ว่า

$$g(y)=\int\left(N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right)dy$$

ส่งผลให้ได้ว่า ฟังก์ชัน $F(x,y)$ ที่ต้องการคือ

$$F(x,y)=\int M(x,y)dx+\int\left(N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right)dy \tag{2.18}$$

ในลำดับสุดท้ายนี้ จะแสดงว่า ฟังชัน $F(x,y)$ ในสมการ (2.18) ทำให้สมการ (2.13) เป็นสมการแม่นตรง ดังนี้

เนื่องจาก $g(y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เท่านั้น จะได้ว่า $\frac{\partial}{\partial x}g(y)=0$ ดังนั้น

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int M(x,y)dx\right)+\frac{\partial}{\partial x}g(y)=M(x,y)$$

และ

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)+g'(y)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)+N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)=N(x,y)\end{aligned}$$

จึงสรุปได้ว่าสมการ (2.13) เป็นสมการแม่นตรง ■

จากการพิสูจน์เงื่อนไขเพียงพอในทฤษฎีบท 2.1 เราสามารถสรุปกระบวนการหาผลเฉลยของสมการแม่นตรงได้ดังนี้

วิธีการหาผลเฉลยของสมการแม่นตรง

1. **ตรวจสอบความแม่นตรง:** จัดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูป

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

(1.1) ตรวจสอบว่าเป็นสมการแม่นตรงโดยใช้ทฤษฎีบท 2.1
(1.2) ถ้าเป็นสมการแม่นตรง แล้วกำหนดให้

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \text{ และ } \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

2. **หาฟังก์ชัน F:** หาปริพันธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ เทียบกับตัวแปร x ซึ่งจะได้ว่า

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \tag{2.19}$$

3. **หาฟังก์ชัน g:**
(3.1) หาอนุพันธ์ย่อยทั้งสองฝั่งของสมการ (2.19) เทียบกับตัวแปร y จากนั้นแทน $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$ จะได้ $g'(y)$ ออกมา
(3.2) หาปริพันธ์ของ $g'(y)$ เทียบกับตัวแปร y จะได้ $g(y)$
(3.3) แทนค่า $g(y)$ ที่ได้ในสมการ (2.19) จะได้ $F(x,y)$
4. **ตอบ:** เมื่อได้ฟังก์ชัน $F(x,y)$ แล้ว จะได้ว่า ผลเฉลยโดยปริยายของสมการแม่นตรง คือ

$$F(x,y) = c$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตัวอย่าง 2.13 จงหาผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(x^2-1)dy+2xydx=0$$

วิธีทำ ในตัวอย่างนี้ เราจะแสดงการหาผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์ตามลำดับขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 ตรวจสอบความแม่นตรง: จากสมการที่กำหนดให้ เราสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$2xydx+(x^2-1)dy=0 \tag{2.20}$$

โดยที่

$$M(x,y)=2xy \quad \text{และ} \quad N(x,y)=x^2-1$$

เนื่องจาก

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}[2xy]=2x$$

และ

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}[x^2-1]=2x$$

นั่นคือ $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ จึงสรุปได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์ (2.20) เป็นสมการแม่นตรง

กำหนดให้

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=M(x,y)=2xy \quad \text{และ} \quad \frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=N(x,y)=x^2-1$$

ขั้นที่ 2 หาฟังก์ชัน F: หาปริพันธ์ของสมการ $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=2xy$ เทียบกับตัวแปร x จะได้ว่า

$$F(x,y)=\int 2xydx+g(y)=x^2y+g(y) \tag{2.21}$$

ขั้นที่ 3 หาฟังก์ชัน g:

(3.1) หาอนุพันธ์ย่อยทั้งสองฝั่งของสมการ (2.21) เทียบกับตัวแปร y จะได้

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y+g(y)\right) = x^2+g'(y)$$

เนื่องจาก $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = x^2-1$ จึงได้ว่า

$$x^2-1 = x^2+g'(y)$$

ดังนั้น

$$g'(y) = -1$$

(3.2) หาปริพันธ์ของ $g'(y)$ เทียบกับตัวแปร y จะได้

$$g(y) = \int(-1)dy = -y$$

(3.3) แทนค่า $g(y)$ ที่ได้ในสมการ (2.21) จะได้

$$F(x,y) = x^2y-y$$

ขั้นที่ 4 ตอบ: จากขั้นที่ 3 (ส่วน 3.3) จึงสรุปได้ว่า ผลเฉลยโดยปริยายของสมการแม่นตรง คือ

$$x^2y-y = c$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

ตัวอย่าง 2.14 จงหาผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(2xy-\sec^2 x)dx+(x^2+2y)dy = 0$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ตัวอย่าง 2.15 จงหาผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(1+e^x y+xe^x y)dx+(xe^x+2)dy=0$$

วิธีทำ เนื่องจากสมการที่กำหนดให้อยู่ในรูปที่ต้องการแล้ว กำหนดให้

$$M(x,y)=1+e^x y+xe^x y \qquad \text{และ} \qquad N(x,y)=xe^x+2$$

เนื่องจาก

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}[1+e^x y+xe^x y]=e^x+xe^x$$

และ

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}[xe^x+2]=xe^x+e^x$$

นั่นคือ $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ จึงสรุปได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการแม่นตรง

กำหนดให้

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=M(x,y)=1+e^x y+xe^x y \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=N(x,y)=xe^x+2$$

การหาปริพันธ์ของสมการ $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=1+e^x y+xe^x y$ เทียบกับตัวแปร x ทำให้ได้ว่า

$$F(x,y)=\int(1+e^x y+xe^x y)dx+g(y)=x+2e^x y+xe^x y+g(y) \qquad (2.22)$$

ในลำดับถัดไปทำการหาอนุพันธ์ย่อยทั้งสองฝั่งของสมการ (2.22) เทียบกับตัวแปร y จะได้

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x+2e^x y+xe^x y+g(y)\right)=2e^x+xe^x+g'(y)$$

เนื่องจาก $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = xe^x + 2$ จึงได้ว่า

$$xe^x + 2 = 2e^x + xe^x + g'(y)$$

ดังนั้น

$$g'(y) = 2 - 2e^x$$

และเมื่อหาปริพันธ์ของ $g'(y)$ เทียบกับตัวแปร y จะได้

$$g(y) = \int (2 - 2e^x)dy = 2y - 2e^x y$$

ซึ่งแทนค่า $g(y)$ ที่ได้ในสมการ (2.22) จะได้

$$F(x,y) = x + xe^x y + 2y$$

เพราะฉะนั้น จึงสรุปได้ว่า ผลเฉลยโดยปริยายของสมการแม่นตรง คือ

$$x + xe^x y + 2y = c$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

เราจะเห็นได้ว่าวิธีการหาผลเฉลยของสมการแม่นตรงนั้นประกอบไปด้วยขั้นตอนที่มีความซับซ้อนพอสมควร และในบางครั้งการหาฟังก์ชัน $F(x,y)$ โดยการหาปริพันธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = M(x,y)$ เทียบกับตัวแปร x (ขั้นตอนที่ 2) อาจทำได้ไม่สะดวกนัก ดังเช่นตัวอย่างข้างต้นที่ต้องทำการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน อย่างไรก็ตาม เราอาจเริ่มต้นด้วยการหาปริพันธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = N(x,y)$ เทียบกับตัวแปร y ก่อนก็ได้ ซึ่งเราจะได้ ฟังก์ชัน

$$F(x,y) = \int N(x,y)dy + h(x)$$

จากนั้นจึงหาฟังก์ชัน $h(x)$ (ขั้นที่ 3 และ 4) โดยการดำเนินการหาอนุพันธ์ย่อยและปริพันธ์เทียบกับตัวแปร x แทน ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.16 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$(\cos x \sin x - xy^2)dx + y(1-x^2)dy = 0, \quad y(0) = 2$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ตัวอย่าง 2.17 จงแสดงว่าสมการเชิงอนุพันธ์

$$(x+y)dx + x\ln x dy = 0$$

ไม่เป็นสมการแม่นตรง อย่างไรก็ตาม จงแสดงว่าเมื่อคูณตัวประกอบปริพันธ์ $\frac{1}{x}$ ตลอดทั้งสมการนี้ ทำให้ได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์ใหม่นี้เป็นสมการแม่นตรง และจงหาผลเฉลยโดยปริยายของสมการแม่นตรงนี้

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

แบบฝึกหัด

จงหาตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้เป็นสมการแม่นตรงหรือไม่ ถ้าเป็นจงหาผลเฉลยโดยปริยายของสมการแม่นตรง

แบบฝึกหัด 2.61 $(2x+4)dx+(3y-1)dy=0$

แบบฝึกหัด 2.62 $(2x+y)dx-(x+6y)dy=0$

แบบฝึกหัด 2.63 $(5x+4y)dx+(4x-8y^3)dy=0$

แบบฝึกหัด 2.64 $(\sin y-y\sin x)dx+(\cos x+x\cos y-y)dy=0$

แบบฝึกหัด 2.65 $(2y^3x-3)dx-(2yx^2+4)dy=0$

แบบฝึกหัด 2.66 $\left(2y-\frac{1}{x}+\cos 3x\right)\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x^2}-4x^3+3y\sin 3x=0$

แบบฝึกหัด 2.67 $(x+y)(x-y)dx+x(x-2y)dy=0$

แบบฝึกหัด 2.68 $\left(1+\ln x+\frac{y}{x}\right)dx-(1-\ln x)dy=0$

แบบฝึกหัด 2.69 $(y^3-y^2\sin x-x)dx+(3xy^2+2y\cos x)dy$

แบบฝึกหัด 2.70 $(x^3+y^3)dx+3xy^2dy=0$

แบบฝึกหัด 2.71 $(y\ln y-e^{-xy})dx+\left(\frac{1}{y}+x\ln y\right)dy=0$

แบบฝึกหัด 2.72 $\frac{2x}{y}dx-\frac{x^2}{y^2}dy=0$

แบบฝึกหัด 2.73 $x\frac{dy}{dx}=2xe^x-y+6x^2$

แบบฝึกหัด 2.74 $(3x\cos 3x+\sin 3x-3)dx+(2y+5)dy=0$

แบบฝึกหัด 2.75 $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(ye^y+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 2.76 $(x+y)^2dx+(2xy+x^2-1)dy, \qquad y(1)=1$

แบบฝึกหัด 2.77 $(e^x+y)dx+(2+x+ye^y)dy=0, \qquad y(0)=1$

แบบฝึกหัด 2.78 $\left(\frac{1}{1+y^2}+\cos x-2xy\right)\frac{dy}{dx}=y(y+\sin x), \qquad y(0)=1$

แบบฝึกหัด 2.79 $\left(\frac{1}{x}+2y^x\right)dx+(2yx^2-\cos y)dy=0, \qquad y(1)=\pi$

แบบฝึกหัด 2.80 $(\tan y-2)dx+(x\sec^2 y+y^{-1})dy=0, \qquad y(0)=1$

แบบฝึกหัด 2.81 $(y^2\sin x)dx+\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{x}\right)dy=0, \qquad y(\pi)=1$

แบบฝึกหัด 2.82 $\left(\frac{3y^2-t^2}{y^5}\right)\frac{dy}{dt}+\frac{t}{2y^4}, \qquad y(1)=1$

แบบฝึกหัด 2.83 จงแสดงว่าทุกสมการแยกตัวแปรได้เป็นสมการแม่นตรง

แบบฝึกหัด 2.84 จงหาฟังก์ชัน $M(x,y)$ ที่ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์

$$M(x,y)dx+\left(xe^{xy}+2xy+\frac{1}{x}\right)dy=0$$

เป็นสมการแม่นตรง

แบบฝึกหัด 2.85 จงหาฟังก์ชัน $N(x,y)$ ที่ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์

$$\left(y^{1/2}x^{-1/2}+\frac{x}{x^2+y}\right)dx+N(x,y)dy=0$$

เป็นสมการแม่นตรง

2.4 ตัวประกอบปริพันธ์

พิจารณาสมการเชิงเส้น

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

ซึ่งเขียนในรูปนิพจน์เชิงอนุพันธ์ได้เป็น

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0 \tag{2.23}$$

สังเกตว่า สมการนี้ไม่เป็นสมการแม่นตรง (Why?)

อย่างไรก็ตาม เมื่อนำตัวประกอบปริพันธ์ $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ คูณทั้งสองฝั่งของสมการ (2.23) จะได้ว่า

$$[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)]dx + \mu(x)dy = 0$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)] = \mu(x)P(x)$$

และ

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\int P(x)dx}\right) = P(x)e^{\int P(x)dx} = \mu(x)P(x)$$

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่าสมการ

$$[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)]dx + \mu(x)dy = 0$$

เป็นสมการแม่นตรง

จากแนวคิดข้างต้นนี้ เราจะวิเคราะห์หาฟังก์ชันที่ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์เป็นสมการแม่นตรงได้ โดยเริ่มต้นจากบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.4 (ตัวประกอบปริพันธ์)
พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{2.24}$$

ที่ไม่เป็นสมการแม่นตรง เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน $\mu(x,y)$ เป็น **ตัวประกอบปริพันธ์** (integrating factor) สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ (2.24) ถ้านำฟังก์ชัน $\mu(x,y)$ คูณตลอดทั้งสมการเชิงอนุพันธ์ (2.24) แล้วทำให้สมการเชิงอนุพันธ์

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0 \tag{2.25}$$

เป็นสมการแม่นตรง

ตัวอย่าง 2.18 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\mu(x,y) = y^2$ เป็นตัวประกอบปริพันธ์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์

$$6xydx+(4y+9x^2)dy=0$$

วิธีทำ จากสมการเชิงอนุพันธ์ กำหนดให้

$$M(x,y)=6xy \qquad \text{และ} \qquad N(x,y)=4y+9x^2$$

เนื่องจาก

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}[6xy]=6x$$

และ

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}[4y+9x^2]=18x$$

นั่นคือ $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)\neq\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ จึงสรุปได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์นี้ไม่เป็นสมการแม่นตรง

พิจารณา การนำฟังก์ชัน $\mu(x,y)=y^2$ คูณตลอดทั้งสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ ทำให้ได้ว่า

$$6xy^3dx+(4y^3+9x^2y^2)dy=0$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}[6xy^3] = 18xy^2$$

และ

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[4y^3 + 9x^2y^2] = 18xy^2$$

นั่นคือ $\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)N(x,y)$ เพราะฉะนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ใหม่นี้เป็นสมการแม่นตรง จึงสรุปได้ว่าฟังก์ชัน $\mu(x,y) = y^2$ เป็นตัวประกอบปริพันธ์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ ■

ตัวอย่าง 2.19 จงแสดงว่า $\mu(x,y) = xy^2$ เป็นตัวประกอบปริพันธ์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์

$$(2y-6x)dx + (3x-4x^2y^{-1})dy = 0$$

และจงใช้ตัวประกอบปริพันธ์นี้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

จากตัวอย่างข้างต้น สังเกตว่า $\mu(x,y)$ มีบทบาทสำคัญในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นสมการแม่นตรงอย่างมาก (Why?) อย่างไรก็ตาม คำถามที่ตามมาคือ ถ้าไม่มีการกำหนด $\mu(x,y)$ มาให้ แล้วจะหา $\mu(x,y)$ ได้อย่างไร

กำหนดให้ $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งมีความต่อเนื่องบนบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก R สมมติให้ $\mu(x,y)$ เป็นตัวประกอบปริพันธ์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

นั่นคือ สมการเชิงอนุพันธ์

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

เป็นสมการแม่นตรง และทำให้ได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x,y)M(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x,y)N(x,y)]$$

สังเกตว่าสมการข้างต้นนี้อยู่ในรูปอนุพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชัน นั่นคือ

$$\mu(x,y)\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)+M(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)=\mu(x,y)\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)+N(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)$$

หรือ

$$M(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)-N(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)=\mu(x,y)\left[\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)\right] \quad (2.26)$$

อย่างไรก็ตาม ข้อจำกัดสำคัญคือ เราไม่สามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (2.26) นี้ได้ (Why?) ดังนั้น เพื่อที่จะวิเคราะห์ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ เราจะแยกพิจารณาเป็น 2 กรณีดังนี้

สมมติให้ $\mu(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เท่านั้น นั่นคือ $\mu(x,y)=\mu(x)$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x)=\frac{d}{dx}\mu(x) \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)=0$$

ส่งผลให้สมการเชิงอนุพันธ์ (2.26) กลายเป็น

$$-N(x,y)\frac{d}{dx}\mu(x)=\mu(x)\left[\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)\right]$$

หรือ

$$\frac{d}{dx}\mu(x)=\mu(x)\left[\frac{\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)}{N(x,y)}\right]$$

และหากสมมติว่า $\frac{\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)}{N(x,y)}$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เท่านั้น จะได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการแยกตัวแปรได้ (และเป็นสมการเชิงเส้น) ดังนั้น

$$\mu(x) = \exp\left[\int \left(\frac{\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)}{N(x,y)}\right) dx\right]$$

(Verify?)

ในทำนองเดียวกัน ถ้าสมมติให้ $\mu(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เท่านั้น และสมมติว่า $\frac{\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)}{M(x,y)}$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เท่านั้น จะได้ว่า

$$\mu(y) = \exp\left[\int \left(\frac{\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)}{M(x,y)}\right) dy\right]$$

(Verify?)

จากการวิเคราะห์ข้างต้น เราสามารถสรุปวิธีการหาตัวประกอบปริพันธ์ได้ดังนี้

วิธีการหาตัวประกอบปริพันธ์

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

ที่ไม่เป็นสมการแม่นตรง โดยที่ $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งมีความต่อเนื่องบนบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก R

1. ถ้า $\frac{\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)}{N(x,y)}$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เท่านั้น แล้วตัวประกอบปริพันธ์

$$\mu(x) = \exp\left[\int \left(\frac{\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)}{N(x,y)}\right) dx\right]$$

2. ถ้า $\frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)}$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เท่านั้น แล้วตัวประกอบปริพันธ์

$$\mu(y) = \exp\left[\int \left(\frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)}\right) dy\right]$$

กล่าวโดยสรุป ถ้ามีสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นสมการแม่นตรง และสามารถตรวจสอบได้ว่านิพจน์ $\frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เท่านั้น หรือนิพจน์ $\frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M(x,y)}$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เท่านั้นอย่างใดอย่างหนึ่ง แล้วเราสามารถทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าวเป็นสมการแม่นตรงได้โดยการพิจารณาตัวประกอบปริพันธ์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์นั้น จากนั้นเราสามารถหาผลเฉลยของสมการดังกล่าวนั้นโดยกระบวนการหาผลเฉลยของสมการแม่นตรง

อย่างไรก็ตาม เมื่อหาผลเฉลยของสมการแม่นตรงที่เกิดจากการคูณสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ด้วยตัวประกอบปริพันธ์ ต้องทำตรวจสอบว่าผลเฉลยดังกล่าวนั้นเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ด้วยเสมอ ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.20 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(2x^2+y)dx+(x^2y-x)dy=0$$

วิธีทำ จากสมการเชิงอนุพันธ์ กำหนดให้

$$M(x,y)=2x^2+y \qquad \text{และ} \qquad N(x,y)=x^2y-x$$

เนื่องจาก

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}[2x^2+y]=1$$

และ

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}[x^2y-x]=2xy-1$$

นั่นคือ $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)\neq\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ จึงสรุปได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ไม่เป็นสมการแม่นตรง

พิจารณา การหาตัวประกอบปริพันธ์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้ เนื่องจาก $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=1$ และ $\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=2xy-1$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ส่งผลให้

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)}{N(x,y)}=\frac{1-(2xy-1)}{x^2y-x}=\frac{-2(1-xy)}{x(1-xy)}=\frac{-2}{x}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เท่านั้น จึงได้ว่า ตัวประกอบปริพันธ์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ คือ

$$\mu(x)=\exp\left[\int\left(\frac{\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)}{N(x,y)}\right)dx\right]=\exp\left[\int\left(\frac{-2}{x}\right)dx\right]=x^{-2}$$

ดังนั้น การนำฟังก์ชัน $\mu(x,y)=y^2$ คูณตลอดทั้งสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ทำให้ได้ว่า

$$(2+yx^{-2})dx+(y-x^{-1})dy=0 \tag{2.27}$$

นั่นคือ

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}[2+yx^{-2}]=x^{-2}$$

และ

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}[y-x^{-1}]=x^{-2}$$

เนื่องจาก $\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)N(x,y)$ เพราะฉะนั้นสมการ (2.27) เป็นสมการแม่นตรง

กำหนดให้

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=2+yx^{-2} \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=y-x^{-1}$$

การหาปริพันธ์ของสมการ $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=2+yx^{-2}$ เทียบกับตัวแปร x ทำให้ได้ว่า

$$F(x,y)=\int(2+yx^{-2})dx+g(y)=2x-yx^{-1}+g(y) \tag{2.28}$$

ในลำดับถัดไปทำการหาอนุพันธ์ย่อยทั้งสองฝั่งของสมการ (2.28) เทียบกับตัวแปร y จะได้

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - yx^{-1} + g(y)\right) = -x^{-1} + g'(y)$$

เนื่องจาก $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = y - x^{-1}$ จึงได้ว่า

$$y - x^{-1} = -x^{-1} + g'(y)$$

ดังนั้น

$$g'(y) = y$$

และเมื่อหาปริพันธ์ของ $g'(y)$ เทียบกับตัวแปร y จะได้

$$g(y) = \int (y)dy = \frac{y^2}{2}$$

ซึ่งแทนค่า $g(y)$ ที่ได้ในสมการ (2.28) จะได้

$$F(x,y) = 2x - yx^{-1} + \frac{y^2}{2}$$

เพราะฉะนั้น จึงสรุปได้ว่า ผลเฉลยโดยปริยายของสมการแม่นตรง คือ

$$2x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = c$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

พิจารณาการตรวจคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้ เนื่องจากผลเฉลยโดยปริยายของสมการแม่นตรง คือ $2x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = c$ นั่นคือ

$$2 - \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2} + y\frac{dy}{dx} = 0$$

หรือ $(2x^2 + y) + (x^2y - x)\frac{dy}{dx} = 0$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้

อย่างไรก็ตาม สังเกตว่า $x \equiv 0$ เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ด้วย (Why?) เพราะฉะนั้น จึงสรุปได้ว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ $2x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = c$ โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ $x \equiv 0$ ■

ตัวอย่าง 2.21 จงหาผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$xydx + (2x^2 + 3y^2 - 20)dy = 0$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 2.86 $2xydx+(y^2-3x^2)dy=0$

แบบฝึกหัด 2.87 $(3x^2+y)dx+(x^2y-x)dy=0$

แบบฝึกหัด 2.88 $(x^4-x+y)dx-xdy=0$

แบบฝึกหัด 2.89 $(2y^2+2y+4x^2)dx+(2xy+x)dy=0$

แบบฝึกหัด 2.90 $(2xy^3+1)dx+(3x^2y^2-y^{-1})dy=0$

แบบฝึกหัด 2.91 $\cos x dx+\left(1+\frac{2}{y}\right)\sin x dy=0$

แบบฝึกหัด 2.92 $(10-6y+e^{-3x})dx-2dy=0$

แบบฝึกหัด 2.93 $(y^2+xy^3)dx+(5y^2-xy+y^3\sin y)dy=0$

แบบฝึกหัด 2.94 จงแสดงว่าสมการเชิงเส้น

$$[P(x)y-Q(x)]dx+dy=0$$

ไม่เป็นสมการแม่นตรง แต่ถ้าคูณตลอดทั้งสมการนี้ด้วยฟังก์ชัน $\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$ แล้ว สมการเชิงอนุพันธ์ที่ได้เป็นสมการแม่นตรง

แบบฝึกหัด 2.95 จงแสดงว่า $x^{a-1}y^{b-1}$ โดยที่ a และ b เป็นค่าคงตัวใด ๆ เป็นตัวประกอบปริพันธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$aydx+bxdy=0$$

2.5 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยวิธีเปลี่ยนตัวแปร

หากสังเกตอย่างถี่ถ้วน จะพบว่าในหัวข้อที่ผ่านมาทั้งหมดนั้น เราสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยพิจารณาว่าสมการเชิงอนุพันธ์นั้นเป็นสมการชนิดใด (สมการแยกตัวแปรได้ สมการเชิงเส้น หรือ สมการแม่นตรง) จากนั้นจึงหาผลเฉลยตามวิธีการของแต่ละรูปแบบของสมการนั้น อย่างไรก็ตาม มีสมการเชิงอนุพันธ์จำนวนมากที่ไม่สามารถจำแนกว่าเป็นสมการที่เราทราบรูปแบบได้ พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

ที่ไม่เป็นสมการแยกตัวแปรได้ ไม่เป็นสมการเชิงเส้น และไม่เป็นสมการแม่นตรง คำถามที่จะเกิดขึ้นแน่นอนคือ เราจะหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ได้อย่างไร (ยังจำได้ไหม) ในหัวข้อที่ผ่านมา หากเราเจอสถานการณ์แบบนี้ เราจะพยายามหาตัวประกอบปริพันธ์ที่มาคูณตลอดทั้งสมการแล้วทำให้สมการที่ได้เป็นสมการแม่นตรง และหาผลเฉลยโดยใช้วิธีการหาผลเฉลยของสมการแม่นตรงนั่นเอง คำถามต่อมาคือ ถ้าไม่สามารถหาตัวประกอบปริพันธ์ได้ แล้วจะหาผลเฉลยได้อย่างไร

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ที่สามารถหาผลเฉลยได้โดยการเปลี่ยนหรือแทนที่ตัวแปร โดยแบ่งเป็นรูปแบบได้ดังต่อไปนี้

2.5.1 สมการเอกพันธุ์

บทนิยาม 2.5 (สมการเอกพันธุ์)
เราจะเรียกสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

ว่า **สมการเอกพันธุ์** (homogeneous equation) ถ้าฟังก์ชัน $f(x,y)$ เขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันของตัวแปร $\frac{y}{x}$ ได้

ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์

$$(x-y)dx + xdy = 0$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x} = \left(\frac{y}{x}\right) - 1$$

นั่นคือ สมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการเอกพันธุ์ อย่างไรก็ตาม สมการเชิงอนุพันธ์

$$(x-2y+1)dx + (x-y)dy = 0$$

สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-2y+1}{y-x} = \frac{1-2\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)-1}$$

สังเกตว่าพจน์ $\frac{1}{x}$ ไม่อยู่ในรูป $\frac{y}{x}$ ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์นี้ไม่เป็นสมการเอกพันธุ์

หมายเหตุ 2.2 สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

เป็นสมการเอกพันธุ์ ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชัน $f(x,y)$ เขียนอนู่ในรูปฟังก์ชันของตัวแปร $\frac{x}{y}$ ได้ (Verify?)

เราจะเห็นได้ว่า การตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้เป็นสมการเอกพันธุ์ตามบทนิยามข้างต้นนั้นอาจทำได้ไม่สะดวก ดังนั้นเราจึงพิจารณาการตรวจสอบการเป็นสมการเอกพันธุ์ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2 *ถ้าฟังก์ชัน $f(x,y)$ สอดคล้องเงื่อนไข*

$$f(tx,ty) = f(x,y) \text{ สำหรับทุก } t \neq 0$$

แล้วสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

เป็นสมการเอกพันธุ์

หมายเหตุ 2.3 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

ถ้ามีจำนวนจริง α และ β ที่ทำให้

$$M(tx,ty) = t^{\alpha}M(x,y)$$

และ

$$N(tx,ty) = t^{\beta}N(x,y)$$

สำหรับทุก $t \neq 0$ ตามลำดับ และได้ว่า $\alpha = \beta$ แล้วสมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการเอกพันธุ์ (Verify?)

ตัวอย่าง 2.22 จงหาตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้เป็นสมการเอกพันธุ์หรือไม่

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$
2. $(x+y)dx + x^2dy = 0$
3. $(x^2+y^2)dx + (x^2-xy)dy = 0$
4. $x\frac{dy}{dx} - y^2 = \sqrt{x^2+y^2}$

5. $y\frac{dy}{dx} = x + 4ye^{\frac{-2x}{y}}$

วิธีทำ 1. กำหนดให้ $t \neq 0$ พิจารณา

$$f(tx,ty) = \frac{ty-tx}{ty+tx} = \frac{t(y-x)}{t(y+x)} = \frac{y-x}{y+x} = f(x,y)$$

นั่นคือ สมการเชิงอนุพันธ์ 1. เป็นสมการเอกพันธุ์

2. กำหนดให้ $t \neq 0$ เนื่องจาก $M(x,y) = x+y$ และ $N(x,y) = x^2$ จึงได้ว่า

$$M(tx,ty) = (tx)+(ty) = t(x+y) = tM(x,y)$$

และ

$$N(tx,ty) = (tx)^2 = t^2x^2 = t^2N(x,y)$$

นั่นคือ $\alpha = 1 \neq 2 = \beta$ จึงสรุปได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์ 2. ไม่เป็นสมการเอกพันธุ์

3. - 5. ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

การหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์สามารถดำเนินการได้ดังนี้ พิจารณาสมการเอกพันธุ์

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

และกำหนดให้

$$u = \frac{y}{x}$$

นั่นคือ จะมีฟังก์ชัน $G(u)$ ของตัวแปร u ที่ทำให้สมการเอกพันธุ์นี้อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = G(u) \tag{2.29}$$

เนื่องจาก $y = ux$ จึงได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[ux] = v + x\frac{du}{dx}$$

และทำให้ได้ว่าสมการเอกพันธุ์ (2.29) จะกลายเป็น

$$u + x\frac{du}{dx} = G(u)$$

ซึ่งเป็นสมการแยกตัวแปรได้ (Why?) ดังนั้น ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$\int \frac{1}{G(u)-u}du = \int \frac{1}{x}dx + c$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ และในลำดับสุดท้าย การแทน $u = \frac{y}{x}$ ทำให้ได้ผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์นั่นเอง

ในทำนองเดียวกันกับการพิจารณาข้างต้น เราสามารถประยุกต์ใช้การเปลี่ยนตัวแปร $v = \frac{x}{y}$ ในการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ได้เช่นกัน (Verify?)

จากการวิเคราะห์ข้างต้น เราสามารถสรุปวิธีการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ได้ดังนี้

วิธีการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์

1. ตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้เป็นสมการเอกพันธุ์
2. กำหนดให้ $u = \frac{y}{x}$ หรือ $v = \frac{x}{y}$ และจัดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นสมการแยกตัวแปรได้
3. หาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการแยกแปรได้ใน 2. จะได้ผลเฉลยโดยปริยายของสมการแยกตัวแปรได้
4. แทน u หรือ v ในผลเฉลยโดยปริยายที่ได้ใน 3. จะได้ผลเฉลยโดยปริยายของสมการเอกพันธุ์

ตัวอย่าง 2.23 จงหาผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(x-y)dx+xdy=0$$

วิธีทำ จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ จะได้ว่า $M(x,y)=x-y$ และ $N(x,y)=x$ สมมติให้ $t\neq 0$ ทำให้ได้ว่า

$$M(tx,ty)=(tx)-(ty)=t(x-y)=tM(x,y)$$

และ

$$N(tx,ty)=tx=tN(x,y)$$

นั่นคือ $\alpha=1=\beta$ จึงสรุปได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการเอกพันธุ์

กำหนดให้ $u=\frac{y}{x}$ นั่นคือ $y=ux$ และ $dy=udx+xdu$ ซึ่งเมื่อแทนในสมการที่กำหนดให้ จะได้ว่า

$$(x-ux)dx+x(udx+xdu)=0$$

หรือจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$du=-\frac{1}{x}dx$$

การหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการทำให้ได้ว่า

$$\int du=\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$

ดังนั้น

$$u=-\ln|x|+\ln|c|$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ซึ่งเมื่อแทน $u=\frac{y}{x}$ จะได้ผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์บนช่วง $(0,+\infty)$ คือ

$$y+x\ln x=cx$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

ตัวอย่าง 2.24 จงหาผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x^3y}{x^4+y^4} = 0$$

วิธีทำ จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ สมมติให้ $t \neq 0$ จะได้ว่า

$$f(tx,ty) = \frac{-2(tx)^3(ty)}{((tx)^4+(ty)^4} = \frac{t^4(-2x^3y)}{(t^4(x^4+y^4)} = \frac{-2x^3y}{x^4+y^4} = f(x,y)$$

จึงสรุปได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการเอกพันธุ์

กำหนดให้ $v = \frac{x}{y}$ นั่นคือ $x = vy$ และ $dx = vdy + ydv$ ซึ่งเมื่อแทนในสมการที่กำหนดให้ จะได้ว่า

$$dy = \frac{-2(vy)^3y}{(vy)^4+y^4}(vdy+ydv)$$

หรือจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\frac{1}{y}dy = -\frac{2v^3}{3v^4+1}dv$$

การหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการทำให้ได้ว่า

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \left(-\frac{2v^3}{3v^4+1}\right)dv$$

ดังนั้น

$$\ln|y| = -\frac{1}{6}\ln|3v^4+1| + \ln|c|$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ซึ่งเมื่อแทน $v = \frac{x}{y}$ จะได้ผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ คือ

$$3x^4y^2 + y^6 = c_1$$

โดยที่ c_1 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

ตัวอย่าง 2.25 จงหาผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(x^2+y^2)dx+(x^2-xy)dy=0$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ตัวอย่าง 2.26 จงหาผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x\frac{dy}{dx}=y+xe^{\frac{y}{x}}$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

2.5.2 สมการแบร์นูลลี

บทนิยาม 2.6 (สมการแบร์นูลลี) เราจะเรียกสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \tag{2.30}$$

ว่า **สมการแบร์นูลลี** (Bernoulli equation) [a]
ถ้า $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ n เป็นจำนวนจริง

[a] สมการแบร์นูลลีถูกนำเสนอครั้งแรกโดย เจมส์ แบร์นูลลี (James Bernoulli) (ค.ศ. 1654 - 1705) และจอห์น เบอร์นูลลี (John Bernoulli) (ค.ศ. 1667 – 1748) ผู้เป็นน้องชายได้นำเสนอการหาผลเฉลยของสมการสมการดังกล่าว ทั้งนี้ ในปี ค.ศ. 1696 กอททฟรีด ไลบ์นิทซ์ (Gottfried Leibnitz) (ค.ศ. 1646 - 1716) ได้แสดงว่าการแทนตัวแปร $v=y^{1-n}$ ทำให้ได้ว่าสมการแบร์นูลลีลดรูปเป็นสมการเชิงเส้น

สังเกตว่า ถ้า $n=0$ หรือ 1 สมการเชิงอนุพันธ์ (2.30) จะลดรูปเป็นสมการเชิงเส้น ซึ่งเราหาผลเฉลยได้โดยวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นในหัวข้อก่อนหน้านี้

สมมติให้ $n \neq 0$ และ $n \neq 1$ การหารตลอดทั้งสมการ (2.30) ด้วย y^n ทำให้ได้ว่า

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x) \tag{2.31}$$

กำหนดให้

$$v=y^{1-n}$$

จะได้ว่า

$$\frac{dv}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

หรือ

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx}$$

ซึ่งเมื่อแทนในสมการ (2.31) จะได้ว่า

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx}+P(x)v=Q(x)$$

นั่นคือ

$$\frac{dv}{dx}+(1-n)P(x)v=(1-n)Q(x)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น จากนั้นเราสามารถหาผลเฉลยของสมการดังกล่าวนี้โดยวิธีการของสมการเชิงเส้นนั่นเอง

จากการวิเคราะห์ข้างต้น เราสามารถสรุปวิธีการหาผลเฉลยของสมการแบร์นูลลีได้ดังนี้

วิธีการหาผลเฉลยของสมการแบร์นูลลี

1. ตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้เป็นสมการแบร์นูลลี
2. กำหนดให้ $v = y^{1-n}$ และจัดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นสมการเชิงเส้น
3. หาผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงเส้นใน 2.
4. แทน v ในผลเฉลยโดยปริยายที่ได้ใน 3. จะได้ผลเฉลยโดยปริยายของสมการแบร์นูลลี

ตัวอย่าง 2.27 จงหาผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$$

บนช่วง $(0, +\infty)$

วิธีทำ จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ จะพบว่าเป็นสมการแบร์นูลลีที่ $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = x$ และ $n = 2$

กำหนดให้ $v = y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1}$ และจะได้ว่า $\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$ หรือ

$$\frac{dy}{dx} = -y^2\frac{dv}{dx}$$

ซึ่งเมื่อแทนในสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ ทำให้ได้ว่า

$$-y^2\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$$

และการหารด้วย $-y^2$ ตลอดทั้งสมการเชิงอนุพันธ์นี้ ส่งผลให้

$$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}\right) = -x$$

นั่นคือ

$$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = -x$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น

พิจารณาการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น ดังนี้

เนื่องจาก

$$e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx} = e^{-\ln x} = x^{-1}$$

จึงได้ว่า

$$x^{-1}\frac{dv}{dx} + x^{-1}\left(-\frac{1}{x}\right)v = x^{-1}(-x)$$

ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}[x^{-1}v] = -1$$

การหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการ ทำให้ได้ว่า

$$x^{-1}v = -x + c$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ เพราะฉะนั้น ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์บนช่วง $(0,+\infty)$ คือ

$$y = \frac{1}{cx - x^2}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

ตัวอย่าง 2.28 จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} - 5y = \frac{-5}{2}xy^3$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

2.5.3 สมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปตัวแปรเชิงเส้น

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = G(ax + by + r) \tag{2.32}$$

เมื่อ $G(ax+by+r)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเชิงเส้น $ax+by+r$ โดยที่ a, b และ r เป็นค่าคงตัว

สังเกตว่า การแทนตัวแปร $u = ax+by+r$ ในสมการ (2.32) จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = G(u) \tag{2.33}$$

และ ยังพบว่า

$$\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

หรือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right)$$

ซึ่งเมื่อแทนในสมการ (2.33) ทำให้ได้ว่า

$$\frac{1}{bG(u)+a}du = dx$$

การหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการข้างต้นนี้ จะได้

$$\int \frac{1}{bG(u)+a}du = \int 1dx$$

ดังนั้น

$$x = \int \frac{1}{bG(u)+a}du + c$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ และเมื่อแทน $u = ax + by + r$ ในผลเฉลยข้างต้นนี้ จะได้ผลเฉลยของสมการ (2.32) ตามลำดับ

จากการวิเคราะห์ข้างต้น เราสามารถสรุปวิธีการหาผลเฉลยของสมการที่อยู่ในรูปตัวแปรเชิงเส้นได้ดังนี้

วิธีการหาผลเฉลยของสมการที่อยู่ในรูปตัวแปรเชิงเส้น

1. กำหนดให้ $u = ax + by + r$ และจัดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นสมการแยกตัวแปรได้
2. หาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการแยกแปรได้ใน 1. จะได้ผลเฉลยโดยปริยายของสมการแยกตัวแปรได้
3. แทน u ในผลเฉลยโดยปริยายที่ได้ใน 2. จะได้ผลเฉลยโดยปริยายของสมการที่อยู่ในรูปตัวแปรเชิงเส้น

ตัวอย่าง 2.29 จงหาผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y-1}$$

วิธีทำ จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ สมมติให้ $u = x + y - 1$ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}$$

และได้อีกว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

ซึ่งเมื่อแทนในสมการที่กำหนดให้ ทำให้ได้ว่า

$$dx = \left(\frac{1}{u} - 1\right) du$$

การหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการข้างต้นนี้ จะได้

$$\int dx = \left(\frac{1}{u} - 1\right) du$$

ดังนั้น

$$x = \ln|u| - u + c$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ และเมื่อแทน $u = x + y - 1$ ในผลเฉลยข้างต้นนี้ จะได้ผลเฉลยโดยปริยายของสมการที่กำหนดให้ คือ

$$x = \ln|x + y - 1| - x - y + 1 + c$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ หรือ

$$y + 2x - \ln|x + y - 1| = c_1$$

โดยที่ $c_1 = 1 + c$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

ตัวอย่าง 2.30 จงหาผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x - y}{x + y}$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

2.5.4 สมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบอื่น ๆ

นอกเหนือจากรูปแบบที่ได้ศึกษามาแล้ว ยังมีสมการเชิงอนุพันธ์บางส่วนที่เราสามารถใช้การเปลี่ยนตัวแปรในการหาผลเฉลยได้อีกด้วย ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.31 จงหาผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y(1 + 2xy)dx + x(1 - 2xy)dy = 0$$

วิธีทำ สังเกตว่าสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ไม่เป็นสมการทุกรูปแบบที่เราศึกษาก่อนหน้านี้ (Verify?) อย่างไรก็ตาม เราอาจพิจารณาการแทนตัวแปรดังนี้

กำหนดให้

$$v = 2xy$$

จะได้ว่า

$$dy = \frac{xdv - vdx}{2x^2}$$

และเมื่อแทนในสมการที่กำหนดให้ จะได้ว่า

$$\frac{v}{2x}(1+v)dx + x(1-v)\left(\frac{xdv - vdx}{2x^2}\right) = 0$$

การจัดรูปสมการใหม่ ทำให้ได้ว่า

$$\frac{2}{x}dx = \frac{v-1}{v^2}dv$$

หรือ

$$\frac{2}{x}dx = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v^2}\right)dv$$

ซึ่งเป็นสมการแยกตัวแปรได้ การหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้ว่า

$$\int \frac{2}{x}dx = \int \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v^2}\right)dv$$

ส่งผลให้

$$2\ln|x| = \ln|v| + \frac{1}{v} + \ln|c|$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ และเมื่อแทน $v = 2xy$ ในผลเฉลยข้างต้นนี้ จะได้ผลเฉลยโดยปริยายของสมการที่กำหนดให้ คือ

$$2\ln|x| = \ln|2xy| + \frac{1}{2xy} + \ln|c|$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ หรือ

$$x = 2cye^{\frac{1}{2xy}}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ นอกจากนี้ ยังพบว่า $y \equiv 0$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วย (Why?) ■

ตัวอย่าง 2.32 จงหาผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$2xy\frac{dy}{dx} + 2y^2 = 3x - 6$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

นอกจากนี้ ในบางครั้ง เราสามารถใช้การเปลี่ยนตัวแปรหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.33 จงหาผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 2x(y')^2 = 0$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 2.96 $(x+y)dx+xdy=0$

แบบฝึกหัด 2.97 $ydx=2(x+y)dy$

แบบฝึกหัด 2.98 $(y^2+yx)dx-x^2dy=0$

แบบฝึกหัด 2.99 $(y^2+yx)dx+x^2dy=0$

แบบฝึกหัด 2.100 $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}$

แบบฝึกหัด 2.101 $-ydx+(x\sqrt{xy})dy=0$

แบบฝึกหัด 2.102 $x\frac{dy}{dx}-y=\sqrt{x^2+y^2}$

แบบฝึกหัด 2.103 $y\frac{dy}{dx}=x+4ye^{\frac{-2x}{y}}$

แบบฝึกหัด 2.104 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$

แบบฝึกหัด 2.105 $(x^2+xy-y^2)dx+xydy=0$

จงหาผลเฉลยของสมการแบร์นูลลีต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 2.106 $x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{y^2}$

แบบฝึกหัด 2.107 $\frac{dy}{dx}-y=e^xy^2$

แบบฝึกหัด 2.108 $\frac{dy}{dx}=y(xy^3-1)$

แบบฝึกหัด 2.109 $x\frac{dy}{dx}-(1+x)y=xy^2$

แบบฝึกหัด 2.110 $3(1+x^2)\frac{dy}{dx}=2xy(y^3-1)$

แบบฝึกหัด 2.111 $\frac{dy}{dx}-y=e^{2x}y^3$

แบบฝึกหัด 2.112 $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x-2}=5(x-2)y^{1/2}$

แบบฝึกหัด 2.113 $\frac{dx}{dy}=\frac{y^2+2xy}{x^2}$

แบบฝึกหัด 2.114 $\frac{dy}{dx}+y=e^xy^{-2}$

แบบฝึกหัด 2.115 $\frac{dy}{dx}+y^3x+y=0$

จงหาผลเฉลยของสมการที่อยู่ในรูปตัวแปรเชิงเส้นต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 2.116 $\frac{dy}{dx}=(x-y+5)^2$

แบบฝึกหัด 2.117 $\frac{dy}{dx}=(x+y+1)^2$

แบบฝึกหัด 2.118 $\frac{dy}{dx}=\tan^2(x+y)$

แบบฝึกหัด 2.119 $\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)$

แบบฝึกหัด 2.120 $\frac{dy}{dx}=2+\sqrt{x-2y+3}$

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 2.121 $xe^{2y}\frac{dy}{dx}+e^{2y}=\frac{\ln x}{x}$

แบบฝึกหัด 2.122 $y'+y\ln y=ye^x$

แบบฝึกหัด 2.123 $ydx+(1+ye^x)dy=0$

แบบฝึกหัด 2.124 $x\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=2x^5e^{\frac{y}{x^4}}$

แบบฝึกหัด 2.125 $2y\frac{dy}{dx}+x^2+y^2+x=0$

แบบฝึกหัด 2.126 $\frac{dy}{dx}=y+x(y+1)^2+1$

แบบฝึกหัด 2.127 $x^2\frac{dy}{dx}+2xy=x^4y^2+1$

แบบฝึกหัด 2.128 $y''=1+(y')^2$

แบบฝึกหัด 2.129 $xy''-y'=0$

แบบฝึกหัด 2.130 $y''+2y(y')^3=0$

บทที่ 3
ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

ในบทนี้ เราจะศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง เราจะพบว่าปัญหาในสาขาต่าง ๆ ของวิทยาศาสตร์หรือแม้แต่ปัญหาในที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันสามารถเขียนอยู่ในรูปของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ซึ่งเกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และเราจะสามารถหาคำตอบของปัญหาเหล่านี้ได้ด้วยวิธีการที่เราได้ศึกษาในบทที่ 2

3.1 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

เคยสังเกตไหม! เวลากระหายน้ำ และเราหยิบขวดน้ำดื่มออกมาจากตู้เย็น แต่ลืมนำขวดน้ำกลับใส่เข้าไปในตู้เย็นอย่างเดิม เราจะพบว่าอุณหภูมิของน้ำจะเพิ่มขึ้นจนใกล้เคียงกับอุณหภูมิห้อง ซึ่งปรากฏการณ์นี้สามารถอธิบายได้ในวิชาฟิสิกส์ หรือการเพิ่มขึ้นของประชากรในเขตชุมชนหนึ่ง ๆ ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ทางสังคมศาสตร์ หรือการคำนวณดอกเบี้ยเงินฝากของธนาคาร ซึ่งเกี่ยวข้องกับวิชาเศรษฐศาสตร์ เป็นต้น ปรากฏการณ์เหล่านี้มักจะถูกอธิบายในนิพจน์เชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งจะเรียกการอธิบายระบบของปรากฏการณ์เหล่านี้ว่า **ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์** (mathematical model)

แน่นอนว่าสิ่งที่ควรสงสัยคือ เราจะสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายระบบของปรากฏการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างไร?

การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มีหลักการคร่าว ๆ คือ เราจะต้องระบุตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงของระบบให้ได้ จากนั้นให้พิจารณาสมมติฐานที่เกี่ยวข้องกับระบบที่ต้องการจะศึกษา ซึ่งสมมติฐานเหล่านี้ควรสอดคล้องกับข้อมูลเชิงประจักษ์ที่เกี่ยวข้องกับระบบนั้น ๆ ในบางสถานการณ์เราไม่จำเป็นต้องสร้างตัวแบบที่มีความละเอียดสูง โดยพิจารณาเพียงตัวแปรที่จำเป็นในระบบเท่านั้นก็ได้ ตัวอย่างเช่น หากเรายังจำได้ตอนที่เริ่มเรียนวิชาฟิสิกส์ ในการศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวดิ่งสู่พื้นโลก เราจะไม่คำนึงถึงแรงต้านทานอากาศ อย่างไรก็ตาม หากได้ศึกษาในวิชาฟิสิกส์ระดับสูง จะพบว่าแรงต้านทานอากาศนั้นมีผลต่อการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งและไม่สามารถละเลยได้

หากพิจารณาอย่างถี่ถ้วนมากขึ้น จะพบว่าปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในระบบหนึ่ง ๆ มักจะเกี่ยวข้องกับ **อัตราการเปลี่ยนแปลง** (rate of change) ของตัวแปรในระบบ ซึ่งทำให้การอธิบายปรากฏการณ์เหล่านี้ในทางคณิตศาสตร์มักจะเกี่ยวข้องกับ **อนุพันธ์** (derivative) ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว ตัวแบบในวิชาฟิสิกส์มักจะเกี่ยวข้องกับตัวแปรเวลา (t) ซึ่งหากทราบผลเฉลยของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แล้ว เราจะอธิบายสถานะของระบบ (state of the system) ณ เวลาใด ๆ ได้ นั่นคือ ค่าของตัวแปรตาม (dependent variable) ณ เวลา t จะอธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในระบบ ณ เวลา t นั้น ๆ นั่นเอง

หลังจากที่สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ได้แล้ว คำถามที่ตามมาคือ เราจะแก้ปัญหาหรือหาผลเฉลยของปัญหานั้น ๆ ได้อย่างไร?

ทั้งนี้ ถ้าสามารถแก้ปัญหานั้น ๆ ได้ เราจะตรวจสอบได้ว่าตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นนั้นมีความถูกต้องและมีประสิทธิภาพ เมื่อเทียบกับข้อมูลเชิงประจักษ์หรือข้อมูลที่เกิดจากการทดลองหรือไม่นั่นเอง อนึ่ง หากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นยังไม่มีประสิทธิภาพเท่าที่ควร เราอาจเพิ่มความละเอียดของตัวแบบโดยการพิจารณาตัวแปรที่เกี่ยวข้องเพิ่มมากขึ้น แน่นอนว่า การเพิ่มความละเอียดของตัวแบบจะทำให้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มีความซับซ้อนมากขึ้น และในบางครั้งอาจจะไม่สามารถหาผลเฉลยได้โดยง่าย

ในหัวข้อต่อไปนี้ เราจะศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่อธิบายด้วยสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง

3.2 การเพิ่มขึ้นและการสลาย

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แรกที่เกี่ยวข้องกับการเพิ่มขึ้น (growth) และการสลาย (decay) ถูกนำเสนอในปี ค.ศ. 1798 โดยทอมัส มาลธัส (Thomas Malthus) (ค.ศ. 1766 - 1834) นักเศรษฐศาสตร์ชาวอังกฤษ ซึ่งแนวคิดพื้นฐานของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของมาลธัสเกิดขึ้นบนสมมติฐานที่ว่า อัตราการเพิ่มขึ้นของประชากรในชุมชนหนึ่ง ณ ขณะเวลาหนึ่ง ๆ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนประชากรในชุมชนดังกล่าว ณ เวลานั้น ๆ[1] โดยอธิบายในบริบทของคณิตศาสตร์ได้ดังนี้ สมมติให้ $P(t)$ เป็นจำนวนประชากร ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ว่าสมมติฐานของมาลธัส คือ

$$\frac{dP}{dt} \propto P$$

หรือ

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการเป็นสัดส่วนโดยตรง

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของมาลธัสถูกนำไปอธิบายการเติบโตของประชากรขนาดเล็กระหว่างช่วงเวลาสั้น ๆ ได้อย่างแม่นยำ เช่น การเจริญเติบโตของแบคทีเรียในจานแก้วเพาะเชื้อ แต่ทว่า ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์พื้นฐานนี้ยังไม่สามารถอธิบายปรากฏการณ์ของประชากรมนุษย์ที่ปัจจัยแวดล้อมมีความซับซ้อนได้ดีเท่าที่ควร

จากแนวคิดข้างต้น เราสามารถอธิบายปรากฏการณ์การเพิ่มและการสลายด้วยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad P(t_0) = P_0 \tag{3.1}$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการเป็นสัดส่วนโดยตรง

---

[1] เราจะกล่าวว่าปริมาณ u และ v เป็น**สัดส่วนโดยตรง** (proportional) กัน ซึ่งเขียนแทนด้วย $u \propto v$ ถ้ามีค่าคงตัว k ที่ทำให้ $u = kv$

3.2.1 การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

ในวิชาชีววิทยา อัตราการเพิ่มขึ้นของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก เช่น แบคทีเรีย ในช่วงเวลาหนึ่ง ๆ จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับประชากรของสิ่งมีชีวิตนั้น ๆ ณ เวลา t ทั้งนี้ หากเราทราบจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก ณ เวลา t_0 ว่ามีจำนวน P_0 แล้ว เราสามารถใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (3.1) เพื่อคำนวณหาจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิตในอนาคตได้ ตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.1 สมมติว่า ณ ขณะเวลาหนึ่งมีแบคทีเรียจำนวน P_0 ตัว หลังจากนั้น ณ เวลา $t = 1$ ชั่วโมง พบว่ามีแบคทีเรียอยู่จำนวน $\frac{3}{2}P_0$ ถ้าอัตราการเพิ่มขึ้นของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนแบคทีเรีย $P(t)$ ณ เวลา t ใด ๆ จงหาเวลา t ที่ทำให้จำนวนของแบคทีเรียเพิ่มขึ้นเป็นสามเท่าของจำนวนเดิม

วิธีทำ การแก้ปัญหาข้อนี้ ขั้นแรกให้หาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

โดยใช้ค่าเริ่มต้น $P(0) = P_0$ จากนั้นใช้ข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า $P(1) = \frac{3}{2}P_0$ เพื่อคำนวณหาค่าคงตัว k ส่งผลให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน P ณ เวลา t ใด ๆ ตามลำดับ

สังเกตว่า สมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการเชิงเส้นในรูป

$$\frac{dP}{dt} - kP = 0$$

เราจึงพิจารณาการหาผลเฉลยได้ดังนี้ เนื่องจาก ตัวประกอบปริพันธ์

$$e^{\int(-k)dt} = e^{-kt}$$

ทำให้ได้ว่า

$$e^{-kt}\frac{dP}{dt} + e^{-kt}(-k)P = 0$$

นั่นคือ
$$\frac{d}{dt}[e^{-kt}P] = 0$$
การหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการทำให้ได้ว่า
$$P(t) = ce^{kt}$$
โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $P(0) = P_0$ จะได้ว่า
$$P_0 = P(0) = ce^{k(0)}$$
ส่งผลให้ได้ว่า
$$c = P_0$$
ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ
$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อเวลา $t = 1$ ชั่วโมง พบว่ามีแบคทีเรียอยู่จำนวน $\frac{3}{2}P_0$ นั่นคือ $P(1) = \frac{3}{2}P_0$ จึงได้ว่า
$$\frac{3}{2}P_0 = P(1) = P_0 e^{k(1)} = P_0 e^k$$
ดังนั้น
$$k = \ln\frac{3}{2} \approx 0.4055$$
เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของจำนวนแบคทีเรียกับเวลา t ใด ๆ คือ
$$P(t) = P_0 e^{0.4055t}$$

พิจารณาเวลา t ที่ทำให้จำนวนของแบคทีเรียเพิ่มขึ้นเป็นสามเท่าของจำนวนเดิม ดังนี้ เราทราบว่า

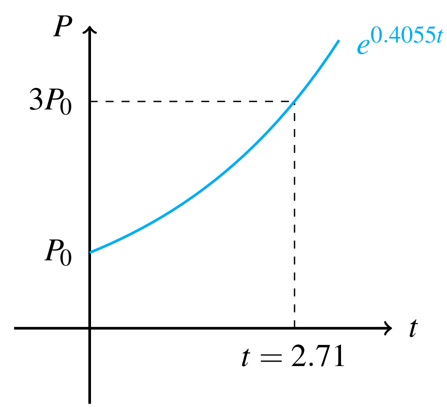
$$3P_0 = P_0 e^{0.4055t}$$

นั่นคือ

$$t = \frac{\ln 3}{0.4055} \approx 2.71 \quad \text{ชั่วโมง}$$

โดยลักษณะของความสัมพันธ์แสดงได้ดังรูป 3.1

รูปที่ 3.1: ความ สัมพันธ์ ของ จำนวน แบคทีเรีย P กับ เวลา t ใด ๆ



■

ในกรณีที่ค่าคงตัว $k \geq 0$ จะพบว่าค่าฟังก์ชันเลขชี้กำลัง e^{kt} จะเพิ่มขึ้นเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น และในอีกด้านหนึ่ง ถ้า $k < 0$ จะพบว่าค่าฟังก์ชันเลขชี้กำลังนี้จะลดลง เมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ ปรากฏการณ์การเพิ่มขึ้น เช่น ประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็กจะเกี่ยวข้องกับค่าคงตัว k ที่มีค่าเป็นบวก ในขณะที่ปรากฏการณ์การสลาย เช่น การสลายตัวของกัมมันตรังสี จะเกี่ยวข้องกับค่าคงตัว k ที่มีค่าเป็นลบ ซึ่งมีรายละเอียดในหัวข้อถัดไปนี้

3.2.2 การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

ในวิชาฟิสิกส์ **ค่าครึ่งชีวิต** (half-life) เป็นตัววัดเสถียรภาพ (stability) ของสสารกัมมันตรังสี กล่าวคือ ค่าครึ่งชีวิตเป็นเวลาที่อะตอมที่มีปริมาณตั้งต้นเป็น A_0 สลาย

ตัวหรือเปลี่ยนสภาพไปเป็นสสารอื่นจนเหลือปริมาณครึ่งหนึ่งของปริมาณตั้งต้น สังเกตว่า ค่าครึ่งชีวิตยิ่งมาก เสถียรภาพของสสารกัมมันตรังสีนั้น ๆ ยิ่งมีมากตามไปด้วย ตัวอย่างเช่น ค่าครึ่งชีวิตของเรเดียม (radium) Ra-226 มีค่าประมาณ $1,700$ ปี นั่นคือ ถ้ามีเรเดียม Ra-226 จำนวนหนึ่ง หลังจากนั้น $1,700$ ปีผ่านไป ครึ่งหนึ่งของเรเดียม Ra-226 จำนวนนั้นจะเปลี่ยนสภาพเป็นเรดอน (radon) Ra-222 นอกจากนี้ยังมีสสารกัมมันตรังสีที่เรารู้จักกันดีคือ ยูเรเนียม (uranium) U-238 ซึ่งมีค่าครึ่งชีวิตประมาณ $4,500,000,000$ ปี นั่นคือ ถ้ามียูเรเนียม U-238 จำนวนหนึ่ง หลังจากนั้น 4.5 พันล้านปีผ่านไป ครึ่งหนึ่งของยูเรเนียม U-238 จำนวนนั้นจะเปลี่ยนสภาพเป็นตะกั่ว (lead) Pb-206 นั่นเอง

ถ้าการสลายตัวของสสารกัมมันตรังสีเป็นสัดส่วนโดยตรงกับปริมาณของสสารกัมมันตรังสีที่เหลืออยู่จำนวน $A(t)$ ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ สมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dA}{dt} \propto A$$

หรือ

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการเป็นสัดส่วนโดยตรงที่มีค่าเป็นลบ (Why?)

ในทำนองเดียวกับหัวข้อก่อนหน้านี้ เราสามารถคำนวณค่าครึ่งชีวิตของสสารกัมมันตรังสีได้จากการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นร่วมกับข้อมูลเชิงประจักษ์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.2 เตาปฏิกรณ์นิวเคลียร์จะเปลี่ยนสภาพยูเรเนียม U-238 เป็นไอโซโทปของพลูโตเนียม (plutonium) Pu-239 สมมติให้ปริมาณตั้งต้นของพลูโตเนียมเป็น A_0 จากนั้น 15 ปีผ่านไปพบว่า 0.043% ของปริมาณพลูโตเนียมตั้งต้นสลายตัวไป จงหาค่าครึ่งชีวิตของไอโซโทปนี้โดยที่อัตราการสลายตัวเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนสสารที่เหลืออยู่

วิธีทำ กำหนดให้ $A(t)$ เป็นจำนวนไอโซโทปของพลูโตเนียมที่เหลืออยู่ ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

โดยมีค่าเริ่มต้น $A(0) = A_0$ ซึ่งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นเดียวกับตัวอย่าง 3.1 จึงได้ว่า ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อ 15 ปีผ่านไปพบว่า 0.043% ของปริมาณพลูโตเนียมตั้งต้นสลายตัวไป ซึ่งหมายความว่า มีพลูโตเนียมตั้งต้นจำนวน 99.957% เหลืออยู่ นั่นคือ $A(15) = 0.99957A_0$ จึงได้ว่า

$$0.99957A_0 = A_0 e^{k(15)}$$

ดังนั้น

$$k = \frac{\ln 0.99957}{15} \approx -0.00002867$$

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของปริมาณไอโซโทปของพลูโตเนียมที่เหลืออยู่กับเวลา t ใด ๆ คือ

$$A(t) = A_0 e^{-0.00002867t}$$

พิจารณาค่าครึ่งชีวิตของไอโซโทปพลูโตเนียมดังนี้ เราทราบว่า

$$\frac{1}{2}A_0 = A_0 e^{-0.00002867t}$$

นั่นคือ

$$t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-0.00002867} \approx 24,180 \quad \text{ปี}$$

■

ในช่วง ค.ศ. 1950 วิลลาร์ด ลิบบี้ (Willard Libby) (ค.ศ. 1908 - 1980) นักเคมีฟิสิกส์ชาวอเมริกันได้นำเสนอวิธีประมาณอายุของซากดึกดำบรรพ์ (fossil) โดยใช้คาร์บอนกัมมันตรังสี หลักการของการคำนวณอายุซากดึกดำบรรพ์ด้วยคาร์บอนกัมมันตรังสีนี้เกิดจากความจริงที่ว่า ไอโซโทปของคาร์บอนกัมมันตรังสี (carbon) C-14 เกิดขึ้นจากการที่รังสีคอสมิก (cosmic) เข้าทำปฏิกิริยากับไนโตรเจน (nitrogen)

ในบรรยากาศ โดยปกติแล้วอัตราส่วนของคาร์บอน C-14 ต่อคาร์บอนปกติ C-12 ในบรรยากาศและในองค์ประกอบของสิ่งมีชีวิตทั้งหลาย ณ ช่วงเวลาหนึ่ง ๆ จะมีค่าค่อนข้างคงที่ กล่าวคือ แม้ว่าคาร์บอน C-14 จะมีการสลายตัวอยู่เสมอ แต่ก็จะมีการทดแทนใหม่ด้วยคาร์บอน C-14 ใหม่ในอัตราคงที่เช่นกัน ทว่าเมื่อสิ่งมีชีวิตตายลง การหายใจและการได้รับอาหารที่มีคาร์บอน C-14 เป็นองค์ประกอบจึงหยุดลง แต่คาร์บอน C-14 ที่มีอยู่ในร่างกายยังคงสลายตัวเป็นไนโตรเจนไปอยู่เสมอ ในขณะที่ปริมาณคาร์บอน C-12 ยังคงมีอยู่ในปริมาณเท่าเดิม ดังนั้นการเปรียบเทียบปริมาณคาร์บอน C-14 ที่เหลืออยู่ในซากดึกดำบรรพ์กับปริมาณคาร์บอน C-14 ในบรรยากาศจะช่วยให้ทราบอายุโดยประมาณของซากดึกดำบรรพ์ได้ ทั้งนี้วิธีการนี้อยู่บนพื้นฐานความจริงที่ว่าครึ่งชีวิตของคาร์บอน C-14 มีค่าประมาณ $5,730$ ปี จากการนำเสนอวิธีดังกล่าวนี้ ในปี ค.ศ. 1960 ลิบบี้จึงได้รับรางวัลโนเบลในสาขาเคมีนั่นเอง

การสลายตัวของคาร์บอน C-14 ยังคงเกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

โดยที่ $A(0) = A_0$ เป็นค่าเริ่มต้น และการใช้ข้อมูลเชิงประจักษ์เพื่อคำนวณหาค่าคงตัว k ซึ่งจะส่งผลให้สามารถคำนวณอายุของซากดึกดำบรรพ์ได้ตามลำดับ

ตัวอย่าง 3.3 ซากดึกดำบรรพ์ของสิ่งมีชีวิตชนิดหนึ่งมีปริมาณคาร์บอน C-14 อยู่จำนวน $1/1000$ ของปริมาณคาร์บอน C-14 ในสิ่งมีชีวิตทั่วไป จงคำนวณหาอายุของซากดึกดำบรรพ์นี้โดยที่ครึ่งชีวิตของคาร์บอน C-14 มีค่าประมาณ $5,730$ ปี

วิธีทำ กำหนดให้ $A(t)$ เป็นจำนวนไอโซโทปของคาร์บอน C-14 ที่เหลืออยู่ ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dA}{dt} = kA, \quad A(0) = A_0$$

ซึ่งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นเดียวกับตัวอย่าง 3.1 จึงได้ว่า ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นคือ

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า ครึ่งชีวิตของคาร์บอน C-14 มีค่าประมาณ $5,730$ ปี นั่นคือ $A(5730) = \frac{A_0}{2}$ จึงได้ว่า

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{k(5730)}$$

ดังนั้น

$$k = \frac{\ln \frac{1}{2}}{5730} \approx -0.000121$$

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของปริมาณไอโซโทปของคาร์บอน C-14 ที่เหลืออยู่กับเวลา t ใด ๆ คือ

$$A(t) = A_0 e^{-0.000121t}$$

พิจารณาซากดึกดำบรรพ์ของสิ่งมีชีวิตชนิดหนึ่งมีปริมาณคาร์บอน C-14 อยู่จำนวน $1/1000$ ของปริมาณคาร์บอน C-14 ในสิ่งมีชีวิตทั่วไปดังนี้ เราทราบว่า

$$\frac{1}{1000} A_0 = A_0 e^{-0.000121t}$$

นั่นคือ

$$t = \frac{\ln \frac{1}{1000}}{-0.000121} \approx 57,089 \quad \text{ปี}$$

■

แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 3.1 กำหนดให้อัตราการเพิ่มขึ้นของประชากรเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนประชากร $P(t)$ ณ เวลา t ใด ๆ ถ้า ณ เวลาเริ่มต้นพบว่ามีประชากรในชุมชนจำนวน P_0 คน และหลังจากนั้น 5 ปี พบว่าประชากรในชุมชนนี้เพิ่มขึ้นเป็นสองเท่า จงหาว่านานเท่าใดที่ประชากรในชุมชนนี้เพิ่มขึ้นเป็นสามเท่า

แบบฝึกหัด 3.2 จากแบบฝึกหัด 3.1 ถ้าสมมติเพิ่มเติมว่าหลังจากเวลาเริ่มต้น 3 ปี พบว่ามีประชากรจำนวน 10,000 คน จงหาจำนวนประชากร ณ เวลาเริ่มต้น P_0 และจงหาจำนวนประชากรเมื่อเวลาผ่านไป 10 ปี

แบบฝึกหัด 3.3 กำหนดให้อัตราการเพิ่มขึ้นของประชากรเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนประชากร $P(t)$ ณ เวลา t ใด ๆ ถ้า ณ เวลาเริ่มต้นพบว่ามีประชากรในชุมชนจำนวน 500 คน และหลังจากนั้น 10 ปี พบว่าประชากรในชุมชนนี้เพิ่มขึ้นอีก 15% จงหาว่าจำนวนประชากรในชุมชนนี้เมื่อเวลาผ่านไป 30 ปี

แบบฝึกหัด 3.4 กำหนดให้อัตราการเพิ่มขึ้นของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนแบคทีเรีย $P(t)$ ณ เวลา t ใด ๆ ถ้าการทดลองครั้งหนึ่งพบว่าเมื่อเวลาผ่านไป 3 ชั่วโมง มีแบคทีเรียจำนวน 400 ตัว และเมื่อเวลาผ่านไป 10 ชั่วโมง พบว่ามีแบคทีเรียจำนวน 2,000 ตัว จงหาจำนวนแบคทีเรีย ณ ขณะเวลาเริ่มต้นการทดลอง

แบบฝึกหัด 3.5 กำหนดให้อัตราการสลายตัวของไอโซโทปของตะกั่ว Pb-209 เป็นสัดส่วนโดยตรงกับปริมาณไอโซโทปที่เหลืออยู่ ณ เวลา t ใด ๆ และมีค่าครึ่งชีวิตเท่ากับ 3.3 ชั่วโมง ถ้ามีไอโซโทปของตะกั่ว Pb-209 จำนวน 1 กรัม จงหาเวลาที่ทำให้ไอโซโทปสลายตัวเท่ากับ 80%

แบบฝึกหัด 3.6 สมมติว่ามีสสารกัมมันตรังสีจำนวน 100 มิลลิกรัม หลังจากนั้น 6 ชั่วโมงพบว่าน้ำหนักของสสารกัมมันตรังสีลดลงไป 3% ถ้าอัตราการสลายตัวของไอโซโทปของสสารกัมมันตรังสีเป็นสัดส่วนโดยตรงกับปริมาณไอโซโทปที่เหลืออยู่ ณ เวลา t ใด ๆ จงหาปริมาณของสสารกัมมันตรังสีที่เหลืออยู่หลังจากเวลาผ่านไป 24 ชั่วโมง

แบบฝึกหัด 3.7 จงหาครึ่งชีวิตของสสารกัมมันตรังสีในแบบฝึกหัด 3.6

แบบฝึกหัด 3.8 พิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dA}{dt} = kA, \quad A(0) = A_0$$

ซึ่งใช้ในการอธิบายปรากฏการณ์การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการเป็นสัดส่วนโดยตรง จงแสดงว่าค่าครึ่งชีวิต (T) ของสสารกัมมันตรังสีคือ $T = \frac{-\ln 2}{k}$ และจงแสดงว่าผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นนี้ คือ $A(t) = A_0 2^{-T/t}$

แบบฝึกหัด 3.9 สมมติว่านักโบราณคดีขุดค้นพบชิ้นส่วนเรือขุดไม้ชิ้นหนึ่งและเมื่อนำไปตรวจหาอายุโดยใช้คาร์บอน C-14 พบว่าปริมาณคาร์บอน C-14 จำนวน 85% สลายตัวไปเมื่อเทียบกับปริมาณคาร์บอน C-14 ในไม้ยืนต้นชนิดเดียวกันกับที่นำมาทำเรือไม้นี้ จงคำนวณหาอายุของชิ้นส่วนเรือไม้นี้โดยกำหนดให้ครึ่งชีวิตของคาร์บอน C-14 มีค่าประมาณ $5,730$ ปี

แบบฝึกหัด 3.10 สมมติว่าการขุดค้นแหล่งโบราณคดียุคทวารวดีแห่งหนึ่งเมื่อปี พ.ศ. 2528 นักโบราณคดีพบรูปสลักโบราณชิ้นหนึ่งและเมื่อทำการตรวจหาอายุโดยใช้คาร์บอน C-14 พบว่ามีอายุประมาณ $1,300$ ปี ซึ่งสอดคล้องกับการวิเคราะห์ยุคสมัยทางประวัติศาสตร์ของแหล่งโบราณคดีนี้ จงหาปริมาณของคาร์บอน C-14 ที่เหลืออยู่ ณ ขณะขุดค้นพบเมื่อปี พ.ศ. 2528

3.3 กฎการเย็นตัวของนิวตัน

ตามกฎการเย็นตัวของนิวตัน (Newton’s law of cooling) เราทราบว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุเป็นสัดส่วนโดยตรงกับผลต่างระหว่างอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม (ambient temperature) และอุณหภูมิของวัตถุ กล่าวคือ ถ้าอุณหภูมิของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ เป็น $T(t)$ และอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมเป็น $T_m(t)$ จะได้ว่าความสัมพันธ์อยู่ในรูป

$$\frac{dT}{dt} \propto T_m - T$$

นั่นคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุเป็น

$$\frac{dT}{dt} = k(T_m - T), \qquad T(t_0) = T_0 \tag{3.2}$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการเป็นสัดส่วนโดยตรง

ในที่นี้ สมมติให้ T_m เป็นค่าคงตัว และไม่คำนึงถึงปัจจัยการเพิ่ม/ลดอุณหภูมิที่เกิดจากมนุษย์ แสงอาทิตย์ และเครื่องปรับอากาศ

สังเกตว่า ค่าคงตัว k มีค่าเป็นบวกเสมอและไม่ขึ้นกับ T, T_m หรือ t นอกจากนี้ ถ้าอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมมากกว่าอุณหภูมิของวัตถุ นั่นคือ $T_m - T > 0$ จะพบว่าอุณหภูมิของวัตถุจะเพิ่มสูงขึ้นตามอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม ในทางกลับกัน ถ้าอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมน้อยกว่าอุณหภูมิของวัตถุ นั่นคือ $T_m - T < 0$ จะพบว่าอุณหภูมิของวัตถุจะลดลงตามอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม

ตัวอย่าง 3.4 ในขณะที่นำกระป๋องน้ำอัดลมออกจากตู้เย็นพบว่ามีอุณหภูมิ $2\ ^\circ C$ หลังจากนั้น 4 นาทีพบว่าอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมดังกล่าวเป็น $5\ ^\circ C$ จงหาอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมนี้เมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที ถ้าอุณหภูมิห้องมีค่าเป็น $25\ ^\circ C$

วิธีทำ กำหนดให้ $T(t)$ เป็นอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลม ณ เวลา t ใด ๆ เนื่องจากอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมเป็น $25\ ^\circ C$ และอุณหภูมิ ณ จุดเริ่มต้น $t = 0$ มีค่า $T_0 = 2$

$^{\circ}C$ จึงได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dT}{dt} = k(T_m - T), \qquad T(0) = T_0$$

หรือ

$$\frac{dT}{dt} = k(25 - T), \qquad T(0) = 2$$

สังเกตว่า สมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการเชิงเส้น เราจึงพิจารณาการหาผลเฉลยได้ดังนี้ เนื่องจาก ตัวประกอบปริพันธ์

$$e^{\int k dt} = e^{kt}$$

ทำให้ได้ว่า

$$e^{kt}\frac{dT}{dt} + e^{kt}kT = e^{kt}25k$$

นั่นคือ

$$\frac{d}{dt}[e^{kt}T] = e^{kt}25k$$

การหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการทำให้ได้ว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$T(t) = 25 + ce^{-kt}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 2$ จะได้ว่า

$$2 = T(0) = 25 + ce^{-k(0)}$$

ส่งผลให้ได้ว่า

$$c = -23$$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$T(t) = 25 - 23e^{-kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อเวลาผ่านไป 4 นาทีพบว่าอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมดังกล่าวเป็น 5 $^\circ C$ นั่นคือ $T(4) = 5$ จึงได้ว่า

$$5 = T(4) = 25 - 23e^{k(4)}$$

ดังนั้น

$$k = -\frac{\ln \frac{20}{23}}{4} \approx 0.03494$$

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมกับเวลา t ใด ๆ คือ

$$T(t) = 25 - 23e^{-0.03494t}$$

พิจารณาอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมนี้เมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที ดังนี้

$$T(20) = 25 - 23e^{-0.03494(20)} \approx 13.56\,^\circ C$$

■

ตัวอย่าง 3.5 ในขณะที่นำเค้กออกจากเตาอบพบว่าอุณหภูมิของเค้กเป็น 300 $^\circ F$ หลังจากนั้น 3 นาทีพบว่าอุณหภูมิของเค้กเป็น 200 $^\circ F$ จงหาเวลาที่ทำให้เค้กชิ้นนี้เย็นสนิทที่อุณหภูมิห้อง 77 $^\circ F$

วิธีทำ กำหนดให้ $T(t)$ เป็นอุณหภูมิของเค้ก ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ปัญหาค่าเริ่มต้นคือ

$$\frac{dT}{dt} = k(77 - T), \qquad T(0) = 300$$

ซึ่งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นเดียวกับตัวอย่าง 3.4 จึงได้ว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$T(t) = 77 + ce^{-kt}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 300$ จะได้ว่า

$$300 = T(0) = 77 + ce^{-k(0)}$$

ส่งผลให้ได้ว่า

$$c = 223$$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$T(t) = 77 + 223e^{-kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อเวลาผ่านไป 3 นาทีพบว่าอุณหภูมิของเค้กเป็น $200\ ^{\circ}F$ นั่นคือ $T(3) = 200$ จึงได้ว่า

$$200 = T(3) = 77 + 223e^{-k(3)}$$

ดังนั้น

$$k = \frac{\ln \frac{200-77}{223}}{-3} \approx 0.1983$$

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของอุณหภูมิของเค้กกับเวลา t ใด ๆ คือ

$$T(t) = 77 + 223e^{-0.1983t}$$

พิจารณาเวลาที่ทำให้เค้กชิ้นนี้เย็นสนิทที่อุณหภูมิห้อง $77\ ^{\circ}F$ ดังนี้

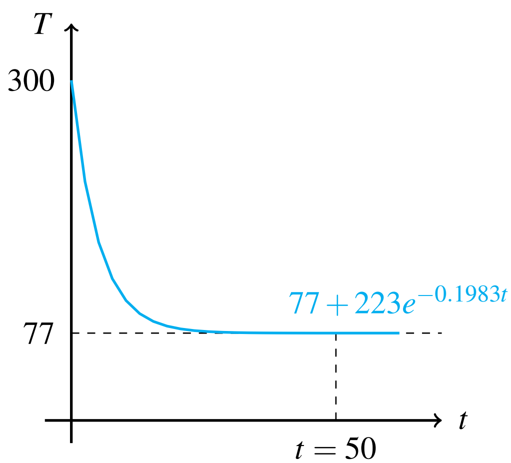
$$77 = T(t) = 77 + 223e^{-0.1983t}$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ที่จะมี t ที่ทำให้ $T(t) = 77$ เนื่องจาก $\lim_{t \to +\infty} 77 + 223e^{-0.1983t} = 77$ จากข้อสังเกตนี้ ส่งผลให้ไม่สามารถระบุเวลาที่เค้กชิ้นนี้เย็นสนิทที่อุณหภูมิห้อง $77\ ^{\circ}F$ ได้ อย่างไรก็ตาม จากความสัมพันธ์นี้ เราสามารถพิจารณาปรากฏการณ์ของความสัมพันธ์ของอุณหภูมิของเค้กกับเวลา t ใด ๆ ได้ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 3.1: ความสัมพันธ์ของอุณหภูมิของเค้ก $T(t)$ กับเวลา t ใด ๆ

อุณหภูมิของเค้ก $T(t)$	เวลา t (นาที)
80	21.73
79	23.77
78	27.27
77.5	30.76
77.1	38.88
77.01	50.49

และอธิบายความสัมพันธ์ของอุณหภูมิของเค้ก $T(t)$ กับเวลา t ใด ๆ ได้ดังรูป 3.2



รูปที่ 3.2: ความสัมพันธ์ของอุณหภูมิของเค้ก $T(t)$ กับเวลา t ใด ๆ

■

แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 3.11 ในคืนอันเยือกเย็นชานกรุงปรากวัดอุณหภูมิได้ 10 $^\circ F$ โรเบิร์ตได้นำเทอร์มอมิเตอร์อันหนึ่งออกมาวางไว้นอกบ้านพักซึ่งมีอุณหภูมิคงที่ 70 $^\circ F$ เมื่อเวลาผ่านไป 30 วินาที เขาพบว่าเทอร์มอมิเตอร์อ่านค่าได้ 50 $^\circ F$ จงหาอุณหภูมิที่เทอร์มอมิเตอร์อ่านได้เมื่อเวลาผ่านไป 1 นาที และจงหาว่านานเท่าใดที่อุณหภูมิที่อ่านได้จะเป็น 15 $^\circ F$

แบบฝึกหัด 3.12 เทอร์มอมิเตอร์อันหนึ่งถูกหยิบออกจากตัวบ้านที่มีอุณหภูมิคงที่ไปวางไว้นอกบ้านซึ่งมีอุณหภูมิเท่ากับ 5 $^\circ F$ หลังจากนั้น 1 นาทีพบว่าเทอร์มอมิเตอร์อ่านค่าได้ 55 $^\circ F$ ต่อมาเมื่อเวลาผ่านไป 5 นาทีพบว่าเทอร์มอมิเตอร์อ่านค่าได้ 30 $^\circ F$ จงหาอุณหภูมิที่เทอร์มอมิเตอร์วัดได้ก่อนนำออกจากตัวบ้าน

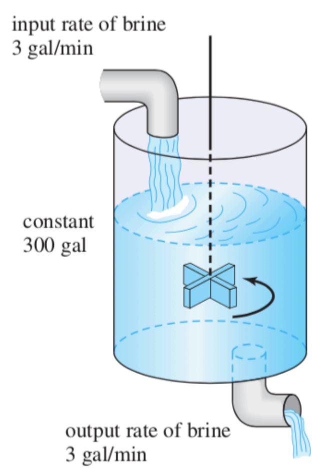
แบบฝึกหัด 3.13 แท่งเหล็กขนาดเล็กอันหนึ่งวัดอุณหภูมิได้ 20 $^\circ C$ ถูกนำใส่หม้อต้มที่น้ำกำลังเดือด ถ้าสมมติว่าอุณหภูมิแท่งเหล็กนี้เพิ่มขึ้น 2 $^\circ C$ ในทุก ๆ 1 นาที จงหาว่านานเท่าใดที่แท่งเหล็กนี้จะมีอุณหภูมิเท่ากับ 90 $^\circ C$

แบบฝึกหัด 3.14 นันทนานำเทอร์มอมิเตอร์ที่วัดอุณหภูมิได้ 25 $^\circ C$ เข้าใส่ในเตาอบที่มีอุณหภูมิคงที่ จากการสังเกตผ่านกระจกด้านหน้า เมื่อเวลาผ่านไป 30 วินาที เธอพบว่าเทอร์มอมิเตอร์อ่านค่าได้ 43 $^\circ C$ และเมื่อเวลาผ่านไป 1 นาที เธอพบว่าเทอร์มอมิเตอร์อ่านค่าได้ 63 $^\circ C$ จงหาอุณหภูมิภายในเตาอบนี้

แบบฝึกหัด 3.15 นักสืบโมริ โคโกโร่เข้าตรวจสอบเหตุการณ์ฆาตกรรมในห้องปิดตายที่มีอุณหภูมิคงที่ 25 $^\circ C$ เมื่อเขาสัมผัสร่างผู้เสียชีวิตพบว่ามีอุณหภูมิ 30 $^\circ C$ หลักจากเดินตรวจสอบหลักฐานเพิ่มเติมผ่านไปเป็นเวลา 2 ชั่วโมง เขาได้กลับมายังร่างผู้เสียชีวิตอีกครั้งและพบว่าอุณหภูมิลดลงเป็น 27 $^\circ C$ ถ้าสมมติว่าเวลาที่เกิดเหตุเป็น $t = 0$ และอุณหภูมิร่างกายของผู้เสียชีวิต ณ ขณะเกิดเหตุเท่ากับ 37 $^\circ C$ จงหาว่าหลังจากเกิดเหตุฆาตกรรมนานเท่าใดที่นักสืบโมริ โคโกโร่สัมผัสร่างผู้เสียชีวิตเป็นครั้งแรก

3.4 สารละลายผสม

การนำสารละลายเกลือสองชนิดที่มีความเข้มข้นต่างกันมาผสมกันสามารถพิจารณาในเชิงของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นได้ดังนี้ สมมติให้ถังผสมขนาดใหญ่ใบหนึ่งบรรจุสารละลายเกลือชนิดหนึ่งอยู่ 300 แกลลอน จากนั้นสูบสารละลายเกลืออีกชนิดหนึ่งที่มีความเข้มข้น 2 ปอนด์ต่อแกลลอนเข้าไปในถังผสมนี้ด้วยอัตรา 3 แกลลอน/นาที ในขณะเดียวกันสารละลายผสม (mixture) ที่เข้ากันดีแล้วจะถูกสูบออกจากถังผสมด้วยอัตราเท่ากับการสูบสารละลายชนิดที่สองเข้าไปในถังผสมดังรูป 3.3



รูปที่ 3.3: ถังผสม. ปรับปรุงจาก (Zill, 2009, น. 23)

กำหนดให้ $A(t)$ เป็นจำนวนเกลือ (หน่วยเป็นปอนด์) ในถังผสม ณ เวลา t ใด ๆ จะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาณสุทธิของ $A(t)$ เป็น

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \text{อัตราการสูบเข้า} - \text{อัตราการสูบออก}\\ &=: R_{in} - R_{out}\end{aligned}$$

อัตราการไหลเข้าของสารละลายเกลือ R_{in} คือผลคูณระหว่างความเข้มข้นของเกลือที่สูบเข้าและอัตราการสูบเข้า ซึ่งมีหน่วยเป็น ปอนด์/นาที นั่นคือ

$$R_{in} = (2 \text{ ปอนด์/แกลลอน}) \cdot (3 \text{ แกลลอน/นาที}) = 6 \text{ ปอนด์/นาที}$$

และเนื่องจากการสูบสารละลายผสมออกจากถังผสมเท่ากับอัตราการสูบสารละลายเกลือชนิดที่สองเข้าในถังผสม เราจะได้ว่าปริมาตรของสารละลายในถังผสม ณ เวลา t ใด ๆ จะมีค่าเท่ากับ 300 แกลลอนเสมอ ดังนั้นความเข้มข้นของสารละลายในถังผสมและสารละลายที่สูบออกจะเป็น $c(t) = \frac{A(t)}{300}$ ปอนด์/แกลลอน จึงได้ว่า อัตราการสูบออก

$$R_{out} = (\frac{A(t)}{300} \text{ ปอนด์/แกลลอน}) \cdot (3 \text{ แกลลอน/นาที}) = \frac{A(t)}{100} \text{ ปอนด์/นาที}$$

จากการคำนวณข้างต้นนี้ จะได้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาณสุทธิ

$$\frac{dA}{dt} = R_{in} - R_{out} = 6 - \frac{A}{100}$$

หรือ

$$\frac{dA}{dt} + \frac{1}{100}A = 6$$

นั่นเอง

ตัวอย่าง 3.6 จากของผสมที่พิจารณาข้างต้นนี้ ถ้าในขณะเริ่มต้น สารละลายเกลือปริมาตร 300 แกลลอนในถังผสมมีปริมาณเกลือละลายอยู่ 50 ปอนด์ จงหาว่าเมื่อเวลาผ่านไป 50 นาที จะมีเกลือละลายอยู่ในสารละลายผสมปริมาณเท่าใด

วิธีทำ สังเกตว่า ในขณะเริ่มต้นมีเกลือจำนวน 50 ปอนด์ละลายอยู่ในสารละลายผสมนี้ จึงได้ว่า เงื่อนไขเริ่มต้น คือ $A(0) = 50$ ซึ่งทำให้ได้ปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dA}{dt} + \frac{1}{100}A = 6, \quad A(0) = 50$$

การหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นทำได้ดังนี้ พิจารณาตัวประกอบปริพันธ์

$$e^{\int \frac{1}{100}dt} = e^{\frac{t}{100}}$$

ทำให้ได้ว่า

$$e^{\frac{t}{100}}\frac{dA}{dt} + e^{\frac{t}{100}}\frac{1}{100}A = 6e^{\frac{t}{100}}$$

นั่นคือ

$$\frac{d}{dt}[e^{\frac{t}{100}}A] = 6e^{\frac{t}{100}}$$

การหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการทำให้ได้ว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$A(t) = 600 + ce^{\frac{-t}{100}}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $A(0) = 50$ จะได้ว่า

$$50 = A(0) = 600 + ce^{\frac{-(0)}{100}}$$

ส่งผลให้ได้ว่า

$$c = -550$$

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของปริมาณเกลือที่ละลายอยู่ในสารละลายผสมกับเวลา t ใด ๆ คือ

$$T(t) = 600 - 550e^{\frac{-t}{100}}$$

พิจารณาปริมาณเกลือที่ละลายอยู่ในสารละลายผสมเมื่อเวลาผ่านไป 50 นาที ดังนี้

$$T(50) = 600 - 550e^{\frac{-50}{100}} \approx 266.41\text{ปอนด์}$$

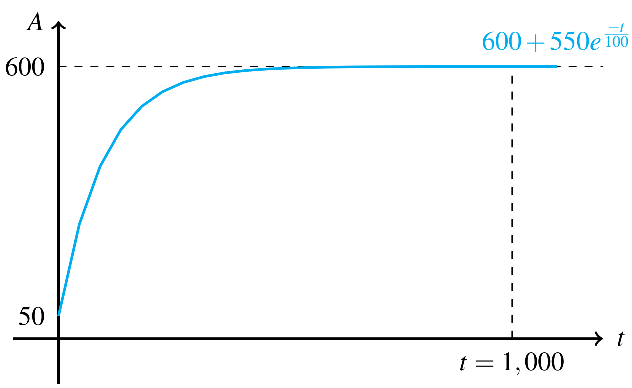
จากความสัมพันธ์ของปริมาณเกลือที่ละลายอยู่ในสารละลายผสมกับเวลา t เราสามารถพิจารณาปรากฏการณ์ของความสัมพันธ์ของอุณหภูมิของเค้กเมื่อเวลา t เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ได้ดังตารางต่อไปนี้

นั่นคือ เมื่อเวลาเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ $(t \to +\infty)$ จะได้ว่า $\lim_{t\to+\infty} A(t) = 600$ ซึ่งหมายความว่าปริมาณเกลือที่ละลายอยู่จะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนมีปริมาณเกลือคงที่ 600

ตาราง 3.2: ความสัมพันธ์ของปริมาณเกลือที่ละลายอยู่ $A(t)$ กับเวลา t

เวลา t (นาที)	ปริมาณเกลือที่ละลายอยู่ $A(t)$ (ปอนด์)
50	266.41
100	397.67
200	525.57
300	572.62
500	596.29
1,000	599.98

ปอนด์ โดยอธิบายความสัมพันธ์ของปริมาณเกลือที่ละลายอยู่ $A(t)$ กับเวลา t ใด ๆ ได้ดังรูป 3.4



รูปที่ 3.4: ความสัมพันธ์ของปริมาณเกลือที่ละลายอยู่ $A(t)$ กับเวลา t ใด ๆ

■

จากข้างต้น จะพบว่า เราสมมติให้อัตราการสูบเข้าเท่ากับอัตราการสูบออก ทว่าอัตราการสูบทั้งสองนี้ไม่จำเป็นต้องเท่ากัน กล่าวคือ สมมติว่า เมื่อสารละลายผสมที่เข้ากันดีแล้วถูกสูบออกด้วยอัตรา $r_{out} = 2$ แกลลอน/นาที แต่มีการสูบเข้าด้วยอัตรา $r_{in} = 3$ แกลลอน/นาที ซึ่งทำให้ได้ว่า จะมีสารละลายผสมอยู่ในถังเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา

$$r_{in} - r_{out} = 3 - 2 = 1 \text{ แกลลอน/นาที}$$

นั่นคือ เมื่อเวลาผ่านไป t นาที จะมีสารละลายผสมอยู่ในถังเพิ่มขึ้นจำนวน

$$(1 \text{ แกลลอน/นาที}) \cdot (t \text{ นาที}) = t \text{ แกลลอน}$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า เมื่อเวลาผ่านไป t นาที จะมีสารละลายผสมอยู่ในถังเป็น $300 + t$ แกลลอน โดยที่มีความเข้มข้นของสารละลายผสมที่สูบออกเป็น

$$c(t) = \frac{A(t)}{300 + t} \text{ ปอนด์/แกลลอน}$$

ส่งผลให้ อัตราการสูบออกเป็น

$$R_{out} = (\frac{A(t)}{300} \text{ ปอนด์/แกลลอน}) \cdot (2 \text{ แกลลอน/นาที}) = \frac{2A(t)}{300 + t} \text{ ปอนด์/นาที}$$

เพราะฉะนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาณเกลือที่ละลายอยู่สุทธิ คือ

$$\frac{dA}{dt} = R_{in} - R_{out} = 6 - \frac{2A}{300 + t}$$

ตามลำดับ

แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 3.16 ถังผสมขนาดใหญ่ใบหนึ่งบรรจุสารละลายเกลือชนิดหนึ่งปริมาตร 200 ลิตร โดยสารละลายนี้มีเกลือจำนวน 30 ละลายอยู่ จากนั้นทำการสูบสารละลายเกลืออีกชนิดหนึ่งที่มีความเข้มข้น 1 กรัมต่อลิตรเข้าไปในถังผสมด้วยอัตรา 4 ลิตรต่อนาที และในขณะเดียวกันทำการสูบสารละลายที่ผสมเข้ากันดีแล้วออกด้วยอัตราเท่ากับอัตราสูบเข้า จงหาปริมาณเกลือ $A(t)$ ที่อยู่ในถังผสม ณ เวลา t ใด ๆ

แบบฝึกหัด 3.17 จากแบบฝึกหัด 3.16 สมมติว่าทำการสูบน้ำบริสุทธิ์เข้าไปในถังผสมแทนการสูบสารละลายเกลือ และกำหนดให้อัตราสูบเข้าและสูบออกคงเดิม จงหาปริมาณเกลือที่อยู่ในถังผสม ณ เวลา t ใด ๆ

แบบฝึกหัด 3.18 ถังผสมขนาดใหญ่ความจุ 500 แกลลอนใบหนึ่งบรรจุน้ำบริสุทธิ์จนเต็มความจุถัง ถ้าทำการสูบสารละลายเกลือที่มีความเข้มข้น 2 ปอนด์ต่อแกลลอนด้วยอัตราสูบเข้า 5 แกลลอนต่อนาที และในขณะเดียวกันทำการสูบสารละลายที่ผสมกันดีแล้วออกด้วยอัตราเดียวกับอัตราสูบเข้า จงหาปริมาณเกลือที่อยู่ในถังผสม ณ เวลา t ใด ๆ

แบบฝึกหัด 3.19 จากแบบฝึกหัด 3.18 จงหาความเข้มข้น $c(t)$ ของสารละลายเกลือในถังผสม ณ เวลา t ใด ๆ และจงหาความเข้มข้นของสารละลายเกลือเมื่อเวลาเพิ่มขึ้นไปเรื่อย ๆ $(t \to +\infty)$

แบบฝึกหัด 3.20 จากแบบฝึกหัด 3.18 สมมติว่าสารละลายถูกสูบออกด้วยอัตรา 10 แกลลอนต่อนาที จงหาว่านานเท่าใดที่สารละลายทั้งหมดจะถูกสูบออกจากถังผสมนี้

บทที่ 4
สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสูง

4.1 ทฤษฎีสมการเชิงเส้นอันดับสูง

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาบทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานที่ใช้ในการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นอันดับสูง

4.1.1 ปัญหาค่าเริ่มต้นและปัญหาค่าขอบ

ในบทที่ 1 เราได้รู้จักปัญหาค่าเริ่มต้น (initial-value problem)

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x),$$

$$\text{โดยที่ } y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_1,\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

มาแล้ว และเราทราบว่าสามารถยืนยันการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นนี้ในกรณีที่ $n=1$ ได้ดังทฤษฎีบท 1.1

เช่นเดียวกันกับก่อนหน้านี้ เราสามารถยืนยันการมีอยู่จริงของเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นซึ่งเกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงบนช่วงของจำนวนจริงได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1 (การมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลย)
กำหนดให้ I เป็นช่วงใด ๆ และให้ $x_0 \in I$ พิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้น

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

โดยที่

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

ถ้า $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I และ $a_n(x) \neq 0$ สำหรับทุก $x \in I$ แล้ว ปัญหาค่าเริ่มต้นนี้มีผลเฉลย $y(x)$ เพียงหนึ่งเดียวบนช่วง I สำหรับทุกเงื่อนไขเริ่มต้น $y_0, y_1, \ldots, y_n$

ตัวอย่าง 4.1 จงใช้ทฤษฎีบท 4.1 แสดงว่าปัญหาค่าเริ่มต้น

$$3y''' + 5y'' - y' + 7y = 0,$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0 \text{ และ } y''(1) = 0$$

มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวบน $(-\infty, +\infty)$

วิธีทำ กำหนดให้ $I := (-\infty, +\infty)$ เนื่องจาก $a_3(x) = 3, a_2(x) = 2, a_1(x) = -1$, $a_0(x) = 7$ และ $g(x) = 0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I และ $a_n(x) \neq 0$ สำหรับทุก $x \in I$ นอกจากนี้ ชัดเจนว่า $1 \in I$ เพราะฉะนั้น โดยใช้ทฤษฎีบท 4.1 จึงสรุปได้ว่า ปัญหาค่าเริ่มต้นนี้มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวบนช่วง I ■

ตัวอย่าง 4.2 จงใช้ทฤษฎีบท 4.1 แสดงว่าฟังก์ชัน $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ เป็นผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' - 4y = 12x, \quad y(0) = 4, y'(0) = 1$$

วิธีทำ กำหนดให้ $I := (-\infty, +\infty)$ ในที่นี้จะละการแสดงว่าฟังก์ชัน $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นไว้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน โดย

จะ แสดง ว่า ปัญหา ค่า เริ่ม ต้น นี้ มี ผล เฉลย เพียง หนึ่ง เดียว ดังนี้ เนื่องจาก $a_2(x) = 1, a_1(x) = -4$, $a_0(x) = 0$ และ $g(x) = 12x$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I และ $a_n(x) \neq 0$ สำหรับทุก $x \in I$ นอกจากนี้ ชัดเจนว่า $0 \in I$ เพราะฉะนั้น โดยใช้ทฤษฎีบท 4.1 จึงสรุปได้ว่าฟังก์ชัน $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ เป็นผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวของปัญหาค่าเริ่มต้นบนช่วง I ■

สังเกตว่า สมมติฐาน $a_i(x), i = 1, 2, \ldots, n$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและ $a_n(x) \neq 0$ สำหรับทุก $x \in I$ มีความสำคัญต่อการยืนยันการมีเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยเป็นอย่างมาก ตัวอย่างเช่น สำหรับทุกค่าคงตัว $c \in \mathbb{R}$ จะได้ว่าฟังก์ชัน $y = cx^2 + x + 3$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 6, \qquad y(0) = 3, y'(0) = 1$$

บนช่วง $(-\infty, +\infty)$ (Verify?) ซึ่งทำให้ได้ว่าปัญหาค่าเริ่มต้นนี้มีผลเฉลยเป็นอนันต์ ทั้งนี้ หาก พิจารณา ปัญหา ค่า เริ่ม ต้น นี้ เทียบ กับ เงื่อนไข ใน ทฤษฎีบท 4.1 จะ พบ ว่า ปัญหาค่าเริ่มต้นนี้ไม่สอดคล้องกับทฤษฎีบท 4.1 กล่าวคือ ค่าฟังก์ชัน $a_2(0)$ มีค่าเป็นศูนย์นั่นเอง

ปัญหาอีกชนิดหนึ่งซึ่งเกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นอันดับสูงที่มีความสำคัญอย่างมากเช่นเดียวกับปัญหาค่าเริ่มต้นคือ **ปัญหาค่าขอบ** (boundary-value problem, BVP)

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

$$\text{โดยที่ } y(a) = y_0 \qquad \text{และ} \qquad y'(b) = y_1$$

ซึ่งเราจะเรียก $y(a) = y_0$ และ $y(b) = y_1$ ที่กำหนดให้นี้ว่า **เงื่อนไขขอบ** (boundary condition) นอกจากนี้เงื่อนไขขอบอาจเขียนอยู่ในรูปแบบอื่น เช่น

$$y'(a) = y_0 \quad \text{และ} \quad y(b) = y_1$$
$$y(a) = y_0 \quad \text{และ} \quad y'(b) = y_1$$
$$y'(a) = y_0 \quad \text{และ} \quad y'(b) = y_1$$

โดยที่ y_0 และ y_1 เป็นค่าคงตัว

ถึงแม้ว่าเงื่อนไขในปัญหาค่าขอบจะสอดคล้องกับทฤษฎีบท 4.1 อย่างไรก็ตาม เราไม่สามารถยืนยันได้ว่าผลเฉลยของปัญหาค่าขอบจะมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้นหรือไม่ ซึ่งในบางครั้งปัญหาค่าขอบอาจไม่มีผลเฉลยก็เป็นได้

ตัวอย่าง 4.3 พิจารณาวงศ์ของฟังก์ชัน $x = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$ ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x'' + 16x = 0$$

(Verify?) จงพิจารณาว่าปัญหาค่าขอบที่มีเงื่อนไขขอบที่กำหนดให้ต่อไปนี้มีผลเฉลยหรือไม่

1. เงื่อนไขขอบ $x(0) = 0$ และ $x(\pi/2) = 0$
2. เงื่อนไขขอบ $x(0) = 0$ และ $x(\pi/8) = 0$
3. เงื่อนไขขอบ $x(0) = 0$ และ $x(\pi/2) = 1$

วิธีทำ 1. จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0) = 0$ ทำให้ได้ว่า

$$0 = x(0) = c_1 \cos 4(0) + c_2 \sin 4(0) = c_1(1) + c_2(0) = c_1$$

นั่นคือ $x = c_2 \sin 4t$ และจากเงื่อนไขขอบ $x(\pi/2) = 0$ ส่งผลให้ได้ว่า

$$0 = x(\pi/2) = c_2 \sin 4(\pi/2) = c_2 \sin 2\pi$$

เนื่องจาก $\sin 2\pi = 0$ จึงได้ว่าความสัมพันธ์ข้างต้นนี้เป็นจริงสำหรับทุกค่าคงตัว c_2 เพราะฉะนั้น ปัญหาค่าขอบนี้มีผลเฉลยเป็นอนันต์

2. - 3. ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

4.1.2 สมการเชิงเส้นเอกพันธุ์

บทนิยาม 4.1 เราจะเรียกสมการเชิงเส้นอันดับ n

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \tag{4.1}$$

ว่า **สมการเอกพันธุ์** (homogeneous equation) และจะเรียกสมการเชิงเส้นอันดับ n

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \tag{4.2}$$

โดยที่ $g(x)\neq 0$ ว่า **สมการไม่เอกพันธุ์** (nonhomogeneous equation)

ตัวอย่างเช่น สมการเชิงเส้นอันดับสอง

$$2y''+y'-7y=0$$

เป็นสมการเอกพันธุ์ อย่างไรก็ตาม สมการเชิงเส้นอันดับสาม

$$x^2y'''+5y=e^x$$

เป็นสมการไม่เอกพันธุ์

ในการศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์และไม่เอกพันธุ์นั้น เราจะสมมติให้สมมติฐานต่อไปนี้เป็นจริงบนช่วง I ใด ๆ เสมอ

1. ฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ $a_i(x), i=1,\ldots,n$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง สำหรับทุก $x\in I$
2. $a_n(x)\neq 0$ สำหรับทุก $x\in I$

โดยปกติแล้ว จะใช้สัญลักษณ์ Dy แทนอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}$ ซึ่งเราจะเรียกสัญลักษณ์ D นี้ว่า **ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์** (differential operator) ตัวอย่างเช่น

$$D(\cos 2x) = -2\sin 2x$$

และ

$$D(5x^4 - 3x^2) = 20x^3 - 6x$$

ในทำนองเดียวกันนี้ เราสามารถเขียนอนุพันธ์อันดับสูงในรูปของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ได้ เช่น

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = D(Dy) =: D^2(y)$$

และในกรณีทั่วไป

$$D^n y := \frac{d^n y}{dx^n}$$

โดยที่ y เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้อันดับ n

ทั้งนี้ นิพจน์เชิงพหุนามของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ D ยังคงเป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ เช่น

$$D + 2$$

$$D^2 + 3D - 1$$

และ

$$5x^3D^3 - 6x^2D^2 + 4xD + 7$$

เป็นต้น ซึ่งในกรณีทั่วไป เราสามารถนิยาม **ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ n** (nth-order differential operator) หรือ **ตัวดำเนินการพหุนาม** (polynomial operator) เป็น

$$L := a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x) \tag{4.3}$$

สังเกตว่าตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ D สอดคล้องกับสมบัติเชิงเส้น (linearity) กล่าวคือ

กำหนดให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า

$$D(cf(x)) = cDf(x)$$

สำหรับค่าคงตัว c ใด ๆ และ

$$D(f(x)+g(x)) = Df(x)+Dg(x)$$

(Verify?)

ซึ่งส่งผลให้ตัวดำเนินการพหุนาม L สอดคล้องกับสมบัติเชิงเส้นตามไปด้วย (Why?) นั่นคือ หากเรากล่าวถึงตัวดำเนินการพหุนาม L พึงระลึกเสมอว่า L เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น

สังเกตว่า เราสามารถเขียนสมการเชิงเส้น (4.1) และ (4.2) ในรูปของตัวดำเนินการพหุนามได้เป็น

$$L(y) = 0$$

และ

$$L(y) = g(x)$$

ตามลำดับ และแน่นอนว่าเราสามารถเขียนสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ได้ เช่น

$$y'' + 5y' + 6y = 5x - 3$$

เขียนได้เป็น

$$D^2y + 5Dy + 6y = 5x - 3$$

หรือ

$$(D^2 + 5D + 6)y = 5x - 3$$

นั่นเอง

ในส่วนต่อไปนี้ เราจะกล่าวถึงการสร้างผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์จากผลเฉลยที่ทราบก่อนแล้ว กล่าวคือ ถ้าเรานำผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไปมา

รวมกัน แล้วผลรวมของผลเฉลยเหล่านั้นยังคงเป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์นั้นด้วย โดยจะเรียกหลักการนี้ว่า **หลักการทับซ้อน** (superposition principle) ซึ่งมีรายละเอียดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.2 (หลักการทับซ้อนของสมการเอกพันธุ์)
ให้ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์อันดับ n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

บนช่วง I จะได้ว่า ผลรวมเชิงเส้น

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

โดยที่ $c_i, i = 1\ldots,n$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์นี้ด้วย

การพิสูจน์ กำหนดให้ L เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ n จะได้ว่าสมการเอกพันธุ์เขียนได้เป็น

$$L(y) = 0$$

เราจะใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บนจำนวนนับ n ในการพิสูจน์ดังนี้

พิจารณากรณี $n = 2$ ดังนี้ สมมติให้ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ และเนื่องจาก $y_1(x)$ และ $y_2(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ $L(y) = 0$ จะได้ว่า

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2) = c_1(0) + c_2(0) = 0$$

สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ สมมติให้ $c_i, i = 1\ldots,k+1$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ และสมมติให้ $n = k$ เป็นจริง นั่นคือ $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ $L(y) = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} L(c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ky_k+c_{k+1}y_{k+1}) &= L(c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ky_k)+L(c_{k+1}y_{k+1}) \\ &= 0+c_{k+1}(0)=0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงสรุปได้ว่า สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ผลรวมเชิงเส้นของผลเฉลยเป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์อันดับ n นี้ด้วย ■

สังเกตว่าผลเฉลยชัด $y=0$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เสมอ (Why?)

ตัวอย่าง 4.4 จงแสดงว่า $y_1=x^2$ และ $y_2=x^2\ln x$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์

$$x^3y'''-2xy'+4y=0$$

จงแสดงว่าฟังก์ชัน $y=c_1x^2+c_2x\ln x$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์นี้บนช่วง $(0,+\infty)$

วิธีทำ ในที่นี้จะละการแสดงว่าฟังก์ชัน $y_1=x^2$ และ $y_2=x^2\ln x$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ที่กำหนดให้บนช่วง $(0,+\infty)$ ไว้สำหรับผู้เรียน เพราะฉะนั้น โดยหลักการทับซ้อน จึงได้ว่า ฟังก์ชัน $y=c_1x^2+c_2x\ln x$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์นี้บนช่วง $(0,+\infty)$ ■

ในส่วนต่อไป เราจะกล่าวถึงสมบัติของผลเฉลยที่สำคัญมากในการศึกษาสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ดังนี้

บทนิยาม 4.2 เราจะกล่าวว่าเซตของฟังก์ชัน $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ **ไม่อิสระเชิงเส้น** (linearly dependent) บนช่วง I ถ้า มีค่าคงตัว $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันและทำให้

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_nf_n(x)=0$$

สำหรับทุก $x \in I$ และเราจะเรียกเซตของฟังก์ชันที่ไม่เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้นบนช่วง I ว่า **อิสระเชิงเส้น** (linearly independent)

ตัวอย่าง 4.5 1. จงแสดงว่าเซตของฟังก์ชัน $f_1(x) = \sin 2x$ และ $f_2(x) = \sin x \cos x$ ไม่อิสระเชิงเส้นบน $(-\infty, +\infty)$

2. จงแสดงว่าเซตของฟังก์ชัน $f_1(x) = x$ และ $f_2(x) = |x|$ อิสระเชิงเส้นบน $(-\infty, +\infty)$

วิธีทำ 1. ให้ $x \in (-\infty, +\infty)$ พิจารณาโดยใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ จะพบว่า

$$0 = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \sin x \cos x = c_1 2 \sin x \cos x + c_2 \sin x \cos x$$

นั่นคือ มีค่าคงตัว $c_1 = 1$ และ $c_2 = -2$ ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันและทำให้สมการข้างต้นเป็นจริง เพราะฉะนั้น เซตของฟังก์ชันนี้ไม่อิสระเชิงเส้น

2. ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

สังเกตว่า ถ้าเซตของฟังก์ชัน $f_1(x)$ และ $f_2(x)$ อิสระเชิงเส้นบนช่วง I แล้ว $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ จะไม่เป็นค่าคงตัวบนช่วง I (Why?)

ตัวอย่าง 4.6 จงแสดงว่าเซตของฟังก์ชัน $f_1(x) = \cos^2 x, f_2(x) = \sin^2 x, f_3(x) = \sec^2 x$ และ $f_4(x) = \tan^2 x$ ไม่อิสระเชิงเส้นบนช่วง $(-\pi/2, \pi/2)$

วิธีทำ สังเกตว่า สำหรับทุก $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ ถ้า $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -1$ และ $c_4 = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) + c_4 f_4(x) &= \cos^2 x + \sin^2 x - \sec^2 x + \tan^2 x \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น เซตของฟังก์ชันเหล่านี้ไม่อิสระเชิงเส้น ■

สังเกตว่า ถ้ามีฟังก์ชันอย่างน้อยหนึ่งฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันอื่น ๆ ในเซตของฟังก์ชันที่พิจารณาได้ แล้วเซตของฟังก์ชันนั้น ๆ จะไม่อิสระเชิงเส้น

ตัวอย่าง 4.7 จงแสดงว่าเซตของฟังก์ชัน $f_1(x) = \sqrt{x} + 5, f_2(x) = \sqrt{x} + 5x, f_3(x) = x - 1$ และ $f_4(x) = x^4$ ไม่อิสระเชิงเส้นบน $(0, +\infty)$

วิธีทำ สังเกตว่า สำหรับทุก $x \in (0,+\infty)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_2(x) = \sqrt{x}+5x &= (\sqrt{x}+5)+5(x-1)+0(x^4) \\ &= 1f_1(x)+5f_3(x)+0f_4(x) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น เซตของฟังก์ชันเหล่านี้ไม่อิสระเชิงเส้น ■

สังเกตว่าการตรวจสอบเซตของฟัก์ชันว่าเป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่นั้นค่อนข้างยุ่งยาก ในลำดับต่อไป เราจะกล่าวถึงเครื่องมือที่สำคัญในการตรวจสอบความเป็นอิสระเชิงเส้นของเซตผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ได้ดังนี้

บทนิยาม 4.3 (รอนสเกียน)
ให้ $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้อันดับ $n-1$ ขึ้นไป เราจะเรียกตัวกำหนด (determinant)

$$W(f_1,f_2,\ldots,f_n) := \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

ว่า **รอนสเกียน** (Wronskian) ของฟังก์ชัน $f_1, f_2, \ldots, f_n$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้มีประโยชน์มากในการตรวจสอบความเป็นอิสระเชิงเส้นของเซตผลเฉลย

ทฤษฎีบท 4.3 (ผลเฉลยอิสระเชิงเส้น)
ให้ $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ เป็นเซตของผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์อันดับ n (4.1) บนช่วง I จะได้ว่า เซตของผลเฉลยอิสระเชิงเส้นบนช่วง I ก็ต่อเมื่อ รอนสเกียน

$$W(f_1,f_2,\ldots,f_n) \neq 0$$

สำหรับทุก $x \in I$

ในที่นี้ เราจะนิยามเซตของผลเฉลยอิสระเชิงเส้นของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับ n ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 4.4 (เซตผลเฉลยหลักมูล)
เราจะเรียกเซตของผลเฉลยอิสระเชิงเส้น $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ ใด ๆ ของสมการเอกพันธุ์อันดับ n (4.1) บนช่วง I ว่า **เซตผลเฉลยหลักมูล** (fundamental solution set) บนช่วง I

แน่นอนว่า คำถามที่จะต้องเกิดขึ้นคือ เซตผลเฉลยหลักมูลนี้มีอยู่จริงหรือไม่ ซึ่งเราสามารถยืนยันการมีอยู่จริงของเซตผลเฉลยหลักมูลสำหรับสมการเอกพันธุ์ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.4 (การมีอยู่จริงของเซตผลเฉลยหลักมูล)
สมการเอกพันธุ์อันดับ n (4.1) ที่นิยามบนช่วง I ใด ๆ จะมีเซตผลเฉลยหลักมูลเสมอ

ถ้าเราทราบเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเอกพันธุ์บนช่วง I ใด ๆ แล้วจะสามารถหาผลเฉลยทั่วไป (general solution) ของสมการนั้น ๆ ได้โดยใช้หลักการในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.5 (ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์)
ถ้า $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ เป็นเซตของผลเฉลยหลักมูลของสมการเอกพันธุ์อันดับ n (4.1) บนช่วง I แล้ว ผลเฉลยทั่วไปของสมการนี้บนช่วง I คือ

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

โดยที่ $c_i, i = 1, \ldots, n$ เป็นค่าคงตัว

จากทฤษฎีบทข้างต้น จะพบว่า ถ้า $y(x)$ เป็นผลเฉลยใด ๆ ของสมการเอกพันธุ์ (4.1) บนช่วง I ใด ๆ แล้ว เราจะสามารถหาค่าคงตัว $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ที่ทำให้

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

ได้เสมอ

ตัวอย่าง 4.8 จงแสดงว่า $\{e^{3x}, e^{-3x}\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเอกพันธุ์

$$y'' - 9y = 0$$

และจงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์นี้ด้วย

วิธีทำ ในที่นี้จะละการแสดงว่า $y_1 := e^{3x}$ และ $y_2 := e^{-3x}$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์นี้ไว้สำหรับผู้เรียน และจะแสดงว่าเซตผลเฉลย $\{e^{3x}, e^{-3x}\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลดังนี้ เนื่องจาก

$$y_1' := 3e^{3x} \quad \text{และ} \quad y_2' := -3e^{-3x}$$

จะได้รอนสเกียน

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

ดังนั้น $\{e^{3x}, e^{-3x}\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเอกพันธุ์นี้ เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 4.5 จึงสรุปได้ว่า ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์นี้ คือ

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x},$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

ตัวอย่าง 4.9 จงแสดงว่า $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับสาม

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

และจงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์นี้

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

4.1.3 สมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์

พิจารณาสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์อันดับ n

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \tag{4.4}$$

ถ้าเราสามารถหาฟังก์ชัน y_p ที่สอดคล้องกับสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์นี้ได้ แล้วจะเรียกฟังก์ชัน y_p นั้น ๆ ว่า **ผลเฉลยเฉพาะ** (particular solution) ของสมการไม่เอกพันธุ์ ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันค่าคงตัว $y_p=3$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y''-9y=27$$

(Verify?)

นอกจากนี้ หากเราทราบเซตผลเฉลยหลักมูล $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ ของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับ n

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \tag{4.5}$$

และทราบว่า y_p เป็นผลเฉลยเฉพาะใด ๆ ของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ (4.4) จะได้ว่าผลรวมเชิงเส้นของทุกผลเฉลยในเซตผลเฉลยหลักมูลกับผลเฉลยเฉพาะนั้น ๆ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ซึ่งมีรายละเอียดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.6 (ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์)
ถ้า y_p เป็นผลเฉลยเฉพาะใด ๆ ของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับ n (4.4) บนช่วง I และให้ $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ เป็นเซตของผลเฉลยหลักมูลของสมการเอกพันธุ์อันดับ n (4.5) บนช่วง I แล้ว ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์นี้บนช่วง I คือ

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p$$

โดยที่ $c_i, i = 1, \ldots, n$ เป็นค่าคงตัว

จากทฤษฎีบทข้างต้นนี้ จะพบว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์เกิดจากผลรวมของฟังก์ชัน $y_c := c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$ ซึ่งเป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ (4.5) กับฟังก์ชัน y_p ที่เป็นผลเฉลยเฉพาะ ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์คือ

$$y = y_c + y_p$$

และเรียกฟังก์ชัน y_c นี้ว่า **ฟังก์ชันเติมเต็ม** (complementary function) หรือ **ผลเฉลยเติมเต็ม** (complementary solution) ของสมการไม่เอกพันธุ์ (4.4)

ตัวอย่าง 4.10 จงแสดงว่า $y_p = -\frac{11}{12} - \frac{1}{2}x$ เป็นผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x$$

และจงใช้ผลเฉลยหลักมูลในตัวอย่าง 4.9 หาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์นี้

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นเครื่องมือสำคัญในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์

ทฤษฎีบท 4.7 (หลักการทับซ้อนสำหรับสมการไม่เอกพันธุ์)
ถ้า y_{p_i} เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g_i(x)$$

สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, k$ แล้ว

$$y_p := y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_k}$$

เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = \sum_{i=1}^{k} g_i(x)$$

การพิสูจน์ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ตัวอย่าง 4.11 จงแสดงว่า

1. $y_{p_1} = -4x^2$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8$
2. $y_{p_2} = e^{2x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y'' - 3y' + 4y = 2e^{2x}$
3. $y_{p_1} = xe^x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y'' - 3y' + 4y = 2xe^x - e^x$

และจงใช้หลักการทับซ้อนของสมการไม่เอกพันธุ์หาผลเฉลยเฉพาะของ

$$y'' - 3y' + 4y = -16x^2 + 24x - 8 + 2e^{2x} + 2xe^x - e^x$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

แบบฝึกหัด

กำหนดให้วงศ์ของฟังก์ชันที่เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นต่อไปนี้ จงหาสมาชิกของวงศ์ที่เป็นเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นนั้น ๆ

แบบฝึกหัด 4.1 $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$, $(-\infty, +\infty)$; $y'' - y = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$

แบบฝึกหัด 4.2 $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-x}$, $(-\infty, +\infty)$; $y'' - 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$

แบบฝึกหัด 4.3 $y = c_1x + c_2x\ln x$, $(0, +\infty)$; $x^2y'' - xy' + y = 0$, $y(1) = 3, y'(1) = -1$

กำหนดให้ $y = c_1e^x\cos x + c_2e^x\sin x$ เป็นวงศ์ของฟังก์ชันที่เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้น $y'' - 2y' + 2y = 0$ บนช่วง $(-\infty, +\infty)$ จงพิจารณาว่ามีฟังก์ชันในวงศ์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบที่กำหนดให้ต่อไปนี้หรือไม่ ถ้ามี จงระบุสมาชิกนั้น

แบบฝึกหัด 4.4 $y(0) = 1, y'(\pi) = 0$

แบบฝึกหัด 4.5 $y(0) = 1, y(\pi) = -1$

แบบฝึกหัด 4.6 $y(0) = 1, y(\pi/2) = 1$

แบบฝึกหัด 4.7 $y(0) = 0, y(\pi) = 0$

จงแสดงว่าเซตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเอกพันธุ์บนช่วงที่กำหนดให้ และจงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์นั้น ๆ

แบบฝึกหัด 4.8 $\{e^{-3x}, e^{4x}\}$, $y'' - y' - 12y = 0$, $(-\infty, +\infty)$

แบบฝึกหัด 4.9 $\{\cosh 2x, \sinh 2x\}$, $y'' - 4y = 0$, $(-\infty, +\infty)$

แบบฝึกหัด 4.10 $\{e^x\cos 2x, e^x\sin 2x\}$, $y'' - 2y' + 5y = 0$, $(-\infty, +\infty)$

แบบฝึกหัด 4.11 $\{e^{x/2}, xe^{x/2}\}$, $4y'' - 4y' + y = 0$, $(\infty, +\infty)$

แบบฝึกหัด 4.12 $\{x^3, x^4\}$, $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$, $(0, +\infty)$

แบบฝึกหัด 4.13 $\{\cos(\ln x), \sin(\ln x)\}$, $x^2y'' + xy' + y = 0$, $(0, +\infty)$

แบบฝึกหัด 4.14 $\{x, x^{-2}, x^{-2}\ln x\}, \quad x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0, \quad (0, +\infty)$

แบบฝึกหัด 4.15 $\{1, x, \cos x, \sin x\}, \quad y^{(4)} + y'' = 0, \quad (-\infty, +\infty)$

จงแสดงว่าวงศ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์บนช่วงที่กำหนดให้นั้น ๆ

แบบฝึกหัด 4.16 $y = c_1\cos x + c_2\sin x + x\sin x + (\cos x)\ln(\cos x)$,
$y'' + y = \sec x, (-\pi/2, \pi/2)$

แบบฝึกหัด 4.17 $y = c_1x^{-1/2} + c_2x_{-1} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x$,
$2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x, (0, +\infty)$

แบบฝึกหัด 4.18 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $y_{p_1} = 3e^{2x}$ และ $y_{p_2} = x^2 + 3x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ

$$y'' - 6y' + 5y = -9e^{2x}$$

และ

$$y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16$$

แบบฝึกหัด 4.19 จากแบบฝึกหัด 4.18 จงหาผลเฉลยเฉพาะของ

$$y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16 - 9e^{2x}$$

และ

$$y'' - 6y' + 5y = -10x^2 - 6x + 32 + e^{2x}$$

4.2 การลดทอนอันดับ

พิจารณาสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{4.6}$$

เราทราบมาแล้วว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ (4.6) อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้น $y = c_1y_1 + c_2y_2$ โดยที่ y_1 และ y_2 เป็นผลเฉลยในเซตผลเฉลยหลักมูลบนช่วง I

สมมติว่าเราทราบว่า $y_1(x)$ เป็นผลเฉลยที่ไม่เป็นผลเฉลยชัดของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ (4.6) บนช่วง I แล้วจะสามารถหาผลเฉลยที่สอง $y_2(x)$ จากผลเฉลย $y_1(x)$ ที่ทราบอยู่ก่อนได้ดังการพิจารณาต่อไปนี้

เนื่องจากผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ (4.6) อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้น $y = c_1y_1 + c_2y_2$ โดยที่ y_1 และ y_2 อิสระเชิงเส้นต่อกันบนช่วง I นั่นคือ จะได้ว่าฟังก์ชัน $\frac{y_2(x)}{y_1(x)}$ ไม่เป็นค่าคงตัวบนช่วง I ซึ่งในที่นี้ สมมติให้

$$u(x) := \frac{y_2(x)}{y_1(x)}$$

นั่นคือ

$$y_2(x) = u(x)y_1(x)$$

เราสามารถหาฟังก์ชัน $u(x)$ ได้โดยการแทนค่าฟังก์ชัน $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ ในสมการเชิงอนุพันธ์ (4.6) ซึ่งจะให้สมการเชิงอนุพันธ์ (4.6) ลดรูปเป็นสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับหนึ่ง จากนั้นจะหาผลเฉลยของสมการอันดับหนึ่งนี้ ซึ่งเรียกวิธีการดังกล่าวนี้ว่า **การลดทอนอันดับ** (reduction of order)

ตัวอย่างเช่น พิจารณาสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์

$$y'' - y = 0$$

จะพบว่าฟังก์ชัน $y_1 = e^x$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้บนช่วง $(-\infty, +\infty)$ และเราจะหาผลเฉลย y_2 ดังนี้ กำหนดให้ $y_2 = uy_1$ นั่นคือ $y_2 = ue^x$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$y_2' = ue^x + u'e^x$$

หรือ

$$y_2'' = ue^x + 2u'e^x + u''e^x$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} y_2'' - y_2 &= (ue^x + 2u'e^x + u''e^x) - (ue^x) \\ &= e^x(2u' + u'') \end{aligned}$$

เนื่องจาก y_2 เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ เราจึงได้ว่า

$$0 = y_2'' - y_2 = e^x(2u' + u'')$$

และเนื่องจาก $e^x \neq 0$ เสมอ ทำให้ได้ว่า

$$u'' + 2u' = 0$$

กำหนดให้ $w := u'$ จะได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์นี้กลายเป็น

$$w' + 2w = 0$$

ซึ่งเป็นสมการเอกพันธุ์อันดับหนึ่งและสามารถหาผลเฉลยได้โดยง่ายดังนี้ พิจารณาตัวประกอบปริพันธ์ $e^{\int 2dx} = e^{2x}$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[e^{2x}w] &= 0 \\ e^{2x}w &= c_1 \\ w &= c_1e^{-2x} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $w = u'$ จึงได้ว่า

$$\frac{du}{dx} = c_1 e^{-2x}$$

นั่นคือ

$$u = \frac{c_1}{-2} e^{-2x} + c_2$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} y_2 = ue^x &= \left(\frac{c_1}{-2} e^{-2x} + c_2 \right) e^x \\ &= \frac{c_1}{-2} e^{-x} + c_2 e^x \end{aligned}$$

กำหนดให้ $c_2 = 0$ และ $c_1 = -2$ (Why?) จะได้ว่า ผลเฉลยที่ต้องการคือ

$$y_2 = e^{-x}$$

เพราะฉะนั้น เราจึงได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์อันดับสองนี้คือ

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

ตัวอย่าง 4.12 กำหนดให้ $y_1 = x^3$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์อันดับสอง

$$x^2 y'' - 6y = 0$$

จงใช้การลดทอนอันดับหาผลเฉลยทั่วไปบนช่วง $(0, +\infty)$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ในกรณีทั่วไป เราสามารถพิจารณาการลดทอนอันดับได้ดังนี้ จากสมการเอกพันธุ์อันดับสองในรูปมาตรฐาน

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

ที่นิยามบนช่วง I สมมติให้ y_1 เป็นผลเฉลยที่ทราบแล้วของ (4.7) บนช่วง I และไม่เป็นผลเฉลยชัด กำหนดให้ $y_2 := uy_1$ จะได้ว่า

$$y_2' = uy_1' + u'y_1$$

และ

$$y_2'' = u'y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} 0 = y_2'' + Py_2' + Qy_2 &= u'y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + Puy_1' + Pu'y_1 + Quy_1 \\ &= u(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + u''y_1 + u'(2y_1' + Py_1) \end{aligned}$$

และเนื่องจาก $y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0$ (Why?) เราจึงได้ว่า

$$u''y_1 + u'(2y_1' + Py_1) = 0$$

กำหนดให้ $w := u'$ จะได้สมการเอกพันธุ์อันดับหนึ่ง

$$y_1w' + (2y_1' + Py_1)w = 0$$

หรือ

$$w' + \left(\frac{2y' + Py_1}{y_1}\right)w = 0$$

ซึ่งจะได้ตัวประกอบปริพันธ์เป็น

$$e^{\int\left(\frac{2y'+Py_1}{y_1}\right)dx} = y_1^2 e^{\int P dx} \quad \text{(Verify?)}$$

นั่นคือ

$$\frac{d}{dx}[y_1^2 e^{\int P dx} w] = 0$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$u = c_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} dx + c_2 \qquad \text{(Verify?)}$$

เพราะฉะนั้น

$$y_2 = uy_1 = c_1 y_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} dx + c_2 y_1$$

กำหนดให้ $c_2 = 0$ และ $c_1 = 1$ (Why?) จึงได้ว่า

ผลเฉลยที่สองคือ

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2} dx$$

ซึ่งแน่นอนว่า เราสามารถแสดงว่า $\{y_1, y_2\}$ ที่ได้นี้เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเอกพันธุ์อันดับสองที่พิจารณานี้ (Verify?)

ตัวอย่าง 4.13 กำหนดให้ $y_1 = x^2$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์อันดับสอง

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปบนช่วง $(0, +\infty)$

วิธีทำ กำหนดให้ $x \in (0, +\infty)$ จากสมการเอกพันธุ์ที่กำหนดให้ สามารถจัดให้อยู่ในรูปมาตรฐานได้เป็น

$$y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{4}{x^2} y = 0$$

นั่นคือ $P(x) = -\frac{3}{x}$ และเนื่องจากผลเฉลย $y_1 = x^2$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2} dx \\
&= x^2 \int \frac{e^{-\int \left(-\frac{3}{x}\right) dx}}{(x^2)^2} dx \\
&= x^2 \int \frac{e^{\ln x^3}}{x^4} dx = x^2 \int \frac{x^3}{x^4} dx = x^2 \int \frac{1}{x} dx = x^2 \ln x
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์นี้คือ $y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x$ โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

ตัวอย่าง 4.14 กำหนดให้ $y_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์อันดับสอง

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปบนช่วง $(0, \pi)$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

แบบฝึกหัด

จงใช้ผลเฉลย y_1 ที่กำหนดให้หาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์อันดับสองต่อไปนี้บนช่วงที่นิยาม

แบบฝึกหัด 4.20 $y'' + 4y' = 0; \qquad y_1 = 0$

แบบฝึกหัด 4.21 $y'' - y' = 0; \qquad y_1 = 1$

แบบฝึกหัด 4.22 $y'' - 4y' + 4y = 0; \qquad y_1 = e^{2x}$

แบบฝึกหัด 4.23 $y'' + 2y' + y = 0; \qquad y_1 = xe^{-x}$

แบบฝึกหัด 4.24 $y'' + 16y = 0; \qquad y_1 = \cos 4x$

แบบฝึกหัด 4.25 $y'' + 9y = 0; \qquad y_1 = \sin 3x$

แบบฝึกหัด 4.26 $9y'' - 12y' + 4y = 0; \qquad y_1 = e^{2x/3}$

แบบฝึกหัด 4.27 $6y'' + y - y' = 0; \qquad y_1 = e^{x/3}$

แบบฝึกหัด 4.28 $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0; \qquad y_1 = x^2$

แบบฝึกหัด 4.29 $xy'' + y' = 0; \qquad y_1 = \ln x$

แบบฝึกหัด 4.30 $4x^2y'' + y = 0; \qquad y_1 = \sqrt{x}\ln x$

แบบฝึกหัด 4.31 $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0; \qquad y_1 = x + 1$

แบบฝึกหัด 4.32 $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0; \qquad y_1 = 1$

แบบฝึกหัด 4.33 $x^2y'' - xy' + 2y = 0; \qquad y_1 = x\sin(\ln x)$

แบบฝึกหัด 4.34 $(1 + 2x)y'' + 4xy' - 4y = 0; \qquad y_1 = e^{-2x}$

4.3 สมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

พิจารณาสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์

$$a\frac{dy}{dx}+by=0 \tag{4.7}$$

โดย a และ b เป็นค่าคงตัวที่ $a \neq 0$ จะพบว่าสมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการแยกตัวแปรได้และเป็นสมการเชิงเส้น ซึ่งสามารถหาผลเฉลยได้โดยการใช้ตัวประกอบปริพันธ์ ในหัวข้อนี้ เราจะพิจารณาวิธีการหาผลเฉลยอีกแนวทางหนึ่งดังนี้ จากสมการเชิงอนุพันธ์ (4.7) สามารถจัดรูปได้เป็น

$$\frac{dy}{dx}=\left(-\frac{b}{a}\right)y$$

สังเกตว่าฟังก์ชันที่เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ต้องมีสมบัติว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันดังกล่าวต้องเป็นผลคูณของค่าคงตัวบางค่ากับฟังก์ชันดังกล่าวนี้ ๆ ซึ่งแน่นอนว่าฟังก์ชันที่มีสมบัตินี้ควรจะอยู่ในรูปของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง e^{mx} สำหรับบางค่า m

เพราะฉะนั้น ถ้าเราแทนค่า $y=e^{mx}$ และ $y'=me^{mx}$ ในสมการเชิงอนุพันธ์ (4.7) จะได้ว่า

$$ame^{mx}+be^{mx}=0$$

นั่นคือ

$$e^{mx}(am+b)=0$$

และเนื่องจาก $e^{mx}\neq 0$ เสมอ จึงได้ว่า ผลเฉลยของ (4.7) จะขึ้นอยู่กับค่า m ที่เป็นรากของพหุนาม $am+b$ นั่นเอง และแน่นอนว่าในที่นี้ $y=e^{\frac{-b}{a}x}$ เป็นผลเฉลยของ (4.7) ส่งผลให้ได้ว่า $y=ce^{\frac{-b}{a}x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปสมการเชิงอนุพันธ์ $a\frac{dy}{dx}+by=0$ นั่นเอง

ในทำนองเดียวกันนี้ เราสามารถพิจารณาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์อันดับ n โดยการเริ่มจากสมการเชิงอนุพันธ์อับดับสองดังนี้ พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{4.8}$$

โดยที่ a, b และ c เป็นค่าคงตัวที่ $a \neq 0$ พิจารณาผลเฉลยที่อยู่ในรูป $y = e^{mx}$ จะได้ว่า

$$y' = me^{mx}$$

และ

$$y'' = m^2 e^{mx}$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

นั่นคือ

$$e^{mx}\left(am^2 + bm + c\right) = 0$$

เนื่องจาก $e^{mx} \neq 0$ เสมอ จึงได้ว่า ผลเฉลย $y = e^{mx}$ นี้ขึ้นอยู่กับค่า m ที่เป็นรากของพหุนามดีกรีสอง

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{4.9}$$

ซึ่งจะเรียกสมการ (4.9) นี้ว่า **สมการช่วย** (auxiliary equation) หรือ **สมการลักษณะเฉพาะ** (characteristic equation) ของสมการเชิงอนุพันธ์ (4.8)

สังเกตว่า ผลเฉลยของ (4.9) คือ

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{และ} \quad m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

เพราะฉะนั้น พิจารณาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (4.9) ได้เป็น 3 กรณี คือ

(i) ราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน ($b^2 - 4ac > 0$)

(ii) ราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน ($b^2 - 4ac = 0$)

(iii) ราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนซ้อนสังยุค ($b^2 - 4ac < 0$)

กรณี 1 *รากเป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน*

เนื่องจากสมการช่วยมีรากจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน m_1 และ m_2 จึงได้ว่า

$$y_1 = e^{m_1x} \quad \text{และ} \quad y_2 = e^{m_2x}$$

เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (4.8) และเนื่องจาก e^{m_1x} และ e^{m_2x} อิสระเชิงเส้นบน $(-\infty,+\infty)$ (Verify?) ส่งผลให้ได้ว่า $\{e^{m_1x}, e^{m_2x}\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเชิงอนุพันธ์ (4.8) เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของ (4.8) บน $(-\infty,+\infty)$ คือ

$$\boxed{y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}}$$

กรณี 2 *รากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน*

เนื่องจาก $m_1 = m_2$ จึงได้ว่า $y = e^{m_1x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (4.8) จากการลดทอนอันดับ จะได้ผลเฉลยที่สองของสมการ (4.8) คือ

$$\begin{aligned} y_2 &= e^{m_1x}\int \frac{e^{-\int \frac{b}{a}dx}}{e^{2m_1x}}dx \\ &= e^{m_1x}\int e^{\left(-\frac{b}{a}-2m_1\right)x}dx \end{aligned} \tag{4.10}$$

และเนื่องจาก $b^2 - 4ac = 0$ จะได้ว่า $m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a}$ ซึ่งทำให้ได้ว่าความสัมพันธ์ (4.10) กลายเป็น

$$\begin{aligned} y_2 &= e^{m_1x}\int e^{\left(-\frac{b}{a}-\left(-\frac{b}{a}\right)\right)x}dx \\ &= e^{m_1x}\int 1dx \\ &= xe^{m_1x} \end{aligned}$$

เนื่องจากผลเฉลย e^{m_1x} และ xe^{m_1x} อิสระเชิงเส้นบน $(-\infty,+\infty)$ (Verify?) จึงได้ว่า $\{e^{m_1x}, xe^{m_1x}\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเชิงอนุพันธ์ (4.8) เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของ (4.8) บน $(-\infty,+\infty)$ คือ

$$\boxed{y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x}}$$

กรณี 3 *รากเป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค*

เนื่องจาก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน นั่นคือ

$$m_1 = \alpha + i\beta \quad \text{และ} \quad m_2 = \alpha - i\beta$$

โดยที่ α และ β เป็นค่าคงตัวและ $i^2 = -1$ ซึ่งส่งผลให้ได้ว่า (ในทำนองเดียวกับกรณี 1) ผลเฉลยทั่วไปของ (4.8) บน $(-\infty, +\infty)$ คือ

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x} \tag{4.11}$$

ซึ่งสามารถเขียนผลเฉลยนี้ในรูปฟังก์ชันของจำนวนจริงได้ดังนี้

จากสูตรของออยเลอร์

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

โดยที่ θ เป็นค่าคงตัวใด ๆ จึงได้ว่า

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x \qquad \text{(Verify?)}$$

และ

$$e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x \qquad \text{(Verify?)}$$

นั่นคือ สมการ (4.11) จะกลายเป็น

$$\begin{aligned} y &= e^{\alpha x}[C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}] \\ &= e^{\alpha x}[C_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)] \\ &= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + (C_1 - C_2)i\sin\beta x] \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$y = e^{\alpha x}[c_1\cos\beta x + c_2 i\sin\beta x]$$

โดยที่ $c_1 := C_1 + C_2$ และ $c_2 := C_1 - C_2$ ตามลำดับ

สังเกตว่า ถ้าฟังก์ชันเชิงซ้อนสังยุค $z = u(x) + iv(x)$ เป็นผลเฉลยของ (4.8) จะได้ว่า

$$z' = u' + iv'$$

และ

$$z'' = u'' + iv''$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$a(u'' + iv'') + b(u' + iv') + c(u + iv) = 0$$

หรือ

$$(au'' + bu' + cu) + i(av'' + bv' + cv) = 0$$

นั่นคือ

$$au'' + bu' + cu = 0$$

และ

$$av'' + bv' + cv = 0$$

ซึ่งหมายความว่า $u(x)$ และ $v(x)$ เป็นผลเฉลยของ (4.8)

เพราะฉะนั้น

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad \text{และ} \qquad e^{\alpha x}\sin\beta x$$

เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (4.8)

เนื่องจาก $e^{\alpha x}\cos\beta x$ และ $e^{\alpha x}\sin\beta x$ อิสระเชิงเส้นบน $(-\infty, +\infty)$ (Verify?) จึงได้ว่า $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเชิงอนุพันธ์ (4.8) เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของ (4.8) บน $(-\infty, +\infty)$ คือ

$$\boxed{y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x}$$

จากการวิเคราะห์ข้างต้น เราสามารถสรุปวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์อันดับสองได้ดังนี้

วิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์อันดับสอง
พิจารณาสมการเอกพันธุ์

$$ay'' + by' + cy = 0$$

โดยที่ a, b และ c เป็นค่าคงตัวที่ $a \neq 0$

1. หาสมการช่วย
$$am^2 + bm + c = 0$$
2. หารากทั้งหมดของสมการช่วย
3. พิจารณาผลเฉลยทั่วไป ดังนี้

(i) ถ้าราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน แล้วผลเฉลยทั่วไปบน $(-\infty, +\infty)$ คือ

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

(ii) ถ้าราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน แล้วผลเฉลยทั่วไปบน $(-\infty, +\infty)$ คือ

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_2 x}$$

(iii) ราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค โดยที่ $m_1 = \alpha + i\beta$ และ $m_2 = \alpha - i\beta$ แล้วผลเฉลยทั่วไปบน $(-\infty, +\infty)$ คือ

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

ตัวอย่าง 4.15 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับสอง

1. $2y'' - 5y' - 3y = 0$
2. $y'' - 10y' + 25y = 0$
3. $y'' + 4y' + 7y = 0$

วิธีทำ 1. จากสมการเชิงอนุพันธ์ $2y'' - 5y' - 3y = 0$ ที่กำหนดให้ จะได้สมการช่วย คือ

$$2m^2 - 5m - 3 = 0$$

การแยกตัวประกอบของพหุนามฝั่งซ้ายมือ ทำให้ได้ว่า

$$(2m+1)(m-3) = 0$$

ดังนั้น รากของสมการช่วย คือ

$$m_1 = -\frac{1}{2} \qquad \text{และ} \qquad m_2 = 3$$

ซึ่งรากเป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ คือ

$$y = c_1 e^{-\frac{x}{2}} + c_2 e^{3x}$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2. จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' - 10y' + 25y = 0$ ที่กำหนดให้ จะได้สมการช่วย คือ

$$m^2 - 10m + 25 = 0$$

การแยกตัวประกอบของพหุนามฝั่งซ้ายมือ ทำให้ได้ว่า

$$(m-5)(m-5) = 0$$

ดังนั้น รากของสมการช่วย คือ

$$m_1 = 5 \qquad \text{และ} \qquad m_2 = 5$$

ซึ่งรากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ คือ

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

3. จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' + 4y' + 7y = 0$ ที่กำหนดให้ จะได้สมการช่วย คือ

$$m^2 + 4m + 7 = 0$$

จึงได้ว่า รากของสมการช่วย คือ

$$m_1 = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4(1)(7)}}{2(1)} \qquad \text{และ} \qquad m_2 = \frac{-4 - \sqrt{4^2 - 4(1)(7)}}{2(1)}$$

หรือ

$$m_1 = \frac{-4 + \sqrt{12}i}{2} \qquad \text{และ} \qquad m_2 = \frac{-4 - \sqrt{12}i}{2}$$

นั่นคือ

$$m_1 = -2 + 3i \qquad \text{และ} \qquad m_2 = -2 - 3i$$

ซึ่งรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ คือ

$$y = c_1 e^{-2x} \cos \sqrt{3}x + c_2 e^{-2x} \sin \sqrt{3}x$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

ตัวอย่าง 4.16 กำหนดให้ k เป็นค่าคงตัวใด ๆ จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับสอง

$$y'' + k^2 y = 0$$

และ

$$y'' - k^2 y = 0$$

วิธีทำ จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' + k^2 y = 0$ ที่กำหนดให้ จะได้สมการช่วย คือ

$$m^2 + k^2 = 0$$

จึงได้ว่า รากของสมการช่วย คือ

$$m_1 = ki \quad \text{และ} \quad m_2 = -ki$$

ซึ่งรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ $y'' + k^2 y = 0$ คือ

$$y = c_1 e^{0x} \cos kx + c_2 e^{0x} \sin kx$$

หรือ

$$y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ในอีกด้านหนึ่ง จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y'' - k^2 y = 0$ ที่กำหนดให้ จะได้สมการช่วย คือ

$$m^2 - k^2 = 0$$

จึงได้ว่า รากของสมการช่วย คือ

$$m_1 = k \quad \text{และ} \quad m_2 = -k$$

ซึ่งรากเป็นจำนวนจริงไม่ซ้ำกัน เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ คือ

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ทั้งนี้ หากเราแทน $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ และ $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -\frac{1}{2}$ จะได้ว่า

$$y_1 = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} = \cosh kx$$

และ

$$y_2 = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = \sinh kx$$

เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ $y'' - k^2 y = 0$ อีกด้วย

เพราะฉะนั้น โดยหลักการทับซ้อนสำหรับสมการเอกพันธุ์ จึงสรุปได้ว่า

$$y = c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ $y'' - k^2 y = 0$ ด้วย ■

ตัวอย่าง 4.17 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$4y'' + 4y' + 17y = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 2$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ในทำนองเดียวกับข้างต้น การหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์อันดับสูง

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{4.12}$$

โดยที่ $a_i, i = 1, \ldots, n$ เป็นค่าคงตัว คือการหารากของพหุนามดีกรี n

$$a_n(x)m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1(x)m + a_0(x) = 0$$

ถ้ารากทั้งหมดเป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน จะได้ว่า ผลเฉลยทั่วไปของ (4.12) คือ

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$$

ในกรณีที่มีราก $m_1 = m_2 = \cdots = m_k$ ซ้ำกันจำนวน k ราก ส่วนรากที่เหลือ $n-k$ ราก แตกต่างกันทั้งหมด จะได้ว่า ผลเฉลยทั่วไปของ (4.12) คือ

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + \cdots + c_k x^{k-1} e^{m_1 x} + c_{k+1} e^{m_{k+1} x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$$

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.18 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์อันดับสาม

$$y''' + 3y'' - 4y = 0$$

วิธีทำ จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y''' + 3y'' - 4y = 0$ ที่กำหนดให้ จะได้สมการช่วย คือ

$$m^3 + 3m^2 - 4 = 0$$

จึงได้ว่า รากของสมการช่วย คือ

$$m_1 = 1, \quad m_2 = -2 \quad \text{และ} \quad m_3 = -2$$

(Verify?) ซึ่งรากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกันสองราก เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ คือ

$$y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3xe^{-2x}$$

โดยที่ c_1, c_2 และ c_3 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

ตัวอย่าง 4.19 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์อันดับสาม

$$3y''' - 19y'' + 36y' - 10y = 0$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ในกรณีที่รากซ้ำกันจำนวน k ราก กล่าวคือ

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_k = \alpha + i\beta$$

จะได้ว่าสังยุค $\alpha - i\beta$ ของรากดังกล่าวนั้นเป็นรากอีก k รากด้วย นั่นคือ

$$m_{k+1} = m_{k+2} = \cdots = m_2k = \alpha - i\beta$$

และผลเฉลยทั่วไปจะเป็นผลรวมเชิงเส้นของผลเฉลย

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}x\cos\beta x, \ldots, e^{\alpha x}x^{k-1}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, e^{\alpha x}x\sin\beta x, \ldots, e^{\alpha x}x^{k-1}\sin\beta x$$

และผลเฉลยที่เหลืออีก $n-2k$ ตัว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.20 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์อันดับสี่

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

วิธีทำ จากสมการเชิงอนุพันธ์ $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ ที่กำหนดให้ จะได้สมการช่วย คือ

$$m^4 + 2m^2 + 1 = 0$$

จึงได้ว่า รากของสมการช่วย คือ

$$m_1 = i, \quad m_2 = i, \quad m_3 = -i \quad \text{และ} \quad m_4 = -i$$

(Verify?) ซึ่งรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ซ้ำกันสองชุด เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ คือ

$$y = c_1e^{0x}\cos x + c_2e^{0x}\sin x + c_3xe^{0x}\cos x + c_4xe^{0x}\sin x$$

หรือ

$$y = (c_1 + c_3x)\cos x + (c_2 + c_4x)\sin x$$

โดยที่ c_1, c_2, c_3 และ c_4 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

ตัวอย่าง 4.21 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' - 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 2$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์อันดับสองต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 4.35 $3y'' - y' = 0$

แบบฝึกหัด 4.36 $2y'' + 5y' = 0$

แบบฝึกหัด 4.37 $y'' - 16y = 0$

แบบฝึกหัด 4.38 $y'' + 9y = 0$

แบบฝึกหัด 4.39 $4y'' + y = 0$

แบบฝึกหัด 4.40 $y'' - 3y' + 2y = 0$

แบบฝึกหัด 4.41 $y'' - y' - 6y = 0$

แบบฝึกหัด 4.42 $\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0$

แบบฝึกหัด 4.43 $\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 25y = 0$

แบบฝึกหัด 4.44 $y'' + 3y' - 5y = 0$

แบบฝึกหัด 4.45 $y'' + 4y' - y = 0$

แบบฝึกหัด 4.46 $12y'' - 5y' - 2y = 0$

แบบฝึกหัด 4.47 $8y'' + 2y' - y = 0$

แบบฝึกหัด 4.48 $2y'' - 3y' + 4y = 0$

แบบฝึกหัด 4.49 $2y'' + 2y' + y = 0$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์อันดับสูงต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 4.50 $y''' - 4y'' - 4y' = 0$

แบบฝึกหัด 4.51 $4y''' + 4y'' + y' = 0$

แบบฝึกหัด 4.52 $y''' - y = 0$

แบบฝึกหัด 4.53 $y''' + 5y'' = 0$

แบบฝึกหัด 4.54 $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$

แบบฝึกหัด 4.55 $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$

แบบฝึกหัด 4.56 $y''' - y'' - 4y = 0$

แบบฝึกหัด 4.57 $y''' + y'' - 2y = 0$

แบบฝึกหัด 4.58 $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

แบบฝึกหัด 4.59 $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

แบบฝึกหัด 4.60 $y^{(4)} + y''' + y'' = 0$

แบบฝึกหัด 4.61 $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

แบบฝึกหัด 4.62 $16y^{(4)} + 24y^{(2)} + 9y = 0$

แบบฝึกหัด 4.63 $y^{(4)} - 7y'' - 18y = 0$

แบบฝึกหัด 4.64 $y^{(5)} + 5y^{(4)} - 2y''' - 10y'' + y' + 5y = 0$

4.4 สมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

เราทราบแล้วว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \tag{4.13}$$

จะอยู่ในรูป

$$y=y_c+y_p$$

โดยที่ y_c ผลเฉลยเติมเต็มที่เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \tag{4.14}$$

ซึ่งในหัวข้อที่ผ่านมาได้ศึกษาการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (4.14) นี้ในกรณีที่สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวมาแล้ว และ y_p เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ (4.13) หากยังจำได้ ในหัวข้อ 4.1 เราสามารถใช้การตรวจพินิจตรวจสอบว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงเส้นที่พิจารณาหรือไม่ ในหัวข้อนี้จะให้ความสนใจกับการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว กล่าวคือจะศึกษาวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะ y_p ของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ ใน 2 แนวทาง คือ (1) การเทียบสัมประสิทธิ์ตามหลักการทับซ้อน และ (2) การแปรตัวแปรเสริม ดังนี้

4.4.1 การหาผลเฉลยโดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ตามหลักการทับซ้อน

ในหัวข้อย่อยนี้ เราจะศึกษาวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะ y_p โดยการพิจารณารูปแบบของฟังก์ชันที่สัมพันธ์กับฟังก์ชัน $g(x)$ ในสมการเชิงอนุพันธ์ (4.13) ซึ่งจะเรียกหลัก

การนี้ว่า **วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์** (method of undetermined coefficients) โดยมีข้อตกลงเบื้องต้น คือ

ข้อตกลงเบื้องต้น

1. สัมประสิทธิ์ $a_i, i = 0, 1, \ldots, n$ เป็นค่าคงตัว
2. ฟังก์ชัน $g(x)$ เป็นค่าคงตัว พหุนาม ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ หรือผลรวมและผลคูณของฟังก์ชันเหล่านี้เท่านั้น

ตัวอย่างของฟังก์ชัน $g(x)$ ที่สอดคล้องกับข้อตกลงเบื้องต้น เช่น

$$g(x) = 5 \qquad g(x) = 3x - 2 + e^{-4x} \qquad g(x) = \cos 2x - 3\sin x$$

$$g(x) = \sin 3x - 5x\cos 2x \qquad \text{และ} \qquad g(x) = xe^x\cos x + (x^2+5)e^{-3x}$$

เป็นต้น ทั้งนี้ เราไม่สามารถใช้การเทียบสัมประสิทธิ์เพื่อหาผลเฉลยเฉพาะ y_p ในกรณี เช่น

$$g(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \ln x \qquad g(x) = \tan x \qquad \text{และ} \qquad \sin^{-1} x$$

เป็นต้น

หากเราลองพิจารณาฟังก์ชันค่าคงตัว พหุนาม ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ หรือผลรวมและผลคูณของฟังก์ชันเหล่านี้ จะพบว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านี้ยังคงอยู่ในรูปของฟังก์ชันในกลุ่มนี้เสมอ และจากความจริงที่ว่าถ้าฟังก์ชัน y_p เป็นผลเฉลยของสมการ (4.13) เราจะต้องได้ว่า

$$a_n(x)\frac{d^n y_p}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y_p}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy_p}{dx} + a_0(x)y_p = g(x)$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน y_p ที่จะเป็นผลเฉลยของสมการ (4.13) จึงควรมีรูปแบบเดียวกันกับฟังก์ชัน $g(x)$ นี้ด้วย

ทั้งนี้ เราสามารถสรุปวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสูงโดยการเทียบสัมประสิทธิ์ตามหลักการทับซ้อนได้ดังนี้

วิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสูง
พิจารณาสมการไม่เอกพันธุ์

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

โดยที่ $a_i, i = 1, \ldots, m$ และ $g(x)$ เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้น

1. หาผลเฉลยเติมเต็ม y_c
2. กำหนดรูปแบบ y_p จากฟังก์ชัน $g(x)$ และเทียบสัมประสิทธิ์ ถ้าฟังก์ชัน $g(x)$ เกิดจากผลรวมของหลายพจน์ ให้ใช้หลักการทับซ้อนในการหาผลเฉลยแต่ละพจน์
3. ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y = y_c + y_p$$

ตัวอย่าง 4.22 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสอง

$$y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$$

วิธีทำ การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ที่กำหนด แบ่งเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 หาผลเฉลยเติมเต็ม y_c

จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ จะได้สมการช่วย คือ

$$m^2 + 4m - 2 = 0$$

จึงได้ว่า รากของสมการช่วย คือ

$$m_1 = -2 + \sqrt{6} \quad \text{และ} \quad m_2 = -2 - \sqrt{6} \quad \text{(Verify?)}$$

ซึ่งรากเป็นจำนวนจริงไม่ซ้ำกัน เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปเติมเต็ม คือ

$$y_c = c_1 e^{(-2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2-\sqrt{6})x}$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ขั้นที่ 2 กำหนดรูปแบบ y_p จากฟังก์ชัน $g(x)$ และเทียบสัมประสิทธิ์

เนื่องจากฟังก์ชัน $g(x) := 2x^2 - 3x + 6$ เป็นพหุนามดีกรีสอง เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p อยู่ในรูปผลรวมพหุนามดีกรีสอง

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

และเป้าหมายของเราคือ การหาสัมประสิทธิ์ A, B และ C โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ดังนี้

พิจารณา

$$y_p' = 2Ax + B$$

และ

$$y_p'' = 2A$$

เนื่องจาก y_p เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$ จึงได้ว่า

$$y_p'' + 4y_p' - 2y_p = 2x^2 - 3x + 6$$

นั่นคือ

$$(2A) + 4(2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 3x + 6$$

หรือ

$$-2Ax^2 + (8A - 2B)x + 2A + 4B - 2C = 2x^2 - 3x + 6$$

การเทียบสัมประสิทธิ์ ทำให้ได้ว่า

$$-2A = 2, \quad 8A - 2B = -3 \quad \text{และ} \quad 2A + 4B - 2C = 6$$

นั่นคือ

$$A = -1, \quad B = -\frac{5}{2} \quad \text{และ} \quad C = -9$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยเฉพาะ คือ

$$y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9$$

ขั้นที่ 3 สรุป ผลเฉลยทั่วไป คือ $y = y_c + y_p$
จากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จึงสรุปได้ว่า ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{(-2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2-\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

ตัวอย่าง 4.23 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสอง

$$y'' - y' + y = 2\sin 3x$$

วิธีทำ การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ที่กำหนด แบ่งเป็นขั้นตอนได้ดังนี้
ขั้นที่ 1 หาผลเฉลยเติมเต็ม y_c
จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ จะได้สมการช่วย คือ

$$m^2 - m + 1 = 0$$

จึงได้ว่า รากของสมการช่วย คือ

$$m_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{และ} \quad m_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{(Verify?)}$$

ซึ่งรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปเติมเต็ม คือ

$$y_c = c_1 e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ขั้นที่ 2 กำหนดรูปแบบ y_p จากฟังก์ชัน $g(x)$ และเทียบสัมประสิทธิ์

เนื่องจากฟังก์ชัน $g(x) := 2\sin 3x$ เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติ และเราทราบว่าอนุพันธ์ของ $g(x)$ จะอยู่ในรูป $A\sin 3x$ และ $B\sin 3x$ เสมอ ดังนั้น เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p อยู่ในรูปผลรวมของฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์

$$y_p = A\sin 3x + B\cos 3x$$

และเป้าหมายของเราคือ การหาสัมประสิทธิ์ A และ B โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ดังนี้

พิจารณา

$$y_p' = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x$$

และ

$$y_p'' = -9A\sin 3x + 9B\cos 3x$$

เนื่องจาก y_p เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y'' - y' + y = 2\sin 3x$ จึงได้ว่า

$$y_p'' - y_p' + y_p = 2\sin 3x$$

นั่นคือ

$$(-9A\sin 3x + 9B\cos 3x) - (3A\cos 3x - 3B\sin 3x) + (A\sin 3x + B\cos 3x) = 2\sin 3x$$

หรือ

$$(-9A + 3B + A)\sin 3x + (-9B - 3A + B)\cos 3x = 2\sin 3x$$

การเทียบสัมประสิทธิ์ ทำให้ได้ว่า

$$-8A+3B=2 \quad \text{และ} \quad -8B-3A=0$$

นั่นคือ

$$A=-\frac{16}{73} \quad \text{และ} \quad B=\frac{6}{73}$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยเฉพาะ คือ

$$y_p=-\frac{16}{73}\sin 3x+\frac{6}{73}\cos 3x$$

ขั้นที่ 3 สรุป ผลเฉลยทั่วไป คือ $y=y_c+y_p$
จากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จึงสรุปได้ว่า ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y=y_c+y_p=c_1e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2e^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{16}{73}\sin 3x+\frac{6}{73}\cos 3x$$

โดยที่ c_1,c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

ตัวอย่าง 4.24 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสอง

$$y''-2y'-3y=4x-5+6xe^{2x}$$

วิธีทำ การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ที่กำหนด แบ่งเป็นขั้นตอนได้ดังนี้
ขั้นที่ 1 หาผลเฉลยเติมเต็ม y_c
จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ จะได้สมการช่วย คือ

$$m^2-2m-3=0$$

จึงได้ว่า รากของสมการช่วย คือ

$$m_1 = 3 \quad \text{และ} \quad m_2 = -1 \quad \text{(Verify?)}$$

ซึ่งรากเป็นจำนวนจริงไม่ซ้ำกัน เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปเติมเต็ม คือ

$$y_c = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ขั้นที่ 2 กำหนดรูปแบบ y_p จากฟังก์ชัน $g(x)$ และเทียบสัมประสิทธิ์

เนื่องจากฟังก์ชัน $g(x) := 4x - 5 + 6xe^{2x}$ เป็นผลรวมของฟังก์ชันสองกลุ่ม คือ ฟังก์ชันพหุนามดีกรีหนึ่ง $g_1(x) := 4x - 5$ และฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $g_2(x) := 6xe^{2x}$ โดยหลักการทับซ้อน จะทราบว่าผลเฉลยเฉพาะ y_p นี้จะต้องอยู่ในรูปผลรวมของผลเฉลยเฉพาะ y_{p_1} ที่เกิดจากฟังก์ชัน $g_1(x)$ และผลเฉลยเฉพาะ y_{p_2} ที่เกิดจากฟังก์ชัน $g_2(x)$ ดังนั้น เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p อยู่ในรูปผลรวมของฟังก์ชันดังนี้

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

โดยที่

$$y_{p_1} := Ax + B$$

และ

$$y_{p_2} := Cxe^{2x} + De^{2x}$$

และแน่นอนว่าเป้าหมายของเราคือ การหาสัมประสิทธิ์ A, B, C และ D โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ดังนี้ เนื่องจาก

$$y_p = Ax + B + Cxe^{2x} + De^{2x}$$

พิจารณา

$$y_p' = A + 2Cxe^{2x} + (C + 2D)e^{2x}$$

และ

$$y_p'' = 4Cxe^{2x} + (4C + 4D)e^{2x}$$

เนื่องจาก y_p เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$ จึงได้ว่า

$$y_p'' - 2y_p' - 3y_p = 4x - 5 + 6xe^{2x}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} 4x - 5 + 6xe^{2x} = {} & (4Cxe^{2x} + (4C + 4D)e^{2x}) - 2(A + 2Cxe^{2x} + (C + 2D)e^{2x}) \\ & -3(Ax + B + Cxe^{2x} + De^{2x}) \end{aligned}$$

หรือ

$$4x - 5 + 6xe^{2x} = (-3C)xe^{2x} + (4C - 2C - 3D)e^{2x} - 3Ax - 2A - 3B$$

การเทียบสัมประสิทธิ์ ทำให้ได้ว่า

$$-3C = 6, \quad 2C - 3D = 0, \quad -3A = 4 \quad \text{และ} \quad -2A - 3B = -5$$

นั่นคือ

$$A = -\frac{4}{3}, \quad B = \frac{23}{9}, \quad C = -2 \quad \text{และ} \quad D = -\frac{4}{3}$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยเฉพาะ คือ

$$y_p = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}$$

ขั้นที่ 3 สรุป ผลเฉลยทั่วไป คือ $y = y_c + y_p$
จากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จึงสรุปได้ว่า ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y = y_c + y_p = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

ในตัวอย่างข้างต้นนี้ เราสามารถแยกพิจารณาการหาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_1} และ y_{p_2} ได้ และในขั้นตอนสุดท้าย โดยหลักการทับซ้อน จะได้ว่า ผลเฉลยทั่วไปยังคงอยู่ในรูป

$$y = y_c + y_{p_1} + y_{p_2}$$

ตัวอย่าง 4.25 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสอง

$$y'' - 5y' + 4y = 8e^x$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียนโดยรูปแบบฟังก์ชัน $y_p := Axe^x$ ■

จากตัวอย่างทั้งหมดข้างต้น พบว่าการกำหนดรูปแบบฟังก์ชัน y_p จะขึ้นอยู่กับรูปแบบของฟังก์ชัน $g(x)$ และในบางครั้งขึ้นอยู่กับผลเฉลยเติมเต็ม y_c ด้วย และเพื่อให้การกำหนดรูปแบบ y_p สะดวกยิ่งขึ้น จะพิจารณาเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณี 1 ฟังก์ชัน $g(x)$ ไม่ซ้ำกับผลเฉลยเติมเต็ม y_c

ถ้าไม่มีพจน์ใดของฟังก์ชัน $g(x)$ ซ้ำกับฟังก์ชันในแต่ละพจน์ของผลเฉลยเติมเต็ม y_c กำหนดรูปแบบได้ดังตารางต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.26 จงหาพิจารณารูปแบบฟังก์ชัน y_p ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 8y' + 25y = 5x^3e^{-x} - 7e^{-x}$$

(2) $y'' + 4y = x\cos x$

วิธีทำ จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ จะได้สมการช่วย คือ

$$m^2 - 8m + 25 = 0$$

จึงได้ว่า รากของสมการช่วย คือ

ตาราง 4.1: รูปแบบฟังก์ชัน y_p สำหรับฟังก์ชัน $g(x)$ ที่พบบ่อย

$g(x)$	รูปแบบ y_p
(1) ค่าคงตัว k	A
(2) $\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$	$A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0$
(3) $\sin\omega x$ หรือ $\cos\omega x$	$A\sin\omega x + B\cos\omega x$
(4) $e^{\beta x}$	$Ae^{\beta x}$
(5) $e^{\beta x}(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0)$	$e^{\beta x}(A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)$
(6) $e^{\beta x}\sin\omega x$ หรือ $e^{\beta x}\cos\omega x$	$Ae^{\beta x}\sin\omega x + Be^{\beta x}\cos\omega x$
(7) $(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0)\sin\omega x$	$A(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0)\sin\omega x$
หรือ $(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0)\cos\omega x$	$+B(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0)\cos\omega x$
(8) $xe^{\beta x}\sin\omega x$ หรือ $xe^{\beta x}\cos\omega x$	$(Ax+B)e^{\beta x}\sin\omega x + (Ax+B)e^{\beta x}\cos\omega x$

$$m_1 = 4+3i \qquad \text{และ} \qquad m_2 = 4-3i \qquad \text{(Verify?)}$$

ซึ่งรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปเติมเต็ม คือ

$$y_c = c_1 e^{4x}\cos 3x + c_2 e^{4x}\sin 3x$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

เนื่องจากฟังก์ชัน $g(x) := 5x^3e^{-x} - 7e^{-x}$ เป็นผลคูณของพหุนามดีกรีสาม $5x^3 - 7$ กับฟังก์ชันเลขชี้กำลัง e^{-x} ดังนั้น จึงได้ว่า

$$y_p = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{-x}$$

ตัวอย่าง 4.27 จงหาพิจารณารูปแบบฟังก์ชัน y_p ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' + 4y = x\cos x$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ตัวอย่าง 4.28 จงหาพิจารณารูปแบบฟังก์ชัน y_p ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 9y' + 14y = 3x^2 - 5\sin 2x + 7xe^{6x}$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

กรณี 2: ฟังก์ชัน $g(x)$ ซ้ำกับผลเฉลยเติมเต็ม y_c

กำหนดให้

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_m(x)$$

เป็นผลรวมของฟังก์ชันที่สอดคล้องกับข้อตกลงเบื้องต้นถ้ามีบางฟังก์ชัน $g_i(x)$ ที่ซ้ำกับฟังก์ชันบางพจน์ในผลเฉลยเติมเต็ม y_c แล้ว ให้คูณพจน์ y_{p_i} ที่สอดคล้องกับ $g_i(x)$ นั้นด้วย x^n โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $x^n y_{p_i}$ ไม่ซ้ำกับพจน์ใน y_c ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.29 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสอง

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

วิธีทำ การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ที่กำหนด แบ่งเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 หาผลเฉลยเติมเต็ม y_c

จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ จะได้สมการช่วย คือ

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

จึงได้ว่า รากของสมการช่วย คือ

$$m_1 = m_2 = 1 \qquad \text{(Verify?)}$$

ซึ่งรากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปเติมเต็ม คือ

$$y_c = c_1e^x + c_2xe^x$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ขั้นที่ 2 กำหนดรูปแบบ y_p จากฟังก์ชัน $g(x)$ และเทียบสัมประสิทธิ์

เนื่องจากฟังก์ชัน $g(x) := e^x$ เป็นฟังกีชันเลขชี้กำลัง ซึ่งซ้ำกับบางพจน์ในผลเฉลยเติมเต็ม y_c ดังนั้น เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ

$$y_p = Ax^2e^x$$

(Why?) และเป้าหมายของเราคือ การหาสัมประสิทธิ์ A โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ดังนี้

พิจารณา

$$y_p' = Ax^2e^x + 2Axe^x$$

และ

$$y_p'' = Ax^2e^x + 4Axe^x + 2Ae^x$$

เนื่องจาก y_p เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y'' - 2y' + y = e^x$ จึงได้ว่า

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = e^x$$

นั่นคือ

$$(Ax^2e^x + 4Axe^x + 2Ae^x) - 2(Ax^2e^x + 2Axe^x) + (Ax^2e^x) = e^x$$

หรือ

$$2Ae^x = e^x$$

การเทียบสัมประสิทธิ์ ทำให้ได้ว่า

$$2A = 1$$

นั่นคือ

$$A = \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยเฉพาะ คือ

$$y_p = \frac{x^2 e^x}{2}$$

ขั้นที่ 3 สรุป ผลเฉลยทั่วไป คือ $y = y_c + y_p$
จากขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 จึงสรุปได้ว่า ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{x^2 e^x}{2}$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

ตัวอย่าง 4.30 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสอง

$$y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ตัวอย่าง 4.31 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์อันดับสาม

$$y''' + y'' = e^x \cos x$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 4.65 $y'' - 9y = 54$

แบบฝึกหัด 4.66 $2y'' - 7y' + 5y = -29$

แบบฝึกหัด 4.67 $y'' + y' = 3$

แบบฝึกหัด 4.68 $y''' + 2y'' + y' = 10$

แบบฝึกหัด 4.69 $y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$

แบบฝึกหัด 4.70 $y'' + 3y' = 4x - 5$

แบบฝึกหัด 4.71 $y''' + y'' = 8x^2$

แบบฝึกหัด 4.72 $y'' - 2y' + y = x^3 + 4x$

แบบฝึกหัด 4.73 $y'' - y' - 12y = e^{4x}$

แบบฝึกหัด 4.74 $y'' + 2y' + 2y = 5e^{6x}$

แบบฝึกหัด 4.75 $y'' - 2y' - 3y = 4e^x - 9$

แบบฝึกหัด 4.76 $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x} + 2x$

แบบฝึกหัด 4.77 $y'' + 25y = 6\sin x$

แบบฝึกหัด 4.78 $y'' + 4y = 4\cos x + 3\sin x - 8$

แบบฝึกหัด 4.79 $y'' + 6y' + 9y = -xe^{4x}$

แบบฝึกหัด 4.80 $y'' + 3y' - 10y = x(e^x + 1)$

แบบฝึกหัด 4.81 $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x + 1$

แบบฝึกหัด 4.82 $16y^{(4)} - y = e^{x/2}$

แบบฝึกหัด 4.83 $y''' - y'' + y' - y = xe^x - e^{-x} + 7$

แบบฝึกหัด 4.84 $y'' - y' = e^x(1 - e^{-x})^2$

4.4.2 การหาผลเฉลยโดยวิธีแปรผันตัวแปร

ในหัวข้อ 4.4.1 เราศึกษาการหาผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์ในกรณีที่สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวโดยใช้การเทียบสัมประสิทธิ์ตามหลักการทับซ้อนมาแล้ว ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวที่มีความทั่วไปมากขึ้นกว่าการเทียบสัมประสิทธิ์ โดยจะเรียกวิธีการดังกล่าวนี้ว่า **การแปรผันตัวแปร** (variation of parameters) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

พิจารณาสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสอง

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{4.15}$$

และกำหนดให้ $\{y_1(x), y_2(x)\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ (4.15) เราทราบแล้วว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์นี้จะอยู่ในรูป

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{4.16}$$

โดยที่ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (4.15) เราจะทำการแปรผันตัวแปรโดยการแทนที่ค่าคงตัว c_1 และ c_2 ใน (4.16) ด้วยฟังก์ชันของตัวแปร x กล่าวคือ จะทำการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ (4.15) ในรูป

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{4.17}$$

เนื่องจากเราต้องการให้ y_p ในสมการ (4.17) เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (4.15) จึงพิจารณา y_p' และ y_p'' ดังนี้

$$y_p' = u_1y_p' + y_1u_1' + u_2y_2' + y_2u_2'$$

และ

$$y_p'' = u_1 y_p'' + y_1' u_1' + y_1 u_1'' + u_1' y_1' + u_2 y_2'' + y_2' u_2' + y_2 u_2'' + u_2' y_2'$$

เมื่อแทนค่า y_p' และ y_p'' ใน (4.15) จะได้

$$\begin{aligned}
g(x) &= a y_p'' + b y_p' + c y_p \\
&= a[u_1 y_p'' + y_1' u_1' + y_1 u_1'' + u_1' y_1' + u_2 y_2'' + y_2' u_2' + y_2 u_2'' + u_2' y_2'] \\
&\quad + b[u_1 y_p' + y_1 u_1' + u_2 y_2' + y_2 u_2'] + c[u_1 y_1 + u_2 y_2] \\
&= u_1[a y_1'' + b y_1' + c y_1] + u_2[a y_2'' + b y_2' + c y_2] \\
&\quad + a[y_1 u_1'' + u_1' y_1'] + a[y_2 u_2'' + u_2' y_2'] \\
&\quad + a[y_1' u_1' + y_2' u_2'] + b[y_1 u_1' + y_2 u_2'] \\
&= + a[y_1 u_1'' + u_1' y_1'] + a[y_2 u_2'' + u_2' y_2'] \\
&\quad + a[y_1' u_1' + y_2' u_2'] + b[y_1 u_1' + y_2 u_2'] \\
&= a\frac{d}{dx}[y_1 u_1'] + a\frac{d}{dx}[y_2 u_2'] + a[y_1' u_1' + y_2' u_2'] + b[y_1 u_1' + y_2 u_2'] \\
&= a\frac{d}{dx}[y_1 u_1' + y_2 u_2'] + a[y_1' u_1' + y_2' u_2'] + b[y_1 u_1' + y_2 u_2'] \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

เนื่องจากจุดมุ่งหมาย คือการหาฟังก์ชัน $u_1(x)$ และ $u_2(x)$ เราจึงจะพิจารณาระบบสมการสองตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับ u_1 และ u_2 นี้

สมมติให้

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \qquad (4.19)$$

ซึ่งทำให้สมการ (4.18) กลายเป็น

$$\frac{d}{dx}[y_1 u_1' + y_2 u_2'] = \frac{g(x)}{a} \qquad (4.20)$$

นั่นคือ จะได้ระบบสมการสองตัวแปร

$$\begin{aligned} y_1u_1' + y_2u_2' &= 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' &= \frac{g(x)}{a} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น โดยกฎของคาร์เมอร์ (Cramer's Rule) จะได้ผลเฉลยของระบบสมการ คือ

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{g(x)}{a} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 g(x)}{aW(y_1, y_2)} \tag{4.21}$$

และ

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{g(x)}{a} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 g(x)}{aW(y_1, y_2)} \tag{4.22}$$

ซึ่งส่งผลให้สามารถหาฟังก์ชัน u_1 และ u_2 ได้โดยการหาปริพันธ์ u_1' และ u_2' ใน (4.21) และ (4.22) ตามลำดับนั่นเอง ทั้งนี้ เนื่องจาก $\{y_1, y_2\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูล จึงได้ว่า $W(y_1, y_2) \neq 0$ สำหรับทุก x บนช่วง I ที่พิจารณาเสมอ

เพราะฉะนั้น เราจึงสรุปการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวโดยการแปรผันตัวแปรได้ดังนี้

วิธีการหาผลเฉลยทั่วไปโดยการแปรผันตัวแปร
พิจารณาสมการไม่เอกพันธุ์

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x)$$

โดยที่ $a(x), b(x), c(x)$ และ $g(x)$ เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้น

1. หาผลเฉลยเติมเต็ม $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$
2. หาผลเฉลยเฉพาะ y_p ดังนี้
   (2.1) กำหนดให้ $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$
   (2.2) คำนวณ

$$u_1' = \frac{-y_2g(x)}{aW(y_1, y_2)}$$

และ

$$u_2' = \frac{y_1g(x)}{aW(y_1, y_2)}$$

   (2.3) หาปริพันธ์ u_1' และ u_2' เทียบ x จะได้ u_1 และ u_2
3. ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$y = y_c + y_p$$

ตัวอย่าง 4.32 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสอง

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$$

วิธีทำ เราจะหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ที่กำหนดให้ดังนี้
ขั้นที่ 1 หาผลเฉลยเติมเต็ม $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$
จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ จะได้ สมการช่วย

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

นั่นคือ รากของสมการช่วยนี้ คือ

$$m_1 = m_2 = 2$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยเติมเต็ม คือ

$$y_c = c_1' e^{2x} + c_2' x e^{2x}$$

โดยที่ c_1', c_2' เป็นค่าคงตัวใด ๆ นั่นคือ $y_1 = e^{2x}$ และ $y_2 = xe^{2x}$

ขั้นที่ 2 หาผลเฉลยเฉพาะ y_p ดังนี้

กำหนดให้

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = u_1(x)e^{2x} + u_2(x)xe^{2x}$$

พิจารณา

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}$$

และเนื่องจาก $a = 1$ และ $g(x) = (x+1)e^{2x}$ จึงให้ได้ว่า

$$u_1' = \frac{-y_2 g(x)}{aW(y_1, y_2)} = \frac{-(xe^{2x})((x+1)e^{2x})}{(1)e^{4x}} = -x^2 - x$$

และ

$$u_2' = \frac{y_1 g(x)}{aW(y_1, y_2)} = \frac{(e^{2x})((x+1)e^{2x})}{(1)e^{4x}} = x + 1$$

การหาปริพันธ์ u_1' และ u_2' เทียบ x จะได้ว่า

$$u_1 = \int (-x^2 - x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_1$$

และ

$$u_2 = \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x + C_2$$

โดยที่ C_1, C_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะ

$$y_p = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_1\right)e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + x + C_2\right)xe^{2x}$$

ขั้นที่ 3 สรุป

เพราะฉะนั้น จึงสรุปได้ว่า ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= \left(c_1'e^{2x} + c_2'xe^{2x}\right) + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_1\right)e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + x + C_2\right)xe^{2x} \\ &= c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \frac{x^3e^{2x}}{6} + \frac{x^2e^{2x}}{2} \end{aligned}$$

โดยที่ $c_1 := c_1' + C_1$ และ $c_2 := c_2' + C_2$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

สังเกตว่า ในการหาปริพันธ์ของ u_1' และ u_2' เราไม่จำเป็นต้องเขียนค่าคงตัวจากการหาปริพันธ์ก็ได้

ตัวอย่าง 4.33 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสอง

$$4y'' + 36y = \csc 3x$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ต่อไปนี้บนช่วงที่ผลเฉลยทั่วไปนั้น ๆ นิยาม

แบบฝึกหัด 4.85 $y'' + y = \sec x$

แบบฝึกหัด 4.86 $y'' + y = \sin x$

แบบฝึกหัด 4.87 $y'' + y = \tan x$

แบบฝึกหัด 4.88 $y'' + y' = \sec x \tan x$

แบบฝึกหัด 4.89 $y'' + y = \cos^2 x$

แบบฝึกหัด 4.90 $y'' + y = \sec^2 x$

แบบฝึกหัด 4.91 $y'' - 4y = e^{2x}/x$

แบบฝึกหัด 4.92 $y'' - 9y = 9x/e^{3x}$

แบบฝึกหัด 4.93 $y'' + 3y' + 2y = 1/(1+e^x)$

แบบฝึกหัด 4.94 $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}/(1+e^x)$

แบบฝึกหัด 4.95 $y'' + 3y' + 2y = \sin(e^x)$

แบบฝึกหัด 4.96 $y'' - 2y' + y = e^x \arctan x$

แบบฝึกหัด 4.97 $y'' - 2y' + y = e^x/(1+x^2)$

แบบฝึกหัด 4.98 $y'' - 2y' + 2y = e^x \sec x$

แบบฝึกหัด 4.99 $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

แบบฝึกหัด 4.100 $y'' + 10y' + 25y = e^{-10x}/x^2$

บทที่ 5
ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงเส้นอันดับสอง

ในบทนี้ เราจะศึกษาระบบการสั่นทางกลที่อธิบายได้ด้วยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และมีการกำหนดค่าเริ่มต้น ณ ขณะเวลาเริ่มต้นมาให้

5.1 การสั่นทางกลแบบอิสระที่ไม่มีการหน่วง

ในส่วนแรกนี้ เราจะศึกษาการสั่นทางกลแบบอิสระ โดยพิจารณาระบบสปริงและมวล ที่สปริงสามารถเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระและไม่มีการหน่วง (free undamped motion) ดังนี้

สมมติว่าสปริงแขวนในแนวดิ่งโดยปลายด้านหนึ่งตรึงไว้กับที่และปลายอีกด้านหนึ่งผูกติดกับตุ้มน้ำหนัก m แน่นอนว่าสปริงจะยืดออกตามมวลของตุ้มน้ำหนัก กล่าวคือ เมื่อนำตุ้มน้ำหนักที่มีมวลต่างกันมาผูกติดกับสปริงอันหนึ่ง สปริงอันดังกล่าวจะยืดออกด้วยความยาวต่างกันด้วย ซึ่งปรากฏการณ์นี้สามารถอธิบายได้โดยกฎของฮุก (Hooke's law)[1] มีรายละเอียดดังนี้ สปริงจะออกแรงคืนตัว (restoring force) F ในทิศทางตรงกับข้ามกับการยืด (elongation) สปริงและมีขนาดเป็นสัดส่วนโดยตรงกับขนาดของการยืด (the amount of elongation) s นั่นคือ

$$F = ks$$

[1] ตั้งชื่อตามโรเบิร์ต ฮุก (Robert Hooke) (ค.ศ. 1635 - 1703) นักฟิสิกส์ชาวอังกฤษ

โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการเป็นสัดส่วนโดยตรง และมักเรียกว่า **ค่าคงตัวของสปริง** (spring constant) ซึ่งค่าคงตัวของสปริงนี้จะขึ้นอยู่กับสปริงแต่ละอันเท่านั้น ตัวอย่างเช่น เมื่อนำตุ้มน้ำหนักมวล 1 กิโลกรัมมาผูกติดกับปลายสปริงและทำให้สปริงยืดออกได้ 0.2 เมตร จะได้ $1 \times 9.8 = -k \times 0.2$ นั่นคือ ค่าคงตัวของสปริง คือ 49 นิวตัน/เมตร และถ้าเปลี่ยนตุ้มน้ำมวล 0.5 กิโลกรัมมาผูกติดแทนตุ้มน้ำหนักเดิม จะได้ว่าสปริงยืดออก 0.1 เมตร นั่นเอง

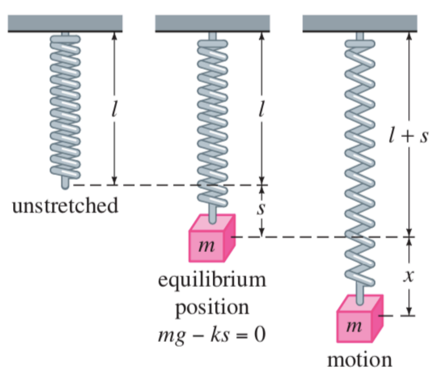
สังเกตว่า การนำตุ้มน้ำหนักมวล m กิโลกรัมมาผูกติดกับปลายสปริงซึ่งทำให้สปริงดังกล่าวยืดออก s เมตร และจะอยู่ในตำแหน่งสมดุล (equilibrium position) หรือตำแหน่งที่น้ำหนัก $W := mg$ ของตุ้มน้ำหนักเท่ากับแรงคืนตัว ks โดยที่ $g = 9.8$ m/s^2 และน้ำหนัก W มีหน่วยเป็น นิวตัน ดังนั้น ณ ตำแหน่งสมดุล จะได้ว่า

$$mg = ks$$

หรือ

$$mg - ks = 0 \tag{5.1}$$

ตามรูปที่ 5.1 (กลาง)



รูปที่ 5.1: ระบบสปริงและมวล. ปรับปรุงจาก (Zill, 2009, น. 182)

ทีนี้ ถ้าเราดึงตุ้มน้ำหนักลงจากตำแหน่งสมดุลเป็นระยะทาง (displacement) x เมตร ตามรูปที่ 5.1 (ขวา) แล้วปล่อยตุ้มน้ำหนัก จะพบว่าสปริงจะหดตัวกลับคืนและยืดตัวไปเรื่อย ๆ จนหยุดเมื่อตุ้มน้ำหนักกลับมาอยู่ ณ ตำแหน่งสมดุล สังเกตว่าในการหดตัวครั้งแรกนั้น เราจะได้ว่าแรงคืนตัวของสปริง คือ $k(s+x)$ สมมติว่าไม่มีแรงหน่วงส่งผลต่อระบบและสมมติว่าตุ้มน้ำหนักเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระโดยปราศจากแรงภายนอก โดยกฎข้อ 2 ของนิวตันที่ว่า

$$F = ma$$

โดยที่ $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ ซึ่งเป็นความเร่งของระยะทาง x ณ t วินาที ทำให้ได้ว่า แรงลัพท์ของระบบนี้เท่ากับผลรวมของแรงคืนตัวของสปริงและน้ำหนักของตุ้มน้ำหนัก นั่นคือ

$$F = -k(s+x) + W$$

โดยเครื่องหมายลบในสมการนี้หมายถึงแรงคืนตัวของสปริงมีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางการเคลื่อนที่ของสปริง ซึ่งสมการนี้สมมูลกับ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + (mg - ks)$$

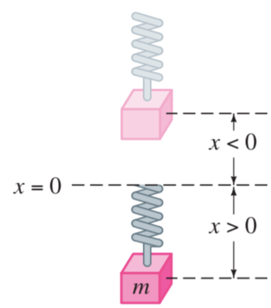
เนื่องจาก $mg - ks = 0$ ในสมการ (5.1) จึงสรุปได้ว่า

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{5.2}$$

ในที่นี้ มีข้อตกลงว่าระยะทาง x ของลูกตุ้มที่อยู่ล่างตำแหน่งสมดุลมีค่าเป็นบวกและระยะทาง x ของลูกตุ้มที่อยู่เหนือตำแหน่งสมดุลมีค่าเป็นลบ ดังรูปที่ 5.2

การหารด้วย m ตลอดทั้งสมการ (5.2) ทำให้ได้ว่า

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$$



รูปที่ 5.2: ระยะทาง x กับตำแหน่งสมดุล ($x = 0$). ปรับปรุงจาก (Zill, 2009, น. 182)

หรือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{5.3}$$

โดยที่ $\omega^2 = \frac{k}{m}$ และเรียกสมการข้างต้นนี้ว่า **สมการอธิบายการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย** (simple harmonic motion) หรือ **สมการอธิบายการเคลื่อนที่แบบอิสระไม่มีการหน่วง** (free undamped motion) และสมการดังกล่าวนี้มักเกี่ยวข้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นสองประการ คือ ขนาดของการยืด ณ ขณะเริ่มต้น (initial displacement)

$$x(0) = x_0$$

และความเร็วของการเคลื่อนที่ของตุ้มน้ำหนัก ณ ขณะเริ่มต้น (initial velocity)

$$x'(0) = x_1$$

ตัวอย่างเช่น ตำแหน่งของตุ้มน้ำหนัก ณ ขณะเริ่มต้นอยู่ล่างตำแหน่งสมดุล x_0 เมตร จะพบว่าตุ้มน้ำหนักนี้จะมีความเร็ว ณ ขณะเริ่มต้น x_1 เมตร/วินาที เพื่อหดตัวกลับขึ้นไป ซึ่งจะได้ว่า $x_0 > 0$ แต่ $x_1 < 0$

ในกรณีที่ $x'(0) = 0$ เราจะกล่าวว่า ตุ้มน้ำหนักถูกปล่อยจากจุดพัก (released from rest) เช่น $x_0 < 0$ และ $x_1 = 0$ หมายความว่า ตุ้มน้ำหนักถูกปล่อยจากจุดพักเหนือตำแหน่งสมดุลเป็นระยะทาง $|x_0|$ เมตรนั่นเอง

การหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ (5.3) เริ่มจากการพิจารณาสมการช่วย

$$m^2 - \omega^2 = 0$$

ซึ่งจะพบว่ามีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค $m_1 = \omega i$ และ $m_2 = -\omega i$ นั่นคือ ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ (5.3) คือ

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \tag{5.4}$$

นอกจากนี้ยังได้ด้วยว่า คาบ (peroid)[2] ของการเคลื่อนที่ตามสมการ (5.4) คือ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{วินาที}$$

และความถี่ (frequency) ของการเคลื่อนที่ตามสมการ (5.4) คือ

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \text{รอบ/วินาที}$$

ตัวอย่างเช่น ถ้า $x(t) = 2\cos 3\pi t - 4\sin 3\pi t$ จะพบว่า คาบ $T = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$ วินาที และความถี่ $f = \frac{1}{T} = \frac{3}{2}$ รอบ/วินาที ซึ่งหมายความว่า กราฟของฟังก์ชัน $x(t)$ นี้ จะเท่ากันในทุก ๆ $\frac{2}{3}$ วินาที นั่นคือ $x\left(t + \frac{2}{3}\right) = x(t)$ หรือในอีกนัยหนึ่งคือ ใน 1 วินาที กราฟจะเคลื่อนที่ได้ $\frac{3}{2}$ รอบ

---

[2] คาบ คือ เวลาที่ตุ้มน้ำหนักเคลื่อนที่ครบรอบ เช่น คาบของตุ้มน้ำหนัก m ในการเคลื่อนที่จากตำแหน่งล่างสุดของตำแหน่งสมดุลเท่าที่จะเป็นไปได้ขึ้นไปยังตำแหน่งบนสุดของตำแหน่งสมดุลเท่าที่จะเป็นไปได้จากนั้นกลับลงมายังจุดล่างสุดนั้น ๆ

ทั้งนี้ เมื่อพิจารณาสมการ (5.4) ร่วมกับค่าเริ่มต้นข้างต้น จะได้ค่าคงตัว c_1 และ c_2 และเราจะเรียกผลเฉลยเฉพาะนี้ว่า **สมการของการเคลื่อนที่** (equation of motion)

ตัวอย่าง 5.1 เมื่อนำตุ้มน้ำหนักมวล 0.1 กิโลกรัมผูกติดกับปลายสปริงอันหนึ่งที่ปลายอีกด้านหนึ่งของสปริงตรึงอยู่กับที่ พบว่าสปริงยืดตัวไป 9.8 เซนติเมตร ถ้าจับตุ้มน้ำหนักขึ้นไว้เหนือตำแหน่งสมดุล 12 เซนติเมตร และจากนั้นปล่อยลงพบว่ามีความเร็ว ณ ขณะเริ่มต้นของตุ้มน้ำหนัก คือ 0.5 เมตร/วินาที จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของระบบนี้

วิธีทำ เนื่องจากเมื่อนำตุ้มน้ำหนักที่มีมวล 0.1 กิโลกรัมมาผูกติดกับปลายสปริงแล้วทำให้สปริงยืดตัวออกไป 9.8 เซนติเมตร หรือ 0.098 เมตร ดังนั้น โดยกฎของฮุก จะได้ว่า

$$mg = ks$$

นั่นคือ

$$0.1 \times 9.8 = k \times 0.098$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$k = 10 \qquad \text{นิวตัน/เมตร}$$

ดังนั้น สมการอธิบายการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย คือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$$

หรือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 100x = 0$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$x(t) = c_1 \cos 10t + c_2 \sin 10t$$

โดยที่ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

จากโจทย์ พบว่า ณ ขณะเริ่มต้น ตุ้มน้ำหนักอยู่ ณ ตำแหน่งเหนือตำแหน่งสมดุล 12 เซนติเมตร นั่นคือ

$$x(0) = 0.12$$

(Why?) และเคลื่อยที่ลงด้วยความเร็วเริ่มต้น 0.5 เมตร/วินาที นั่นคือ

$$x'(0) = 0.5$$

(Why?) ซึ่งส่งผลให้ได้ว่า

$$0.12 = x(0) = c_1 \cos 10(0) + c_2 \sin 10(0)$$

หรือ

$$c_1 = 0.12$$

และ

$$0.5 = x'(0) = -10c_1 \sin 10(0) + 10c_2 \cos 10(0)$$

หรือ

$$c_2 = 0.05$$

เพราะฉะนั้น สมการของการเคลื่อนที่ คือ

$$x(t) = 0.12 \cos 10t + 0.05 \sin 10t$$

■

จากตัวอย่างข้างต้นนี้ ในกรณีที่ $c_1 > 0$ และ $c_2 > 0$ สังเกตว่าสมการของการเคลื่อนที่ของระบบนี้ไม่ได้อธิบายลักษณะของแอมพลิจูด (amplitude) A ของการเคลื่อนที่ของสปริงได้ กล่าวคือ แม้ว่า ในขณะเริ่มต้นตำแหน่งของตุ้มน้ำหนักจะอยู่เหนือตำแหน่งสมดุล 0.12 เมตร ซึ่งส่งผลให้แอมพลิจูดต้องมากกว่า 0.12 เมตร (Why?) ดังนั้น สมการอธิบายการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย มักถูกเขียนใหม่เป็น

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \tag{5.5}$$

โดยที่ แอมพลิจูด

$$A := \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

และ มุมเฟส (phase angle) ϕ นิยามโดย

$$\sin\phi = \frac{c_1}{A}$$

และ

$$\cos\phi = \frac{c_2}{A}$$

นั่นคือ

$$\tan^{-1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right) = \phi$$

ทั้งนี้ การแสดงว่าสมการ (5.4) และ สมการ (5.5) สมมูลกันทำได้ดังนี้ จากเอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A\sin(\omega t + \phi) &= A\sin\omega t\cos\phi + A\cos\omega t\sin\phi \\ &= (A\sin\phi)\cos\omega t + (A\cos\phi)\sin\omega t \end{aligned}$$

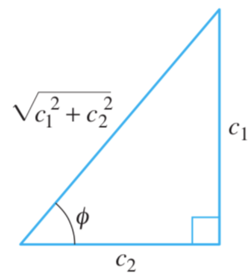
จากความสัมพันธ์ของมุมเฟส ϕ กับค่าคงตัว c_1 และ c_2 ดังรูป 5.3 จะพบว่า

$$A\sin(\omega t + \phi) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t$$

นั่นเอง

ดังนั้น สมการของการเคลื่อนที่ในตัวอย่างข้างต้นเขียนใหม่ได้ดังนี้ เนื่องจาก แอมพลิจูด

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{(0.12)^2 + (0.05)^2} = 0.13 \qquad \text{เมตร}$$



รูปที่ 5.3: ความสัมพันธ์ของมุมเฟส ϕ กับค่าคงตัว $c_1 > 0$ และ $c_2 > 0$. ปรับปรุงจาก (Zill, 2009, น. 184)

และ

$$\tan^{-1}\left(\frac{0.12}{0.05}\right) \approx 1.176 \quad \text{เรเดียน}$$

เพราะฉะนั้น

$$x(t) = 0.13\sin(10t + 1.176)$$

ซึ่งพบด้วยว่า คาบ

$$T = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$$

และความถี่

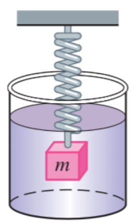
$$f = \frac{1}{T} = \frac{5}{\pi}$$

ตัวอย่าง 5.2 เมื่อนำตุ้มน้ำหนักมวล 0.3 กิโลกรัมผูกติดกับปลายสปริงอันหนึ่งที่ปลายอีกด้านหนึ่งของสปริงตรึงอยู่กับที่ พบว่าสปริงยืดตัวไป 6 เซนติเมตร ถ้าดึงตุ้มน้ำหนักไปด้านล่างตำแหน่งสมดุล 8 เซนติเมตร และจากนั้นปล่อยพบว่าตุ้มน้ำหนักเด้งขึ้นด้วยความเร็ว ณ ขณะเริ่มต้น 4/3 เซนติเมตร/วินาที จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของระบบนี้

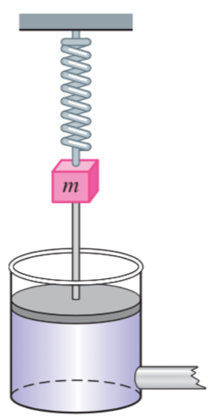
วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

5.2 การสั่นทางกลแบบอิสระที่มีการหน่วง

จากการสังเกตการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายในหัวข้อก่อนหน้านี้ จะพบว่าอาจพบได้ไม่มากนัก ทั้งนี้เพราะเราสมมติว่าไม่มีแรงที่เกิดจากการหน่วงที่กระทำต่อตุ้มน้ำหนัก ซึ่งในความเป็นจริงแล้วสถานการณ์นี้จะเกิดขึ้นได้เฉพาะภาวะสุญญากาศเท่านั้น ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาระบบสปริงและมวลที่ตุ้มน้ำหนักอยู่ในตัวกลางที่มีความหนืด (viscous medium) ดังรูป 5.4 หรือผูกติดอยู่กับลูกสูบ (dashpot) ดังรูป 5.5



รูปที่ 5.4: การหน่วงด้วยตัวนำที่มีความหนืด. ปรับปรุงจาก (Zill, 2009, น. 186)



รูปที่ 5.5: การหน่วงด้วยลูกสูบ. ปรับปรุงจาก (Zill, 2009, น. 186)

ในลำดับแรกนี้ เราจะพิจารณาระบบที่มีแรงหน่วง (damping force) กระทำกับตุ้มน้ำหนักซึ่งเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเร็วขณะหนึ่ง (instantaneous velocity) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง คือ เราจะสมมติว่ามีแรงหน่วงที่กระทำกับตุ้มน้ำหนักอยู่ในรูปผลคูณของค่าคงตัวกับ $\frac{dx}{dt}$ และถ้าสมมติเพิ่มเติมว่าไม่มีแรงอื่นใดกระทำกับระบบอีก โดยกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน จึงได้ว่า

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} \tag{5.6}$$

โดยที่ $\beta > 0$ เป็นค่าคงตัวของการหน่วง (damping constant) และเครื่องหมายลบในสมการหมายถึง แรงหน่วงกระทำในทิศทางตรงข้ามกับทิศทางการเคลื่อนที่ของตุ้มน้ำหนัก

จากสมการ (5.6) การหารด้วยมวลของตุ้มน้ำหนัก m จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่แบบอิสระที่มีการหน่วง คือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \tag{5.7}$$

โดยที่

$$2\lambda = \frac{\beta}{m}$$

และ

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

ทั้งนี้ การจัดสมการให้อยู่ในรูป 2λ และ ω^2 เพื่อความสะดวกในการหาผลแเลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เท่านั้น

สำหรับการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ข้างต้นนี้ จะพบว่าสมการช่วย คือ

$$m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0$$

ส่งผลให้ได้ว่า รากของสมการช่วย คือ

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

และ

$$m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

ซึ่งทำให้ต้องพิจารณาผลเฉลยทั่วไปเป็น 3 กรณี ดังนี้

กรณี 1 $\lambda^2 - \omega^2 > 0$

สังเกตว่า ค่าคงตัวของการหน่วง β มีค่ามากกว่าค่าคงตัวของสปริง k (Why?) เราจึงเรียกระบบนี้ว่า การหน่วงเกิน (overdamped) และได้ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (5.7) คือ

$$x(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$$

หรือ

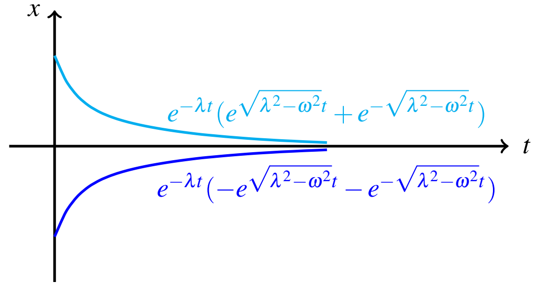
$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t}\right) \tag{5.8}$$

โดยที่ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ตัวอย่างของผลเฉลยในกรณีนี้แสดงดังรูป 5.6 ซึ่งจะพบว่าพฤติกรรมของ x มีการปรับเรียบ (smooth) และไม่กวัดแกว่ง (nonoscillatory)

กรณี 2 $\lambda^2 - \omega^2 = 0$

สังเกตว่า ในกรณีนี้การลดแรงหน่วงเพียงเล็กน้อยสามารถทำให้การเคลื่อนที่ของตุ้มน้ำหนักเกิดการกวัดแกว่งได้ (Why?) เราจึงเรียกระบบนี้ว่า การหน่วงวิกฤติ (critically damped) และได้ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (5.7) คือ

$$x(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 t e^{m_2 t}$$

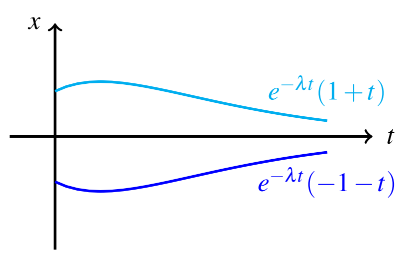


รูปที่ 5.6: ตัวอย่างของผลเฉลยในกรณี $\lambda^2 - \omega^2 > 0$

หรือ

$$x(t) = e^{-\lambda t}\,(c_1 + c_2 t) \tag{5.9}$$

โดยที่ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ตัวอย่างของผลเฉลยในกรณีนี้แสดงดังรูป 5.7



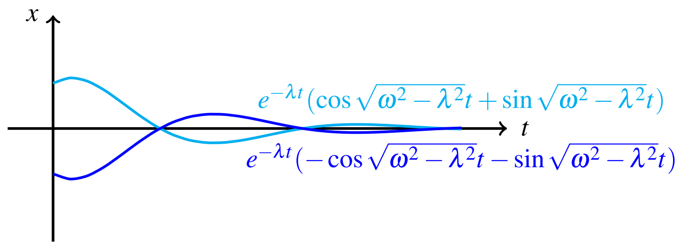
รูปที่ 5.7: ตัวอย่างของผลเฉลยทั่วไปในกรณี $\lambda^2 - \omega^2 = 0$

กรณี 3 $\lambda^2 - \omega^2 < 0$

สังเกตว่า ค่าคงตัวของการหน่วง β มีค่าน้อยกว่าค่าคงตัวของสปริง k (Why?) เราจึงเรียกระบบนี้ว่า การหน่วงน้อย (underdamped) และได้ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (5.7) คือ

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(c_1 \cos\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t + c_2 \sin\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t\right) \tag{5.10}$$

โดยที่ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ตัวอย่างของผลเฉลยในกรณีนี้แสดงดังรูป 5.8



รูปที่ 5.8: ตัวอย่างของผลเฉลยในกรณี $\lambda^2-\omega^2<0$

ตัวอย่าง 5.3 เมื่อนำตุ้มน้ำหนักมวล 0.25 กิโลกรัมผูกติดกับปลายสปริงอันหนึ่งที่ปลายอีกด้านหนึ่งของสปริงตรึงอยู่กับที่และมีค่าคงตัวของสปริงเท่ากับ 4 นิวตัน/เมตร ถ้าดึงตุ้มน้ำหนักไปด้านบนตำแหน่งสมดุล 50 เซนติเมตร จากนั้นปล่อยพบว่าตุ้มน้ำหนักลงด้วยความเร็ว ณ ขณะเริ่มต้น 1 เมตร/วินาที และกำหนดให้ระบบนี้มีค่าคงตัวของการหน่วงเท่ากับ 1 นิวตัน$\times$วินาที/เมตร จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของระบบนี้

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 5.1 เมื่อนำตุ้มน้ำหนักมวล 2 กิโลกรัมผูกติดกับปลายสปริงอันหนึ่งที่ปลายอีกด้านหนึ่งของสปริงตรึงอยู่กับที่และมีค่าคงตัวของสปริงเท่ากับ 50 นิวตัน/เมตร ถ้าดึงตุ้มน้ำหนักไปด้านบนตำแหน่งสมดุล 25 เซนติเมตร จากนั้นปล่อยพบว่าตุ้มน้ำหนักลงด้วยความเร็ว ณ ขณะเริ่มต้น 1 เมตร/วินาที และกำหนดให้ไม่มีแรงหน่วงกระทำกับระบบนี้ จงหาสมการของการเคลื่อนที่ แอมพลิจูด คาบ ความถี่ของระบบนี้ และจงหาว่านานเท่าใดตุ้มน้ำหนักจึงผ่านตำแหน่งสมดุล

แบบฝึกหัด 5.2 เมื่อนำตุ้มน้ำหนักมวล 3 กิโลกรัมผูกติดกับปลายสปริงอันหนึ่งที่ปลายอีกด้านหนึ่งของสปริงตรึงอยู่กับที่และมีค่าคงตัวของสปริงเท่ากับ 48 นิวตัน/เมตร ถ้าดึงตุ้มน้ำหนักไปด้านบนตำแหน่งสมดุล 50 เซนติเมตร จากนั้นปล่อยพบว่าตุ้มน้ำหนักลงด้วยความเร็ว ณ ขณะเริ่มต้น 2 เมตร/วินาที และกำหนดให้ไม่มีแรงหน่วงกระทำกับระบบนี้ จงหาสมการของการเคลื่อนที่ แอมพลิจูด คาบ ความถี่ของระบบนี้ และจงหาว่านานเท่าใดตุ้มน้ำหนักจึงผ่านตำแหน่งสมดุล

แบบฝึกหัด 5.3 สปริงอันหนึ่งจะยืดออก 2 เมตรถ้าถูกดึงด้วยแรง 400 นิวตัน เมื่อนำตุ้มน้ำหนักมวล 50 กิโลกรัมผูกติดกับปลายสปริงอันนี้โดยที่ปลายอีกด้านหนึ่งของสปริงตรึงอยู่กับที่ ถ้าตุ้มน้ำหนักถูกปล่อยจากตำแหน่งสมดุลด้วยความเร็วในทิศทางขึ้นบน ณ ขณะเริ่มต้น 10 เมตร/วินาที และกำหนดให้ไม่มีแรงหน่วงกระทำกับระบบนี้ จงหาสมการของการเคลื่อนที่

แบบฝึกหัด 5.4 จากแบบฝึกหัด 5.3 ถ้านำสปริงอีกอันหนึ่งที่มีค่าคงตัวของสปริง 20 นิวตัน/เมตร มาแขวนขนานและผูกติดในระดับเดียวกัน และนำตุ้มน้ำหนักมวล 20 กิโลกรัมผูกติดกับปลายสปริงอันที่สองนี้ ถ้าสปริงทั้งสองอันนี้ถูกปล่อยจากตำแหน่งสมดุลด้วยความเร็ว 10 เมตร/วินาที ในทิศทางขึ้น จงหาว่าตุ้มน้ำหนักที่ผูกติดกับสปริงตัวใดมีแอมพลิจูดมากกว่า

แบบฝึกหัด 5.5 จากแบบฝึกหัด 5.3 และ 5.4 จงหาว่าตุ้มน้ำหนักที่ผูกติดกับสปริงตัวใดเคลื่อนที่เร็วกว่า ณ ขณะเวลาผ่านไป $\pi/4$ วินาที และจงหาว่าเวลาผ่านไปเท่าใดตุ้มน้ำหนักที่ผูกติดกับสปริงตัวใดทั้งสองอันนี้จะอยู่ในระดับเดียวกัน

แบบฝึกหัด 5.6 สปริงอันหนึ่งผูกติดกับตุ้มน้ำหนักโดยที่ปลายอีกด้านหนึ่งของสปริงตรึงอยู่กับที่และมีคาบการสั่นเท่ากับ 3 วินาที เมื่อเพิ่มมวลของตุ้มน้ำหนักอีก 2 กิโลกรัมพบว่ามีคาบการสั่นเท่ากับ 4 วินาที สมมติว่าไม่มีแรงหน่วงกระทำกับระบบนี้ จงหามวลเดิมของตุ้มน้ำหนักนี้

แบบฝึกหัด 5.7 เมื่อนำตุ้มน้ำหนักมวล 1/8 กิโลกรัมผูกติดกับปลายสปริงอันหนึ่งที่ปลายอีกด้านหนึ่งของสปริงตรึงอยู่กับที่และมีค่าคงตัวของสปริงเท่ากับ 16 นิวตัน/เมตร และกำหนดให้ระบบนี้มี ค่าคงตัวของการหน่วงเท่ากับ 2 นิวตัน$\times$วินาที/เมตร ถ้าดึงตุ้มน้ำหนักไปด้านบนตำแหน่งสมดุล 3/4 เมตร จากนั้นปล่อยพบว่าตุ้มน้ำหนักลงด้วยความเร็ว ณ ขณะเริ่มต้น 2 เมตร/วินาที ในทิศทางขึ้น จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของระบบนี้

แบบฝึกหัด 5.8 เมื่อนำตุ้มน้ำหนักมวล 20 กิโลกรัมผูกติดกับปลายสปริงอันหนึ่งที่ปลายอีกด้านหนึ่งของสปริงตรึงอยู่กับที่และมีค่าคงตัวของสปริงเท่ากับ 200 นิวตัน/เมตร และกำหนดให้ระบบนี้มี ค่าคงตัวของการหน่วงเท่ากับ 140 นิวตัน$\times$วินาที/เมตร ถ้าดึงตุ้มน้ำหนักไปด้านล่างตำแหน่งสมดุล 25 เซนติเมตร จากนั้นปล่อยพบว่าตุ้มน้ำหนักเด้งขึ้นด้วยความเร็ว ณ ขณะเริ่มต้น 1 เมตร/วินาที จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของระบบนี้

แบบฝึกหัด 5.9 เมื่อนำตุ้มน้ำหนักมวล 1/4 กิโลกรัมผูกติดกับปลายสปริงอันหนึ่งที่ปลายอีกด้านหนึ่งของสปริงตรึงอยู่กับที่และมีค่าคงตัวของสปริงเท่ากับ 8 นิวตัน/เมตร และกำหนดให้ระบบนี้มี ค่าคงตัวของการหน่วงเท่ากับ 1/4 นิวตัน$\times$วินาที/เมตร ถ้าตุ้มน้ำหนักอยู่ที่จุดพักด้านบนตำแหน่งสมดุล 1 เมตร จากนั้นปล่อยพบว่าตุ้มน้ำหนักลง จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของระบบนี้

แบบฝึกหัด 5.10 เมื่อนำตุ้มน้ำหนักมวล 1 กิโลกรัมผูกติดกับปลายสปริงอันหนึ่งที่ปลายอีกด้านหนึ่งของสปริงตรึงอยู่กับที่และตุ้มน้ำหนักอยู่ในตัวกลางหนืดที่ทำให้แรงหน่วงมีค่าเป็นสิบเท่าของความเร็วชั่วขณะ ถ้าตุ้มน้ำหนักอยู่ที่จุดพักด้านล่างตำแหน่งสมดุล 1 เมตร จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของระบบนี้

บทที่ 6
ผลการแปลงลาปลาซ

ในวิชาแคลคูลัส เราทราบว่าอนุพันธ์และปริพันธ์เป็นผลการแปลง (transform) อย่างหนึ่ง กล่าวคือ การดำเนินการทั้งสองอย่างนี้จะแปลงฟังก์ชันที่พิจารณาให้เป็นฟังก์ชันอื่น ๆ ตัวอย่างเช่น หากมีฟังก์ชัน $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ที่นิยามโดย $f(t)=t^2$ สำหรับทุก $t\in\mathbb{R}$ เราจะพบว่า การหาอนุพันธ์คือการแปลงจากพหุนามกำลังสองไปเป็นสมการเชิงเส้น

$$\frac{d}{dt}t^2=2t$$

และการหาปริพันธ์คือการแปลงจากพหุนามกำลังสองเป็นวงศ์ของพหุนามกำลังสาม

$$\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C$$

นอกจากนี้เรายังทราบว่าผลการแปลงทั้งสองนี้มี**สมบัติเชิงเส้น** กล่าวคือ ผลการแปลงของผลรวมเชิงเส้นของสองฟังก์ชันเท่ากับผลรวมเชิงเส้นของผลการแปลงแต่ละฟังก์ชันดังกล่าว นั่นคือ กำหนดให้ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน และ a และ b เป็นค่าคงตัว ถ้าอนุพันธ์และปริพันธ์ของ f และ g หาค่าได้ แล้ว

$$\frac{d}{dt}\left[af(t)+bg(t)\right]=a\frac{d}{dt}f(t)+b\frac{d}{dt}g(t)$$

และ

$$\int\left[af(t)+bg(t)\right]dt=a\int f(t)dt+b\int g(t)dt$$

ในบทนี้เราจะศึกษาผลการแปลงเชิงปริพันธ์ที่เรียกว่า **ผลการแปลงลาปลาซ**[1] ทั้งนี้ เนื่องจากการแปลงลาปลาซนี้มีสมบัติเชิงเส้น การแปลงนี้จึงมีประโยชน์อย่างมากในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นเชิงเส้นซึ่งเราจะศึกษาในหัวข้อ 6.4 ต่อไป

6.1 ผลการแปลงลาปลาซ

พิจารณาการหาปริพันธ์ต่อไปนี้ ให้ $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร จะพบว่าการหาปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปรหนึ่งจะได้ฟังก์ชันของอีกตัวแปรหนึ่ง ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ s เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

$$\int_0^2 s t dt = 2s$$

ในทำนองเดียวกัน การหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\int K(s,t)f(t)dt$ คือการแปลงฟังก์ชัน f ซึ่งขึ้นอยู่กับตัวแปร t ไปเป็นฟังก์ชัน F ซึ่งขึ้นอยู่กับตัวแปร s แทน ดังนั้น ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน $[0,+\infty)$ จะได้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_0^{+\infty} K(s,t)f(t)dt$ คือ

$$\int_0^{+\infty} K(s,t)f(t)dt := \lim_{N\to+\infty}\int_0^N K(s,t)f(t)dt$$

และเราเรียกฟังก์ชัน $K(s,t)$ ของตัวแปร t และ s ในที่นี้ว่า **เคอร์เนล** (kernel) ของการแปลง ซึ่งการเลือกเคอร์เนลที่แตกต่างกันจะทำให้ได้การแปลงที่เฉพาะแบบต่างกัน สังเกตว่าปริพันธ์นี้จะหาค่าได้หรือไม่นั้นขึ้นอยู่กับตัวแปร s นั่นเอง จากข้อสังเกตนี้ เราสามารถนิยามผลการแปลงลาปลาซได้ดังต่อไปนี้

[1] การแปลงลาปลาซ เรียกเพื่อเป็นเกียรติกับ ปิแยร์ ซีมง ลาปลาซ (Pierre-Simon Laplace) (ค.ศ. 1749 -1827) นักคณิตศาสตร์ นักสถิติ นักฟิสิกส์ นักดาราศาสตร์ ผู้โด่งดังชาวฝรั่งเศส เมื่อปี ค.ศ. 1812 ลาปลาซใช้การแปลงทำนองเดียวกันนี้ในงานวิจัยทางด้านความน่าจะเป็น อย่างไรก็ตามในความจริงแล้วผลการแปลงลาปลาซที่เราคุ้นเคยถูกพัฒนาโดย กุสตาฟ เดิตส์ช (Gustav Doetsch) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน โดยเดิตส์ชได้พัฒนาผลการแปลงนี้จากงานของ โอลิเวอร์ เฮฟวิไซด์ (Oliver Heaviside) นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เมื่อปี ค.ศ. 1937

บทนิยาม 6.1 (ผลการแปลงลาปลาซ)
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน $[0,+\infty)$ เราเรียกฟังก์ชัน F ของตัวแปร s ที่นิยามโดย

$$F(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \tag{6.1}$$

สำหรับทุก $s \in \{r \in \mathbb{R} :$ ปริพันธ์ (6.1) นี้หาค่าได้ที่จุด $r\}$ ว่า **ผลการแปลงลาปลาซ** (Laplace transform) ของฟังก์ชัน f และเขียนแทน $F(s)$ ด้วย $\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ หรือ $\mathscr{L}\{f\}(s)$

ตัวอย่าง 6.1 จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันค่าคงตัวที่นิยามโดย $f(t) = 1$ สำหรับทุก $t \in [0,+\infty)$

วิธีทำ ให้ $s \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot 1dt &= \lim_{N\to+\infty} \int_0^N e^{-st}dt \\ &= \lim_{N\to+\infty} \left.\frac{-e^{-st}}{s}\right|_{t=0}^{t=N} \\ &= \lim_{N\to+\infty} \left[\frac{-e^{-sN}}{s} - \frac{-1}{s}\right] = \lim_{N\to+\infty} \frac{1-e^{-sN}}{s} \end{aligned}$$

พิจารณา สำหรับแต่ละ $s > 0$ จะได้ว่า

$$F(s) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1-e^{-sN}}{s} = \frac{1}{s}$$

และสำหรับแต่ละ $s \leq 0$ จะได้ว่า $\int_0^{+\infty} e^{-st}dt$ ลู่ออก ดังนั้น ผลการแปลงลาปลาซ $\mathscr{L}\{1\} = 1/s$ สำหรับทุก $s > 0$ ■

ตัวอย่าง 6.2 กำหนดให้ a เป็นค่าคงตัว จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = t$ สำหรับทุก $t \in [0,+\infty)$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ∎

ตัวอย่าง 6.3 กำหนดให้ a เป็นค่าคงตัว จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t) = e^{at}$ สำหรับทุก $t \in [0, +\infty)$

วิธีทำ ให้ $s \in (a, +\infty)$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot e^{at} dt &= \lim_{N \to +\infty} \int_0^N e^{(a-s)t} dt \\
&= \lim_{N \to +\infty} \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \bigg|_{t=0}^{t=N} \\
&= \lim_{N \to +\infty} \left[\frac{e^{(a-s)N}}{a-s} - \frac{1}{a-s} \right] = \lim_{N \to +\infty} \frac{e^{(a-s)N} - 1}{a-s}
\end{aligned}
$$

พิจารณา สำหรับแต่ละ $s \in (a, +\infty)$ จะได้ว่า

$$F(s) = \lim_{N \to +\infty} \frac{e^{(a-s)N} - 1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

และสำหรับแต่ละ $s \notin (a, +\infty)$ จะได้ว่า $\int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot e^{at} dt$ ลู่ออก ดังนั้น ผลการแปลงลาปลาซ $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$ สำหรับทุก $s \in (a, +\infty)$ ∎

ตัวอย่าง 6.4 ให้ b เป็นค่าคงตัว จงหาค่าของ $\mathscr{L}\{\sin bt\}$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ∎

ตัวอย่าง 6.5 จงหาค่าของ $\mathscr{L}\{f\}$ เมื่อ

$$f(t) := \begin{cases} 2, & 0 < t < 5 \\ 0, & 5 < t < 10 \\ e^{4t}, & 10 < t \end{cases}$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ∎

ผลการแปลงลาปลาซมีสมบัติที่น่าสนใจคือความเป็นเชิงเส้นดังที่ได้กล่าวนำมาแล้วข้างต้น ซึ่งมีรายละเอียดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.1 (สมบัติเชิงเส้นของผลการแปลงลาปลาซ)
ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่สำหรับทุก $s > \alpha$ ผลการแปลงลาปลาซหาค่าได้ และ ให้ c เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า สำหรับทุก $s > \alpha$

$$\mathscr{L}\{f+g\} = \mathscr{L}\{f\} + \mathscr{L}\{g\}$$
$$\mathscr{L}\{cf\} = c\mathscr{L}\{f\}$$

การพิสูจน์ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ทฤษฎีบทข้างต้นนี้มีประโยชน์อย่างมากในการคำนวณผลการแปลงลาปลาซ ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.6 จงหาค่าของ $\mathscr{L}\{8 + 2e^{3t} - 5\sin 2t\}$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

สังเกตว่าผลการแปลงลาปลาซจะหาค่าได้หรือไม่นั้นขึ้นอยู่กับค่าของ s และฟังก์ชัน $f(t)$ ในปริพันธ์ (6.1) กล่าวคือ สำหรับทุก $s > 0$ จะพบว่า ถ้า t มีค่าเพิ่มเข้าสู่อนันต์ แล้วค่าของ e^{-st} จะเข้าสู่ศูนย์อย่างรวดเร็ว ซึ่งมักจะส่งผลให้ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันมีค่า อย่างไรก็ตาม มีหลายฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาผลการแปลงลาปลาซได้ ดังนั้น ต่อไปนี้เราจึงศึกษาสมบัติที่ทำให้ผลการแปลงลาปลาซมีค่า

บทนิยาม 6.2 (ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบกระโดด)
ให้ $f(t)$ ฟังก์ชันที่นิยามบน $[a,b]$ เราจะเรียก f ว่า **ไม่ต่อเนื่องแบบกระโดด** (jump discontinuous) ที่ $t_0 \in (a,b)$ ถ้า f ไม่ต่อเนื่องที่ t_0 แต่ลิมิตทางเดียว

$$\lim_{t \to t_0^-} f(t) \text{ และ } \lim_{t \to t_0^+} f(t)$$

หาค่าได้ และเราจะเรียก f ซึ่งไม่ต่อเนื่องที่จุดปลาย $t_0 = a$ (หรือ b) ว่า **ไม่ต่อเนื่องแบบกระโดดที่จุดปลาย** ถ้า ลิมิตทางเดียว $\lim_{t \to a^+} f(t)$ (หรือ $\lim_{t \to b^-} f(t)$) หาค่าได้

จากบทนิยามฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบประโดด ณ จุดหนึ่ง ๆ เราสามารถนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงได้ดังนี้

บทนิยาม 6.3 (ฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง)
ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน $[a,b]$ เราจะเรียก f ว่า **ต่อเนื่องเป็นช่วง** (piecewise continuous) ***บนช่วง*** $[a,b]$ ถ้า มีจุด $t_0 \in [a,b]$ จำนวนจำกัดตัว ที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบกระโดดที่จุด t_0 ดังกล่าว และเราจะเรียกฟังก์ชัน $f(t)$ ที่นิยามบน $[0,+\infty)$ ว่า **ต่อเนื่องเป็นช่วงบนช่วง** $[0,+\infty)$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[0,N]$ สำหรับทุกจำนวนจริง $N > 0$

ตัวอย่าง 6.7 จงตรวจสอบว่าว่าฟังก์ชัน $f(t)$ ที่นิยามบนช่วง $[0,3]$ โดย

$$f(t) := \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 3, & 1 < t < 2 \\ (t-2)^2, & 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงบนช่วง $[0,3]$ หรือไม่

วิธีทำ สังเกตว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง $(0,1)$ $(1,2)$ และ $(2,3]$ นอกจากนี้ f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบกระโดดที่จุด $t = 0,1$ และ 2 ซึ่งมีจำนวนจำกัด เพราะฉะนั้นจึงสรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงบนช่วง $[0,3]$ ■

ตัวอย่าง 6.8 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(t) = \frac{1}{t}$ ที่นิยามบนช่วงใด ๆ ที่มีจุดกำเนิดเป็นสมาชิกไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงบนช่วงดังกล่าว

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

สังเกตว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบช่วงบนช่วง $[0,N]$ สำหรับทุกจำนวนจริง N แล้วเราสามารถหาค่าปริพันธ์

$$\int_0^N e^{-st} f(t)dt$$

ได้แน่นอน อย่างไรก็ตาม ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^N e^{-st} f(t)dt$$

อาจจะไม่มีค่าก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับค่าของ $e^{-st}f(t)$ เมื่อ t มีค่ามาก ๆ

ต่อไปเราจะกล่าวถึงสมบัติบางอย่างของ f ซึ่งจะช่วยในการยืนยันการมีอยู่จริงของผลการแปลงลาปลาซ

บทนิยาม 6.4 (อันดับเลขชี้กำลัง)
ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน $[0,+\infty)$ เราจะเรียก f ว่ามี **อันดับเลขชี้กำลัง** (exponential order) เป็น $\alpha(\geq 0)$ ถ้า มีค่าคงตัว M และ T ซึ่งมีค่าเป็นบวกที่ทำให้

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \text{ สำหรับทุก } t > T$$

ตัวอย่าง 6.9 จงแสดงว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. ฟังก์ชันที่มีขอบเขตมีอันดับเลขชี้กำลังเป็น 0
2. ฟังก์ชัน $f(t) = \cos t$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลังเป็น α สำหรับทุก $\alpha \geq 0$

3. ฟังก์ชัน $f(t) = e^{5t} \sin 2t$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลังเป็น 5
4. ฟังก์ชัน $f(t) = e^{t^2}$ ไม่เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง
5. ฟังก์ชัน $f(t) = 1/t$ ไม่เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

จากความรู้ในบทก่อนหน้านี้ ฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว เช่น ฟังก์ชันพหุนาม ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ฟังก์ชันไซน์ และฟังก์ชันโคไซน์ เป็นต้น จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบช่วงและมีอันดับเลขชี้กำลัง ในลำดับต่อไปนี้ เราจะแสดงว่าผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันดังกล่าวนี้หาค่าได้ สำหรับทุก s ที่มีค่ามากพอ

ทฤษฎีบท 6.2 (การมีอยู่จริงของผลการแปลงลาปลาซ)
กำหนดให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบน $[0,+\infty)$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบช่วงบน $[0,+\infty)$ และมีอันดับเลขชี้กำลังเป็น α แล้ว สำหรับทุกจำนวนจริง s ที่ $s > \alpha$ จะได้ว่า ผลการแปลงลาปลาซ $\mathscr{L}\{f\}(s)$ หาค่าได้

การพิสูจน์ เราจะแสดงว่าผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน f หาค่าได้ โดยการแสดงว่าสำหรับทุกจำนวนจริง $s > \alpha$ จะต้องได้ว่าปริพันธ์

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

หาค่าได้

เนื่องจาก f มีอันดับเลขชี้กำลังเป็น α ฉะนั้น จะมีค่าคงตัว T และ M ซึ่งค่าเป็นบวก ที่ทำให้ $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ สำหรับทุก $t \geq T$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบช่วงบน $[0,+\infty)$ ฉะนั้น สำหรับทุกจำนวนจริง s เราทราบว่าฟังก์ชัน $e^{-st}f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบช่วงบนช่วง $[0,T]$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[0,T]$ เพราะฉะนั้น เราจะแยกปริพันธ์ไม่ตรงแบบข้างต้นนี้ออกเป็นสองปริพันธ์ดังนี้

$$\int_0^{T} e^{-st} f(t)dt + \int_T^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \tag{6.2}$$

เนื่องจากปริพันธ์พจน์แรกใน (6.2) หาค่าได้ ฉะนั้น เราจะแสดงว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่เหลือใน (6.2) หาค่าได้โดยการทดสอบด้วยการเปรียบเทียบสำหรับปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

พิจารณา สำหรับทุกจำนวนจริง t ซึ่ง $t \geq T$ เราทราบว่า

$$|e^{-st}f(t)| = e^{-st}|f(t)| \leq Me^{-(s-\alpha)t}$$

พิจารณา สำหรับทุกจำนวนจริง $s > \alpha$ จะได้ว่า

$$\int_T^{+\infty} Me^{-(s-\alpha)t}dt = M\int_T^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t}dt = M\frac{e^{-(s-\alpha)T}}{s-\alpha} < +\infty$$

เพราะฉะนั้น สำหรับทุกจำนวนจริง $s > \alpha$ จะได้ว่า

$$\int_T^{+\infty} e^{-st}f(t)dt \leq \int_T^{+\infty} |e^{-st}f(t)|dt \leq \int_T^{+\infty} Me^{-(s-\alpha)t}dt < +\infty$$

เนื่องจากปริพันธ์ทั้งสองพจน์ใน (6.2) หาค่าได้ เราจึงสรุปได้ว่า ผลการแปลงลาปลาซ $\mathscr{L}\{f\}(s)$ หาค่าได้ สำหรับทุกจำนวนจริง $s > \alpha$ ■

ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพื้นฐานสามารถสรุปได้ดังนี้

แบบฝึกหัด

จงใช้บทนิยาม 6.1 หาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 6.1 $f(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$

แบบฝึกหัด 6.2 $f(t) = \begin{cases} 4, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$

แบบฝึกหัด 6.3 $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$

ตาราง 6.1: ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพื้นฐาน (Verify?)

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f\}(s)$	ช่วงของ s
1	$\frac{1}{s}$	$(0,+\infty)$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$(0,+\infty)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$(a,+\infty)$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$(0,+\infty)$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$(0,+\infty)$
$\sinh bt$	$\frac{b}{s^2-b^2}$	$(0,+\infty)$
$\cosh bt$	$\frac{s}{s^2-b^2}$	$(0,+\infty)$

แบบฝึกหัด 6.4 $f(t) = \begin{cases} 2t+1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$

แบบฝึกหัด 6.5 $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}$

แบบฝึกหัด 6.6 $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \pi/2 \\ \cos t, & t \ge \pi/2 \end{cases}$

แบบฝึกหัด 6.7 $f(t) = e^{t+7}$

แบบฝึกหัด 6.8 $f(t) = e^{-2t-5}$

แบบฝึกหัด 6.9 $f(t) = te^{4t}$

แบบฝึกหัด 6.10 m $f(t) = t^2e^{-2t}$

แบบฝึกหัด 6.11 $f(t) = e^{-t}\sin t$

แบบฝึกหัด 6.12 $f(t) = e^{t}\cos t$

แบบฝึกหัด 6.13 $f(t) = t\cos t$

แบบฝึกหัด 6.14 $f(t) = t\sin t$

จงใช้ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพื้นฐานในตาราง 6.1 หาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 6.15 $f(t) = 2t^4$

แบบฝึกหัด 6.16 $f(t) = t^5$

แบบฝึกหัด 6.17 $f(t) = 4t - 10$

แบบฝึกหัด 6.18 $f(t) = 7t + 3$

แบบฝึกหัด 6.19 $f(t) = t^2 + 6t - 3$

แบบฝึกหัด 6.20 $f(t) = -4t^2 + 16t + 9$

แบบฝึกหัด 6.21 $f(t) = (t+1)^3$

แบบฝึกหัด 6.22 $f(t) = (2t-1)^3$

แบบฝึกหัด 6.23 $f(t) = 1 + e^{4t}$

แบบฝึกหัด 6.24 $f(t) = t^2 - e^{-9t+5}$

แบบฝึกหัด 6.25 $f(t) = (1 + e^{2t})^2$

แบบฝึกหัด 6.26 $f(t) = (e^t - e^{-t})^2$

แบบฝึกหัด 6.27 $f(t) = 4t^2 - 5\sin 3t$

แบบฝึกหัด 6.28 $f(t) = \cos 5t + \sin 2t$

แบบฝึกหัด 6.29 $f(t) = \sinh kt$

แบบฝึกหัด 6.30 $f(t) = \cosh kt$

แบบฝึกหัด 6.31 $f(t) = e^t \sinh t$

แบบฝึกหัด 6.32 $f(t) = e^{-t} \cosh t$

จงใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 6.33 $f(t) = \sin 2t \cos 2t$

แบบฝึกหัด 6.34 $f(t) = \cos^2 t$

แบบฝึกหัด 6.35 $f(t) = \sin(4t + 5)$

แบบฝึกหัด 6.36 $f(t) = 10\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$

พิจารณาฟังก์ชันแกมม่าที่นิยามโดยปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

สำหรับทุก $\alpha > 0$

แบบฝึกหัด 6.37 จงแสดงว่า $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

แบบฝึกหัด 6.38 จงแสดงว่า สำหรับทุก $\alpha > -1$

$$\mathscr{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

จงใช้ความจริงที่ว่า $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ และผลจากแบบฝึกหัด 6.37 - 6.38 หาผลการแปลงลาปลาซต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 6.39 $f(t) = t^{-1/2}$

แบบฝึกหัด 6.40 $f(t) = t^{1/2}$

6.2 ผลการแปลงลาปลาซผกผัน

เราทราบว่าการแปลงลาปลาซคือการแปลงฟังก์ชัน $f(t)$ ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชัน $F(s)$ ซึ่งเราเขียนได้เป็น $\mathscr{L}\{f\} = F(s)$ ในหัวข้อนี้ จะพิจารณาในทางกลับกัน กล่าวคือ ถ้ามีฟังก์ชัน $F(s)$ เราจะหาฟังก์ชัน $f(t)$ ที่ถูกแปลงลาปลาซแล้วได้เป็นฟังก์ชัน $F(s)$ ที่กำหนดให้นี้ได้อย่างไร ซึ่งต่อไปจะเรียกกระบวนการหาฟังก์ชัน f นี้ว่า การแปลงลาปลาซผกผัน ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 6.5 (ผลการแปลงลาปลาซผกผัน)
ให้ $F(s)$ เป็นฟังก์ชัน ถ้ามีฟังก์ชัน $f(t)$ ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0, +\infty)$ และสอดคล้องกับ

$$\mathscr{L}\{f\} = F$$

แล้วเราเรียกฟังก์ชัน f นี้ว่า ***ผลการแปลงลาปลาซผกผัน*** (inverse Laplace transform) ของฟังก์ชัน $F(s)$ และเขียนแทน f ด้วย $\mathscr{L}^{-1}$

ตัวอย่าง 6.10 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $F(s) = \frac{2}{s^3}$
2. $F(s) = \frac{3}{s^2+9}$
3. $F(s) = \frac{s}{s^2-4}$

วิธีทำ ในการหาผลการแปลงลาปลาซผกผันนี้ เราจะใช้ผลการแปลงลาปลาซในตาราง 6.1 ดังนี้

1. เนื่องจากผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน t^2 คือ $\frac{2!}{s^3}$ บนช่วง $(0, +\infty)$ จึงได้ว่าผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชัน $\frac{2}{s^3}$ คือ t^2

2. เนื่องจากผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $\sin 3t$ คือ $\frac{3}{s^2+3^2}$ บนช่วง $(0, +\infty)$ จึงได้ว่า ผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชัน $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+9}\right)$ คือ $\sin 3t$

3. ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

แน่นอนว่า จากตาราง 6.1 เราจะได้ผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันพื้นฐานดังนี้

ตาราง 6.2: ผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันพื้นฐาน (Verify?)

$F(s)$	$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{n!}{s^{n+1}}, n \in \mathbb{N}$	t^n
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\sin bt$
$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\cos bt$
$\frac{b}{s^2-b^2}$	$\sinh bt$
$\frac{s}{s^2-b^2}$	$\cosh bt$

สังเกตว่าผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพื้นฐานในตาราง 6.2 เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0,+\infty)$ ทั้งหมด นอกจากนี้ ในทำนองเดียวกันกับผลการแปลงลาปลาซ เราจะได้ว่าผลการแปลงลาปลาซผกผันสอดคล้องสมบัติเชิงเส้นเช่นกัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.3 (สมบัติเชิงเส้นของผลการแปลงผกผัน)
สมมติให้ผลการแปลงลาปลาซผกผัน $\mathscr{L}^{-1}\{F\}$ และ $\mathscr{L}^{-1}\{G\}$ ของฟังก์ชัน F และ G หาค่าได้ และต่อเนื่องบนช่วง $[0,+\infty)$ และให้ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\{F+G\} &= \mathscr{L}^{-1}\{F\}+\mathscr{L}^{-1}\{G\}\\ \mathscr{L}^{-1}\{cF\} &= c\mathscr{L}^{-1}\{F\}\end{aligned}$$

การพิสูจน์ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ตัวอย่าง 6.11 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+7}\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+(\sqrt{7})^2}\} = \cos\sqrt{7}t$ และ $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+(\sqrt{7})^2}\} = \sin\sqrt{7}t$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0,+\infty)$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+7}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+7}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+7}\right\} \\
&= 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+7}\right\} + \frac{5}{\sqrt{7}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+7}\right\} \\
&= 3\cos\sqrt{7}t + \frac{5}{\sqrt{7}}\sin\sqrt{7}t
\end{aligned}$$

■

ในบางครั้งเราจำเป็นต้องทำการแยกเศษส่วนย่อย (partial fraction) ของฟังก์ชันที่พิจารณาก่อนหาผลการแปลงลาปลาซผกผันดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.12 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\}$

วิธีทำ เนื่องจากมีจำนวนจริง A, B และ C เพียงชุดเดียวที่ทำให้

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4}$$

นั่นคือ

$$A(s+2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s+2) = 1$$

หรือ

$$A(s^2+6s+8) + B(s^2+3s-4) + C(s^2+s-2) = 1$$

ซึ่งจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$(A+B+C)s^2 + (6A+3B+C)s + (8A-4B-2C) = 1$$

ทำการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$A+B+C = 0$$

$$6A+3B+C=0$$

และ

$$8A-4B-2C=1$$

ซึ่งจะพบว่าเป็นระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปร และเมื่อทำการหาผลเฉลยของระบบสมการ จะได้ว่า

$$A=\frac{1}{15}, \quad B=-\frac{1}{6} \text{ และ } \quad C=\frac{1}{10} \quad \text{(Veryfy?)}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{15(s-1)}+\frac{-1}{6(s+2)}+\frac{1}{10(s+4)}\right\} \\
&= \frac{1}{15}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-\frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-2)}\right\} \\
&\quad +\frac{1}{10}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-4)}\right\} \\
&= \frac{1}{15}e^{t}-\frac{1}{6}e^{-2t}+\frac{1}{10}e^{-4t}
\end{aligned}$$

โดยสมการทั้งหมดข้างต้นเป็นจริงเพราะ $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}=e^{t}$, $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-2)}\right\}=e^{-2t}$ และ $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-4)}\right\}=e^{-4t}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0,+\infty)$ ■

ตัวอย่าง 6.13 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^2}\right\}$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ตัวอย่าง 6.14 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\}$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

แบบฝึกหัด

จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 6.41 $F(s) = \frac{1}{s^3}$

แบบฝึกหัด 6.42 $F(s) = \frac{1}{s^4}$

แบบฝึกหัด 6.43 $F(s) = \frac{(s+1)^3}{s^4}$

แบบฝึกหัด 6.44 $F(s) = \frac{(s+2)^2}{s^3}$

แบบฝึกหัด 6.45 $F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2}$

แบบฝึกหัด 6.46 $F(s) = \frac{1}{4s+1}$

แบบฝึกหัด 6.47 $F(s) = \frac{4s}{4s^2+1}$

แบบฝึกหัด 6.48 $F(s) = \frac{1}{s^2-16}$

แบบฝึกหัด 6.49 $F(s) = \frac{10s}{s^2-25}$

แบบฝึกหัด 6.50 $F(s) = \frac{2s-6}{s^2+9}$

แบบฝึกหัด 6.51 $F(s) = \frac{1}{s^2+3s}$

แบบฝึกหัด 6.52 $F(s) = \frac{s+1}{s^2-4s}$

แบบฝึกหัด 6.53 $F(s) = \frac{s}{s^2+2s-3}$

แบบฝึกหัด 6.54 $F(s) = \frac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)}$

แบบฝึกหัด 6.55 $F(s) = \frac{s+1}{(s^2-4s)(s+5)}$

แบบฝึกหัด 6.56 $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+4)}$

แบบฝึกหัด 6.57 $F(s) = \frac{s}{(s^2+4)(s+2)}$

แบบฝึกหัด 6.58 $F(s) = \frac{1}{s^4-9}$

6.3 สมบัติของผลการแปลงลาปลาซ

เนื่องจากการหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)$ ใด ๆ นั้น เกี่ยวข้องกับการคำนวณปริพันธ์ไม่ตรงแบบตามนิยาม

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

ซึ่งในบางครั้ง การหาปริพันธ์ดังกล่าวนี้เป็นเรื่องยาก อย่างไรก็ตาม เราได้เห็นแล้วว่าสมบัติเชิงเส้นของผลการแปลง (ทฤษฎีบท 6.1) ช่วยให้การหาผลการแปลงลาปลาซสะดวกขึ้น ในส่วนต่อไปนี้นี้ เราจะพิจารณาสมบัติเพิ่มเติมที่จะช่วยให้การหาผลการแปลงลาปลาซสะดวกยิ่งขึ้น ทั้งนี้ สมบัติเหล่านี้จะช่วยให้การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ และปัญหาค่าเริ่มต้นที่เราจะศึกษาในลำดับถัดไปอีกด้วย

ทฤษฎีบท 6.4 (ทฤษฎีบทการเลื่อนขนาน)
ถ้าผลการแปลงลาปลาซ $\mathscr{L}\{f\}(s) = F(s)$ หาค่าได้ สำหรับทุก $s > \alpha$ แล้ว

$$\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s-a)$$

สำหรับทุก $s > \alpha + a$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $s > \alpha + a$ นั่นคือ $s - a > \alpha$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} f(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} f(t)dt \\ &= F(s-a)\end{aligned}$$

■

สังเกตว่า ถ้าเราทราบผลการแปลงลาปลาซ $\mathscr{L}\{f\}(s) = F(s)$ แล้ว ทฤษฎีบท 6.4 สามารถช่วยในการหาผลการแปลงลาปลาซ $\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\}(s)$ สะดวกขึ้นโดยการ

เลื่อนขนานจาก $F(s)$ ไปเป็น $F(s-a)$ กล่าวคือ พิจารณาค่าคงตัว s ใด ๆ จะพบว่า กราฟของ $F(s-a)$ คือ กราฟที่เกิดจากการเลื่อนขนานกราฟของ $F(s)$ บนแกนของ s ด้วยระยะทาง $|a|$ นั่นคือ ถ้า $a>0$ กราฟของ $F(s)$ จะถูกเลื่อนไปทางขวาเป็นระยะทาง a หน่วย ในทำนองเดียวกัน ถ้า $a<0$ กราฟของ $F(s)$ จะถูกเลื่อนไปทางซ้ายเป็นระยะทาง $|a|$ หน่วยเช่นกัน

เพื่อให้การคำนวณสะดวกขึ้น จะใช้สัญลักษณ์แทนผลการแปลงลาปลาซ

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} =: \mathscr{L}\{f(t)\}_{s\to s-a}$$

ตัวอย่าง 6.15 จงใช้ทฤษฎีบทการเลื่อนขนาน (ทฤษฎีบท 6.4) หาผลการแปลงลาปลาซต่อไปนี้

1. $\mathscr{L}\{e^{5t}t^3\}$
2. $\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$

วิธีทำ 1. กำหนดให้ $s>5$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{e^{5t}t^3\} &= \mathscr{L}\{t^3\}_{s\to s-5}\\ &= \left.\frac{3}{s^4}\right|_{s\to s-5}\\ &= \frac{3}{(s-5)^4}\end{aligned}$$

2. ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

จากทฤษฎีบทการเลื่อนขนาน (ทฤษฎีบท 6.4) เราจะได้ว่า ถ้า $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ แล้ว

$$\begin{aligned}e^{at}f(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\}\\ &= \mathscr{L}^{-1}\{F(s)|_{s\to s-a}\}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.16 จงใช้ผลจากทฤษฎีบทการเลื่อนขนาน (ทฤษฎีบท 6.4) หาผลการแปลงลาปลาซผกผัน

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6s+11}\right\}$$

วิธีทำ กำหนดให้ $s>-3$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6s+11}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+3)-3}{(s^2+6s+9)+2}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+3)-3}{(s+3)^2+2}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+3)}{(s+3)^2+2}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+3)^2+2}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+3)}{(s+3)^2+2}\right\} - \frac{3}{\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{(s+3)^2+2}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\left.\frac{s}{s^2+2}\right|_{s\to s-(-3)}\right\} - \frac{3}{\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\left.\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right|_{s\to s-(-3)}\right\} \\
&= e^{-3t}\cos\sqrt{2}t - \frac{3}{\sqrt{2}}e^{-3t}\sin\sqrt{2}t
\end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 6.17 จงใช้ผลจากทฤษฎีบทการเลื่อนขนาน (ทฤษฎีบท 6.4) หาผลการแปลงลาปลาซผกผัน

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}+\frac{1}{s^2+2s-8}\right\}$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

เนื่องจากจุดมุ่งหมายในที่นี้คือ การนำผลการแปลงลาปลาซไปใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เราจึงจำเป็นต้องศึกษาผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เช่น $\mathscr{L}\{f'(t)\}$ และ $\mathscr{L}\{f''(t)\}$ เป็นต้น ซึ่งมีรายละเอียดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.5 (ผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์)
ให้ $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)(t)}$ *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน* $[0,+\infty)$ *ที่มีอันดับเลขชี้กำลัง และให้* $f^{(n)}(t)$ *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบช่วงบน* $[0,+\infty)$ *แล้วสำหรับทุก* $s > \alpha$ *จะได้ว่า*

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathscr{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

สำหรับการพิสูจน์จะละไว้ ณ ที่นี้ อย่างไรก็ตาม จากทฤษฎีบท 6.5 ทำให้สามารถคำนวณผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ เช่น

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = s\mathscr{L}\{f(t)\} - f(0)$$

และ

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2\mathscr{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

เป็นต้น

ตัวอย่าง 6.18 กำหนดให้ $\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ จงใช้ทฤษฎีบทผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ (ทฤษฎีบท 6.5) หาผลการแปลงลาปลาซ $\mathscr{L}\{t\}$

วิธีทำ กำหนดให้ $s > 0$ และให้ $f(t) = t$ นั่นคือ $f'(t) = 1$ และ $f(0) = 0$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,+\infty)$ และมีอันดับเลขชี้กำลัง จากทฤษฎีบทผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\mathscr{L}\{1\} = s\mathscr{L}\{t\} - f(0)$$

นั่นคือ

$$\frac{1}{s} = s\mathscr{L}\{t\} - 0$$

ซึ่งส่งผลให้ได้ว่า

$$\mathscr{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

■

ตัวอย่าง 6.19 กำหนดให้ $\mathscr{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}$ จงใช้ทฤษฎีบทผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ (ทฤษฎีบท 6.5) หาผลการแปลงลาปลาซ $\mathscr{L}\{\sin bt\}$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

สังเกตว่า คำถามที่มักจะเกิดขึ้นเกี่ยวกับการแปลงใด ๆ คือ ถ้า $F(s)$ เป็นผลการแปลงลาปลาซของ $f(t)$ แล้ว $F'(s)$ จะเป็นผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันของตัวแปร t บางฟังก์ชันด้วยหรือไม่ ซึ่งคำตอบเป็นไปดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.6 (อนุพันธ์ของผลการแปลงลาปลาซ)
ให้ $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ และสมมติให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบช่วงบน $[0,+\infty)$ ที่มีอันดับเลขชี้กำลัง แล้ว สำหรับทุก $s > \alpha$ จะได้ว่า

$$\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

สำหรับการพิสูจน์จะละไว้ ณ ที่นี้

ตัวอย่าง 6.20 จงใช้ทฤษฎีบทอนุพันธ์ของผลการแปลงลาปลาซ (ทฤษฎีบท 6.6) หาผลการแปลงลาปลาซ

$$\mathscr{L}\left\{te^{3t}\right\}$$

วิธีทำ กำหนดให้ $s > 3$ เนื่องจากฟังก์ชัน $f(t) = e^{3t}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบช่วงบน $[0,+\infty)$ และมีอันดับเลขชี้กำลัง และ $F(s) = \mathscr{L}\left\{e^{3t}\right\} = \frac{1}{s-3}$ โดยทฤษฎีบทอนุพันธ์ของผลการแปลงลาปลาซ เมื่อ $n = 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{te^{3t}\right\} &= (-1)\frac{d}{ds}\mathscr{L}\left\{e^{3t}\right\} \\
&= -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-3}\right) \\
&= \frac{d}{ds}\frac{1}{(s-3)^2}
\end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 6.21 จงใช้ทฤษฎีบทอนุพันธ์ของผลการแปลงลาปลาซ (ทฤษฎีบท 6.6) หาผลการแปลงลาปลาซ

$$\mathscr{L}\left\{t^2 \sin bt\right\}$$

วิธีทำ กำหนดให้ $s > 0$ เนื่องจากฟังก์ชัน $f(t) = \sin bt$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบช่วงบน $[0, +\infty)$ และมีอันดับเลขชี้กำลัง และ $F(s) = \mathscr{L}\{\sin bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}$ โดยทฤษฎีบทอนุพันธ์ของผลการแปลงลาปลาซ เมื่อ $n = 2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{t^2 \sin bt\right\} &= (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \mathscr{L}\{\sin bt\} \\
&= \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{b}{s^2+b^2}\right) \\
&= \frac{d}{ds}\left(\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}\right) \\
&= \frac{2b(s^2+b^2)^2 - 8bs^2(s^2+b^2)}{(s^2+b^2)^4}
\end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 6.22 จงหาผลการแปลงลาปลาซ

$$\mathscr{L}\left\{te^{-t}\cos bt\right\}$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน (ใช้ทฤษฎีบทการเลื่อนขนานและทฤษฎีบทอนุพันธ์ของผลการแปลงลาปลาซ) ■

ตัวอย่าง 6.23 จงหาผลการแปลงลาปลาซ

$$\mathscr{L}\{bt\cos bt + \sin bt\}$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน (ใช้ทฤษฎีบทผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์และทฤษฎีบทอนุพันธ์ของผลการแปลงลาปลาซ) ■

แบบฝึกหัด

จงหาผลการแปลงลาปลาซหรือผลการแปลงลาปลาซผกผันในแต่ละข้อต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 6.59 $\mathscr{L}\{te^{10t}\}$

แบบฝึกหัด 6.60 $\mathscr{L}\{te^{-6t}\}$

แบบฝึกหัด 6.61 $\mathscr{L}\{t^3e^{-2t}\}$

แบบฝึกหัด 6.62 $\mathscr{L}\{t^10e^{-7t}\}$

แบบฝึกหัด 6.63 $\mathscr{L}\{e^t\sin 3t\}$

แบบฝึกหัด 6.64 $\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$

แบบฝึกหัด 6.65 $\mathscr{L}\{e^{5t}\sinh 3t\}$

แบบฝึกหัด 6.66 $\mathscr{L}\left\{\frac{\cosh t}{e^t}\right\}$

แบบฝึกหัด 6.67 $\mathscr{L}\{t(e^t+e^{2t})^2\}$

แบบฝึกหัด 6.68 $\mathscr{L}\{e^{-t}\sin^2 t\}$

แบบฝึกหัด 6.69 $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\}$

แบบฝึกหัด 6.70 $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-6s+10}\right\}$

แบบฝึกหัด 6.71 $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+4s+5}\right\}$

แบบฝึกหัด 6.72 $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{s^2+6s+34}\right\}$

แบบฝึกหัด 6.73 $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2}\right\}$

แบบฝึกหัด 6.74 $\mathscr{L}\{\sin 3t\cos 3t\}$

แบบฝึกหัด 6.75 $\mathscr{L}\{t\sin 3t\}$

แบบฝึกหัด 6.76 $\mathscr{L}\{t\sin^2 t\}$

แบบฝึกหัด 6.77 $\mathscr{L}\{t^2\sinh t\}$

แบบฝึกหัด 6.78 $\mathscr{L}\{te^{-3t}\cos 3t\}$

6.4 การหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นโดยผลการแปลงลาปลาซ

ในหัวข้อนี้ จะนำความรู้เรื่องผลการแปลงลาปลาซ ผลการแปลงลาปลาซผกผัน และสมบัติของผลการแปลงลาปลาซทั้งหมดข้างต้นมาใช้ในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.24 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y' - 3y = e^{2t}, \quad y(0) = 1$$

วิธีทำ ในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นโดยการใช้ผลการแปลงลาปลาซแยกเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 แปลงลาปลาซทั้งสองฝั่งของสมการเชิงอนุพันธ์และจัดรูปโดยใช้สมบัติเชิงเส้นของผลการแปลง

จากสมการเชิงอนุพันธ์

$$y' - 3y = e^{2t}$$

เมื่อทำการแปลงลาปลาซทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้

$$\mathscr{L}\{y' - 3y\} = \mathscr{L}\{e^{2t}\}$$

และจัดรูปโดยใช้สมบัติเชิงเส้นของผลการแปลง จะได้

$$\mathscr{L}\{y'\} - 3\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{e^{2t}\}$$

ขั้นที่ 2 กำหนดให้ $\mathscr{L}\{y\} = Y(s)$ จัดรูปสมการที่ได้ในขั้นที่ 1 ให้อยู่ในรูป $Y(s)$ โดยใช้สมบัติผลการแปลงลาปลาซที่เกี่ยวข้องและค่าเริ่มต้นที่กำหนดให้

กำหนดให้ $\mathscr{L}\{y\} = Y(s)$ จากผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์และค่าเริ่มต้น $y(0) = 1$ จะได้ว่า

$$\mathscr{L}\{y'\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

และเราทราบว่า

$$\mathscr{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$$

ดังนั้น จากสมการในขั้นที่ 1 ที่ว่า

$$\mathscr{L}\{y'\} - 3\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{e^{2t}\}$$

จึงได้ว่า

$$sY(s) - 1 - 3Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

นั่นคือ

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)}$$

ขั้นที่ 3 หาผลเฉลย $y(t)$ โดยทำการแปลงลาปลาซผกผันฟังก์ชัน $Y(s)$ จาก

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)}$$

ซึ่งเขียนในรูปเศษส่วนย่อยได้เป็น

$$Y(s) = \frac{-1}{s-2} + \frac{2}{s-3}$$

(Verify?) และเมื่อทำการแปลงลาปลาซผกผันทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s-2} + \frac{2}{s-3}\right\} \\ &= -\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \\ &= -e^{2t} + 2e^{3t} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นนี้ คือ $y(t) = -e^{2t} + 2e^{3t}$ ■

ตัวอย่าง 6.25 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y' - y = \sin t, \qquad y(0) = 0$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ตัวอย่าง 6.26 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}, \qquad y(0) = 2, y'(0) = 6$$

วิธีทำ ขั้นที่ 1 แปลงลาปลาซทั้งสองฝั่งของสมการเชิงอนุพันธ์และจัดรูปโดยใช้สมบัติเชิงเส้นของผลการแปลง

จากสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}$$

เมื่อทำการแปลงลาปลาซทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้

$$\mathscr{L}\{y'' - 6y' + 9y\} = \mathscr{L}\{t^2 e^{3t}\}$$

และจัดรูปโดยใช้สมบัติเชิงเส้นของผลการแปลง จะได้

$$\mathscr{L}\{y''\} - 6\mathscr{L}\{y'\} + 9\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{t^2 e^{3t}\}$$

ขั้นที่ 2 กำหนดให้ $\mathscr{L}\{y\} = Y(s)$ จัดรูปสมการที่ได้ในขั้นที่ 1 ให้อยู่ในรูป $Y(s)$ โดยใช้สมบัติผลการแปลงลาปลาซที่เกี่ยวข้องและค่าเริ่มต้นที่กำหนดให้

กำหนดให้ $\mathscr{L}\{y\} = Y(s)$ จากผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์และค่าเริ่มต้น $y(0) = 2$,และ $y'(0) = 6$ จะได้ว่า

$$\mathscr{L}\{y''\} = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - 2s - 6$$

และ

$$\mathscr{L}\{y'\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 2$$

และเราทราบว่า

$$\mathscr{L}\{t^2e^{3t}\} = \mathscr{L}\{t^2\}_{s\to s-3} = \left.\frac{2}{s^3}\right|_{s\to s-3} = \frac{2}{(s-3)^3}$$

ดังนั้น จากสมการในขั้นที่ 1 ที่ว่า

$$\mathscr{L}\{y''\} - 6\mathscr{L}\{y'\} + 9\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{t^2e^{3t}\}$$

จึงได้ว่า

$$(s^2Y(s) - 2s - 6) - 6(sY(s) - 2) + 9Y(s) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

นั่นคือ

$$Y(s) = \frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{s-3}$$

ขั้นที่ 3 หาผลเฉลย $y(t)$ โดยทำการแปลงลาปลาซผกผันฟังก์ชัน $Y(s)$

จาก $Y(s) = \frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{s-3}$ เมื่อทำการแปลงลาปลาซผกผันทั้งสองฝั่งของสมการจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{s-3}\right\} \\
&= 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^5}\right\} + 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \\
&= \frac{2}{4!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{(s-3)^5}\right\} + 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \\
&= \frac{2}{4!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\left.\frac{4!}{s^5}\right|_{s\to s-3}\right\} + 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \\
&= \frac{1}{12}t^4e^{3t} + 2e^{3t}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นนี้ คือ $y(t) = \frac{1}{12}t^4e^{3t} + 2e^{3t}$ ■

ตัวอย่าง 6.27 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'' + 9y = \cos 3t, \qquad y(0) = 2, y'(0) = 5$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

แบบฝึกหัด

จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 6.79 $y' - y = 1, \qquad y(0) = 0$

แบบฝึกหัด 6.80 $y' + 2y = t, \qquad y(0) = -1$

แบบฝึกหัด 6.81 $y' + 4y = e^{-4t}, \qquad y(0) = 2$

แบบฝึกหัด 6.82 $y' - y = \sin t, \qquad y(0) = 0$

แบบฝึกหัด 6.83 $y' - y = te^t \sin t, \qquad y(0) = 0$

แบบฝึกหัด 6.84 $y'' + 5y' + 4y = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0$

แบบฝึกหัด 6.85 $y'' - 6y' + 13y = 0, \qquad y(0) = 0, y'(0) = -3$

แบบฝึกหัด 6.86 $y'' - 6y' + 9y = t, \qquad y(0), y'(0) = 1$

แบบฝึกหัด 6.87 $y'' - 4y' + 4y = t^3, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0$

แบบฝึกหัด 6.88 $y'' - 4y' + 4y = t^3e^{2t}, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 0$

แบบฝึกหัด 6.89 $y'' - 7y' + 10y = 9\cos t + 7\sin t, \qquad y(0) = 5, y'(0) = -4$

แบบฝึกหัด 6.90 $y'' + 4y = 4t^2 - 4t + 10, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 3$

6.5 การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโดยผลการแปลงลาปลาซ

ในหัวข้อนี้ จะนำความรู้เรื่องผลการแปลงลาปลาซ ผลการแปลงลาปลาซผกผัน และสมบัติของผลการแปลงลาปลาซทั้งหมดข้างต้นมาใช้ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (system of linear differential equations) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ที่มีสอดคล้องกับค่าเริ่มต้นที่กำหนดให้ดังนี้

ตัวอย่าง 6.28 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{aligned} 2x' + y' - y &= t \\ x' + y' &= t^2 \end{aligned}$$

โดยที่ $x(0) = 1$ และ $y(0) = 0$

วิธีทำ ในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นที่เกี่ยวข้องกับระบบสมการเชิงเส้นโดยการใช้ผลการแปลงลาปลาซแยกเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 แปลงลาปลาซทั้งสองฝั่งของสมการเชิงอนุพันธ์และจัดรูปโดยใช้สมบัติเชิงเส้นของผลการแปลง

จากสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งสองสมการที่กำหนดให้ เมื่อทำการแปลงลาปลาซทั้งสองฝั่งของสมการ และจัดรูปโดยใช้สมบัติเชิงเส้นของผลการแปลง จะได้

$$\mathscr{L}\{y'\} - 3\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{e^{2t}\}$$

$$\begin{aligned} 2\mathscr{L}\{x'\} + \mathscr{L}\{y'\} - \mathscr{L}\{y\} &= \mathscr{L}\{t\} \\ \mathscr{L}\{x'\} + \mathscr{L}\{y'\} &= \mathscr{L}\{t^2\} \end{aligned}$$

ขั้นที่ 2 กำหนดให้ $\mathscr{L}\{x\} = X(s)$ และ $\mathscr{L}\{y\} = Y(s)$ จัดรูปสมการที่ได้ในขั้นที่ 1 ให้อยู่ในรูป $X(s)$ และ $Y(s)$ โดยใช้สมบัติผลการแปลงลาปลาซที่เกี่ยวข้องและค่าเริ่มต้นที่กำหนดให้

กำหนดให้ $\mathscr{L}\{x\} = X(s)$ และ $\mathscr{L}\{y\} = Y(s)$ จากผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์และค่าเริ่มต้น $x(0) = 1$ และ $y(0) = 1$ จะได้ว่า

$$2\mathscr{L}\{x'\} + \mathscr{L}\{y'\} - \mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{t\}$$

เขียนใหม่ได้เป็น

$$2(sX(s) - x(0)) + (sY(s) - y(0)) - Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

นั่นคือ

$$2sX(s) + (s-1)Y(s) = 2 + \frac{1}{s^2}$$

และในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\mathscr{L}\{x'\} + \mathscr{L}\{y'\} = \mathscr{L}\{t^2\}$$

เขียนใหม่ได้เป็น

$$(sX(s) - x(0)) + (sY(s) - y(0)) = \frac{2}{s^3}$$

นั่นคือ

$$sX(s) + sY(s) = 1 + \frac{2}{s^3}$$

ดังนั้น จะได้ระบบสมการ

$$2sX(s) + (s-1)Y(s) = 2 + \frac{1}{s^2} \tag{6.3}$$

$$sX(s) + sY(s) = 1 + \frac{2}{s^3} \tag{6.4}$$

ขั้นที่ 3 หาผลเฉลย $x(t)$ หรือ $y(t)$ โดยการกำจัดตัวแปรอีกหนึ่งตัวและทำการแปลงลาปลาซผกผันฟังก์ชัน $X(s)$ หรือ $Y(s)$ ที่ยังคงอยู่ จากระบบสมการที่ได้ในขั้นที่ 2

การคูณตลอดสมการ (6.4) ด้วย 2 และนำไปลบออกจากจากสมการ (6.3) ทำให้ได้ว่า

$$(-s-1)Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s^3}$$

หรือ

$$Y(s) = frac4 - ss^3(s+1)$$

และเมื่อทำการแยกเศษส่วนย่อย จะได้ว่า

$$Y(s) = \frac{5}{s} - \frac{3}{s^2} + \frac{4}{s^3} - \frac{5}{s+1}$$

(Verify?) และเมื่อทำการแปลงลาปลาซผกผันทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} &= 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\ &\quad + 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} - 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ &= 5 - 5t + 2t^2 - 5e^{-t} \end{aligned}$$

ขั้นที่ 4 นำผลเฉลย $x(t)$ หรือ $y(t)$ ที่ได้จากขั้นที่ 3 มาแทนค่าเพื่อหาผลเฉลยที่เหลือจากสมการ (6.4) จะพบว่า

$$sX(s) = -sY(s) + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^4}$$

เมื่อทำการแปลงลาปลาซผกผันทั้งสองฝั่งของสมการ จะได้ว่า

$$x(t) = -\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{2}{3!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}$$

นั่นคือ

$$x(t) = -y(t) + 1 + \frac{t^3}{3}$$

ดังนั้น

$$x(t) = -4 + 5t - 2t^2 + 5e^{-t} + \frac{t^3}{3}$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นนี้ คือ

$$\begin{aligned} x(t) &= -4 + 5t - 2t^2 + 5e^{-t} + \frac{t^3}{3} \\ y(t) &= -e^{2t} + 2e^{3t} \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 6.29 จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{aligned} x'' + 10x - 4y &= 0 \\ -4x + y'' + 4y &= 0 \end{aligned}$$

โดยที่ $x(0) = 0, x'(0) = 1, y(0) = 0$ และ $y'(0) = -1$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 6.91 จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x+y\\ \frac{dy}{dt} &= 2x\end{aligned}$$

โดยที่ $x(0)=0, \quad y(0)=1$

แบบฝึกหัด 6.92 จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2y+e^t\\ \frac{dy}{dt} &= 8x-t\end{aligned}$$

โดยที่ $x(0)=1, \quad y(0)=1$

แบบฝึกหัด 6.93 จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}+3x+\frac{dy}{dt} &= 1\\ \frac{dx}{dt}-x+\frac{dy}{dt}-y &= e^t\end{aligned}$$

โดยที่ $x(0)=0, \quad y(0)=0$

แบบฝึกหัด 6.94 จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{aligned}2\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-2x &= 1\\ \frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-3x-3y &= 2\end{aligned}$$

โดยที่ $x(0)=0, \quad y(0)=0$

แบบฝึกหัด 6.95 จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dx}{dt}+x-\frac{dy}{dt}+y=0$$
$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+2y=0$$

โดยที่ $x(0)=0, \quad y(0)=1$

แบบฝึกหัด 6.96 จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x-y=0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}+y-x=0$$

โดยที่ $x(0)=0, x'(0)=-2, y(0)=0, \quad y'(0)=1$

แบบฝึกหัด 6.97 จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-4\frac{dx}{dt}=0$$

โดยที่ $x(0)=1, x'(0)=0, y(0)=-1, \quad y'(0)=5$

แบบฝึกหัด 6.98 จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}=t^2$$
$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d^2y}{dt^2}=4t$$

โดยที่ $x(0)=8, x'(0)=0, y(0)=0, \quad y'(0)=0$

แบบฝึกหัด 6.99 จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dx}{dt} - 4x + \frac{d^3y}{dt^3} = 6\sin t$$
$$\frac{dx}{dt} + 2x - 2\frac{d^3y}{dt^3} = 0$$

โดยที่ $x(0) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0 \quad y''(0) = 0$

แบบฝึกหัด 6.100 จงใช้ผลการแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 3y = 0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3y = te^{-t}$$

โดยที่ $x(0) = 0, x'(0) = 2, \quad y(0) = 0$

บทที่ 7
ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

7.1 สมการโคชี-ออยเลอร์

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นที่มีรูปแบบเฉพาะดังนี้

บทนิยาม 7.1 (สมการโคชี-ออยเลอร์) เราจะเรียกสมการเชิงเส้นที่อยู่ในรูป

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$$

โดยที่ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ และ a_0 เป็นค่าคงตัว ว่า **สมการโคชี-ออยเลอร์** (Cauchy-Euler equation)

กำหนดให้ $x \in (0, +\infty)$ เราสามารถพิจารณาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์เอกพันธุ์อันดับ n โดยการเริ่มจากสมการเชิงอนุพันธ์อับดับสองดังนี้ พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0 \tag{7.1}$$

โดยที่ a, b และ c เป็นค่าคงตัวที่ $a \neq 0$ พิจารณาผลเฉลยที่อยู่ในรูป $y = x^m$ จะได้ว่า

$$y' = mx^{m-1}$$

และ

$$y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$am(m-1)x^{m-2} + bmx^{m-1} + cx^m = 0$$

นั่นคือ

$$x^m\left(am(m-1) + bm + c\right) = 0$$

เนื่องจาก $x^m \neq 0$ เสมอ จึงได้ว่า ผลเฉลย $y = x^m$ นี้ขึ้นอยู่กับค่า m ที่เป็นรากของสมการช่วย

$$am^2 + (b-a)m + c = 0 \tag{7.2}$$

สังเกตว่า ผลเฉลยของ (4.9) คือ

$$m_1 = \frac{-(b-a) + \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$$

และ

$$m_2 = \frac{-(b-a) - \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$$

เพราะฉะนั้น พิจารณาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (7.2) ได้เป็น 3 กรณี คือ

(i) ราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน ($(b-a)^2 - 4ac > 0$)
(ii) ราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน ($(b-a)^2 - 4ac = 0$)
(iii) ราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนซ้อนสังยุค ($(b-a)^2 - 4ac < 0$)

กรณี 1 *รากเป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน*
เนื่องจากสมการช่วยมีรากจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน m_1 และ m_2 จึงได้ว่า

$$y_1 = x^{m_1} \qquad \text{และ} \qquad y_2 = x^{m_2}$$

เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (7.1) และเนื่องจาก x^{m_1} และ x^{m_2} อิสระเชิงเส้นบน $(0,+\infty)$ (Verify?) ส่งผลให้ได้ว่า $\{x^{m_1}, x^{m_2}\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเชิงอนุพันธ์ (7.1) เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของ (7.1) บน $(0,+\infty)$ คือ

$$y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}$$

กรณี 2 *รากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน*

เนื่องจาก $m_1 = m_2$ จึงได้ว่า $y = x^{m_1}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (7.1) จากการลดทอนอันดับ จะได้ผลเฉลยที่สองของสมการ (7.1) คือ

$$y_2 = x^{m_1}\int \frac{e^{-\int \frac{b}{ax}dx}}{x^{2m_1}}dx = x^{m_1}\int \frac{e^{\left(-\frac{b}{a}\ln x\right)}}{x^{2m_1}}dx = x^{m_1}\int x^{\left(-\frac{b}{a}-2m_1\right)}dx$$

และเนื่องจาก $(b-a)^2 - 4ac = 0$ จะได้ว่า $m_1 = m_2 = \frac{-(b-a)}{2a}$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$y_2 = x^{m_1}\int x^{\left(-\frac{b}{a}+2\frac{(b-a)}{2a}\right)}dx = x^{m_1}\int \frac{1}{x}dx = x^{m_1}\ln x$$

เนื่องจากผลเฉลย x^{m_1} และ $x^{m_1}\ln x$ อิสระเชิงเส้นบน $(0,+\infty)$ (Verify?) จึงได้ว่า $\{x^{m_1}, x^{m_1}\ln x\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเชิงอนุพันธ์ (7.1) เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของ (7.1) บน $(0,+\infty)$ คือ

$$y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_1}\ln x$$

กรณี 3 *รากเป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค*

เนื่องจาก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน นั่นคือ

$$m_1 = \alpha + i\beta \qquad \text{และ} \qquad m_2 = \alpha - i\beta$$

โดยที่ $\alpha > 0$ และ $\beta > 0$ เป็นค่าคงตัวและ $i^2 = -1$ ซึ่งส่งผลให้ได้ว่า (ในทำนองเดียวกับกรณี 1) ผลเฉลยทั่วไปของ (7.1) บน $(0,+\infty)$ คือ

$$y = C_1x^{(\alpha+i\beta)} + C_2x^{(\alpha-i\beta)} \tag{7.3}$$

ซึ่งสามารถเขียนผลเฉลยนี้ในรูปฟังก์ชันของจำนวนจริงได้ดังนี้

จากเอกลักษณ์ของลอการิทึมธรรมชาติ จะได้ว่า

$$x^{i\beta} = (e^{\ln x})^{i\beta} = e^{i(\beta \ln x)}$$

จากสูตรของออยเลอร์

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

โดยที่ θ เป็นค่าคงตัวใด ๆ จึงได้ว่า

$$x^{i\beta} = \cos(\beta \ln x) + i\sin(\beta \ln x) \qquad \text{(Verify?)}$$

และ

$$x^{-i\beta} = \cos(\beta \ln x) - i\sin(\beta \ln x) \qquad \text{(Verify?)}$$

นั่นคือ สมการ (7.3) จะกลายเป็น

$$\begin{aligned} y &= x^{\alpha}[C_1 x^{i\beta} + C_2 x^{-i\beta}] \\ &= x^{\alpha}[C_1(\cos(\beta \ln x) + i\sin(\beta \ln x)) + C_2(\cos(\beta \ln x) - i\sin(\beta \ln x))] \\ &= x^{\alpha}[(C_1 + C_2)\cos(\beta \ln x) + (C_1 - C_2)i\sin(\beta \ln x)] \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$y = x^{\alpha}[c_1\cos(\beta \ln x) + c_2 i\sin(\beta \ln x)]$$

โดยที่ $c_1 := C_1 + C_2$ และ $c_2 := C_1 - C_2$ ตามลำดับ

เพราะฉะนั้น

$$x^{\alpha}\cos(\beta \ln x) \qquad \text{และ} \qquad x^{\alpha}\sin(\beta \ln x)$$

เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (7.1)

เนื่องจาก $x^{\alpha}\cos(\beta\ln x)$ และ $x^{\alpha}\sin(\beta\ln x)$ อิสระเชิงเส้นบน $(0,+\infty)$ (Verify?) จึงได้ว่า $\{x^{\alpha}\cos(\beta\ln x), x^{\alpha}\sin(\beta\ln x)\}$ เป็นเซตผลเฉลยหลักมูลของสมการเชิงอนุพันธ์ (7.1) เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของ (7.1) บน $(0,+\infty)$ คือ

$$y = c_1x^{\alpha}\cos(\beta\ln x) + c_2x^{\alpha}\sin(\beta\ln x)$$

จากการวิเคราะห์ข้างต้นสามารถสรุปวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์เอกพันธุ์อันดับสองได้ดังนี้

วิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์เอกพันธุ์อันดับสอง
พิจารณาสมการเอกพันธุ์

$$ay'' + by' + cy = 0$$

โดยที่ a, b และ c เป็นค่าคงตัวที่ $a \neq 0$

1. หาสมการช่วย โดยกำหนดให้ $x \in (0,+\infty)$ และสมมติให้ $y = x^m$ เป็นผลเฉลยสองสมการที่กำหนดให้
2. หารากทั้งหมดของสมการช่วย
3. พิจารณาผลเฉลยทั่วไป ดังนี้

   (i) ถ้าราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน แล้วผลเฉลยทั่วไปบน $(0,+\infty)$ คือ
   $$y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}$$

   (ii) ถ้าราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน แล้วผลเฉลยทั่วไปบน $(0,+\infty)$ คือ
   $$y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_1}\ln x$$

   (iii) ราก m_1 และ m_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค โดยที่ $m_1 = \alpha + i\beta$ และ $m_2 = \alpha - i\beta$ แล้วผลเฉลยทั่วไปบน $(0,+\infty)$ คือ

   $$y = c_1x^{\alpha}\cos(\beta\ln x) + c_2x^{\alpha}\sin(\beta\ln x)$$

ตัวอย่าง 7.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-4y=0$$

วิธีทำ กำหนดให้ $x\in(0,+\infty)$ และสมมติให้ $y=x^m$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-4y=0$ นั่นคือ

$$\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}$$

และ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=m(m-1)x^{m-2}$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}0=x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-4y&=x^2m(m-1)x^{m-2}-2xmx^{m-1}-4x^m\\&=x^m(m(m-1)-2m-4)\\&=x^m(m^2-3m-4)\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการช่วย คือ

$$m^2-3m-4=0$$

การแยกตัวประกอบของพหุนามฝั่งซ้ายมือ ทำให้ได้ว่า

$$(m+1)(m-4)=0$$

ดังนั้น รากของสมการช่วย คือ

$$m_1=-1 \qquad \text{และ} \qquad m_2=4$$

ซึ่งรากเป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปบน $(0,+\infty)$ คือ

$$y = c_1x^{-1} + c_2x^4$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

ตัวอย่าง 7.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์

$$4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

วิธีทำ กำหนดให้ $x \in (0, +\infty)$ และสมมติให้ $y = x^m$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} + y = 0$ นั่นคือ

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

และ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 = 4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} + y &= 4x^2m(m-1)x^{m-2} + 8xmx^{m-1} + x^m \\ &= x^m(4m(m-1) + 8m + 1) \\ &= x^m(4m^2 + 4m + 1) \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการช่วย คือ

$$4m^2 + 4m + 1 = 0$$

การแยกตัวประกอบของพหุนามฝั่งซ้ายมือ ทำให้ได้ว่า

$$(m+1)(m-4) = 0$$

ดังนั้น รากของสมการช่วย คือ

$$m_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad m_2 = -\frac{1}{2}$$

ซึ่งรากเป็นจำนวนจริงที่ซ้ำกัน เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปบน $(0,+\infty)$ คือ

$$y = c_1 x^{-\frac{1}{2}} + c_2 x^{-\frac{1}{2}} \ln x$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

ในกรณีที่เป็นสมการอันดับสูงและ m_1 เป็นรากซ้ำกันจำนวน k ราก จะได้ว่าฟังก์ชัน $x^{m_1}, x^{m_1}\ln x, x^{m_1}(\ln x)^2, \ldots, x^{m_1}(\ln x)^k$ เป็นผลเฉลยของสมการอันดับสูงนั้น ๆ ด้วย เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปจะอยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันทั้งหมดนี้ (Verify?)

ตัวอย่าง 7.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์

$$4x^2y'' + 17y = 0$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ตัวอย่าง 7.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 5x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\frac{dy}{dx} + 8y = 0$$

วิธีทำ กำหนดให้ $x \in (0,+\infty)$ และสมมติให้ $y = x^m$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 5x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\frac{dy}{dx} + 8y = 0$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
0 &= x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 5x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\frac{dy}{dx} + 8y \\
&= x^3m(m-1)(m-2)x^{m-3} + 5x^2m(m-1)x^{m-2} + 7xmx^m + 8x^m \\
&= x^m(m(m-1)(m-2) + 5m(m-1) + 7m + 8) \\
&= x^m(m^3 + 2m^2 + 4m + 8)
\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการช่วย คือ

$$m^3+2m^2+4m+8=0$$

การแยกตัวประกอบของพหุนามฝั่งซ้ายมือ ทำให้ได้ว่า รากของสมการช่วย คือ

$$m_1=-2, m_2=2i \quad \text{และ} \quad m_3=-2i$$

เพราะฉะนั้น โดยหลักการทับซ้อน จึงสรุปได้ว่า ผลเฉลยทั่วไปบน $(0,+\infty)$ คือ

$$y=c_1x^{-2}+c_2\cos(2\ln x)+c_3\sin(2\ln x)$$

โดยที่ c_1, c_2 และ c_3 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

ในกรณีที่สมการโคชี-ออยเลอร์ไม่เป็นสมการเอกพันธุ์ เราสามารถใช้การแปรผันตัวแปรในการหาผลเฉลยเฉพาะได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+3y=2x^4e^x$$

วิธีทำ กำหนดให้ $x \in (0,+\infty)$ และสมมติให้ $y=x^m$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+3y=0$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}0=x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+3y &= x^2m(m-1)x^{m-2}-3xmx^{m-1}+3x^m \\ &= x^m(m(m-1)-3m+3) \\ &= x^m(m^2-4m+3)\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการช่วย คือ

$$m^2-4m+3=0$$

ดังนั้น รากของสมการช่วย คือ

$$m_1 = 1 \qquad \text{และ} \qquad m_2 = 3$$

ซึ่งรากเป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน เพราะฉะนั้น ผลเฉลยเติมเต็มบน $(0,+\infty)$ คือ

$$y = c_1x + c_2x^3$$

โดยที่ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

พิจารณาการหาผลเฉลยเฉพาะ y_p ดังนี้

กำหนดให้

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = u_1(x)x + u_2(x)x^3$$

พิจารณา

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 2x^3$$

และเนื่องจากสมการที่กำหนดให้จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x^2}y = 2x^2e^x$$

นั่นคือ $a = 1$ และ $g(x) = 2x^2e^x$ จึงให้ได้ว่า

$$u_1' = \frac{-y_2g(x)}{aW(y_1,y_2)} = \frac{-(x^3)(2x^2e^x)}{(1)2x^3} = -x^2e^x$$

และ

$$u_2' = \frac{y_1g(x)}{aW(y_1,y_2)} = \frac{(x)((2x^2e^x)}{(1)2x^3} = e^x$$

การหาปริพันธ์ u_1' และ u_2' เทียบ x จะได้ว่า

$$u_1 = \int (-x^2 e^x) dx = -x^2 e^x + 2xe^x - 2e^x$$

และ

$$u_2 = \int e^x dx = e^x$$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะ

$$y_p = \left(-x^2 e^x + 2xe^x - 2e^x\right) x + (e^x) x^3 = 2x^2 e^x - 2xe^x$$

เพราะฉะนั้น จึงสรุปได้ว่า ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 x + c_2 x^3 + 2x^2 e^x - 2xe^x \end{aligned}$$

โดยที่ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ■

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโคชี-ออยเลอร์ต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 7.1 $x^2y'' - 2y = 0$

แบบฝึกหัด 7.2 $xy'' + y' = 0$

แบบฝึกหัด 7.3 $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$

แบบฝึกหัด 7.4 $25x^2y'' - 3xy' - 2y = 0$

แบบฝึกหัด 7.5 $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

แบบฝึกหัด 7.6 $x^2y'' - 7xy' + 41y = 0$

แบบฝึกหัด 7.7 $x^3y''' - 6y = 0$

แบบฝึกหัด 7.8 $x^3y''' + xy' - y = 0$

แบบฝึกหัด 7.9 $xy^{(4)} + 6y''' = 0$

แบบฝึกหัด 7.10 $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 9x^2y'' + 3xy' + y = 0$

แบบฝึกหัด 7.11 $xy'' - 4y' = x^4$

แบบฝึกหัด 7.12 $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - xx$

แบบฝึกหัด 7.13 $x^2y'' - xy' + y = 2x$

แบบฝึกหัด 7.14 $x^2y'' + xy' - y = \ln x$

แบบฝึกหัด 7.15 $x^2y'' + xy' - y = \frac{1}{x+1}$

7.2 อนุกรมกำลังและฟังก์ชันวิเคราะห์

ในหัวข้อนี้เป็นการทบทวนความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับอนุกรมกำลังดังนี้

บทนิยาม 7.2 (อนุกรมกำลัง)
ให้ a เป็นจำนวนจริงและ $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง เราจะเรียกอนุกรม

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-1)^3 + \cdots$$

ว่า **อนุกรมกำลังใน** $x-a$ (power series in $x-a$) หรือ **อนุกรมกำลังจุดศูนย์กลางที่** a (power series centered at a)

ตัวอย่างเช่น อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}(x+1)^n$ เป็นอนุกรมกำลังใน $x+1$ หรืออนุกรมกำลังจุดศูนย์กลางที่ -1 และในกรณีที่จุดศูนย์กลางของอนุกรมคือ $a=0$ เราจะเรียกอนุกรมดังกล่าวนี้ว่า *อนุกรมกำลังใน* x ทั้งนี้ดัชนีไม่จำเป็นต้องเริ่มต้นที่ $n=0$ ก็ได้

บทนิยาม 7.3 (การลู่เข้า)
ให้ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลังใน $x-a$

- เราจะกล่าวว่าอนุกรมกำลัง**ลู่เข้า** (converge) ที่ x ถ้าลำดับของผลบวกย่อย (partial sum) $\{S_N(x)\}_{N=0}^{\infty}$ ลู่เข้า นั่นคือ $\lim_{N\to+\infty} S_N(x) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} c_n(x-a)^n$ หาค่าได้ และถ้าลิมิตข้างต้นนี้หาค่าไม่ได้ที่ x เราจะกล่าวว่าอนุกรมกำลังลู่ออก (diverge) ที่ x
- เราจะเรียกเซตของทุกจำนวนจริง x ที่อนุกรมลู่เข้า ว่า **ช่วงการลู่เข้า** (interval of convergence) และเรียกจุดศูนย์กลาง a ของอนุกรมที่ลู่เข้าว่า **จุดศูนย์กลางการลู่เข้า** (center of convergence)
- เราจะเรียกรัศมี R ของช่วงการลู่เข้าว่า **รัศมีการลู่เข้า** (radius of convergence) และเราจะเรียกจุด $a+R$ และ $a-R$ ว่า **จุดปลาย** (end point) ของช่วงการลู่เข้า

ถ้าอนุกรมกำลังลู่เข้าที่จุดศูนย์กลาง a เท่านั้น แล้ว $R = 0$ ในอีกด้านหนึ่ง ถ้าอนุกรมกำลังลู่เข้าในทุกจำนวนจริง x แล้ว $R = +\infty$

ทฤษฎีบท 7.1 (การทดสอบด้วยรัศมีการลู่เข้า)
ให้ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลังใน $x-a$ และมีรัศมีการลู่เข้า $R > 0$

i) สำหรับทุกจำนวนจริง x ที่ $|x-a| < R$ จะได้ว่า อนุกรมกำลังลู่เข้า
ii) สำหรับทุกจำนวนจริง x ที่ $|x-a| > R$ จะได้ว่า อนุกรมกำลังลู่ออก

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เกี่ยวข้องกับการตรวจสอบการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ทฤษฎีบท 7.2 (การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์)
ให้ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลัง ถ้า x ที่อยู่ในช่วงการลู่เข้าและไม่เป็นจุดปลายของช่วงการลู่เข้า แล้ว อนุกรมกำลังลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ (absolutely converge) นั่นคือ อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(x-a)^n|$ ลู่เข้า

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เกี่ยวข้องกับการตรวจสอบการลู่เข้าด้วยอัตราส่วน

ทฤษฎีบท 7.3 (การทดสอบด้วยอัตราส่วน (Ratio test))
ให้ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลังที่ $c_n \neq 0$ สำหรับทุก $n = 0, 1, 2, \ldots$ พิจารณา

$$|x-a| \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = L \in [0, +\infty]$$

i) $L < 1$ แล้วอนุกรมกำลังลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
ii) $L > 1$ แล้วอนุกรมกำลังลู่ออก
iii) $L = 1$ แล้วสรุปไม่ได้เกี่ยวกับอนุกรมนี้

ทั้งนี้ การทดสอบการลู่เข้าด้วยอัตราส่วนมักจะสรุปไม่ได้ ณ จุดปลาย $a \pm R$ ของช่วงการลู่เข้า

ตัวอย่าง 7.6 จงหาช่วงการลู่เข้าและรัศมีการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^{n+1}(n+1)}$

วิธีทำ เนื่องจาก $c_n = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \neq 0$ สำหรับทุก $n = 0, 1, 2, \ldots$ พิจารณา

$$|x-3|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = |x-3|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n+1}{2(n+2)}\right| = \frac{1}{2}|x-3|$$

ส่งผลให้ อนุกรมกำลังนี้ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์สำหรับทุก $\frac{1}{2}|x-3|<1$ นั่นคือ $|x-3|<2$ หรือ

$$1<x<5$$

ในอีกด้านหนึ่ง อนุกรมนี้ลู่ออกสำหรับทุก $\frac{1}{2}|x-3|>1$ นั่นคือ $|x-3|>2$ ซึ่งเขียนใหม่ได้เป็น $x>5$ หรือ $x<1$

พิจารณาจุดปลาย $x=1$ จะพบว่า

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2^{n+1}(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^{n+1}(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2(n+1)}$$

ซึ่งลู่เข้า และพิจารณาจุดปลาย $x=5$ จะพบว่า

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2^{n+1}(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2)^n}{2^{n+1}(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)}$$

ซึ่งลู่ออก

เพราะฉะนั้น ช่วงการลู่เข้าของอนุกรมนี้คือ $[1,5)$ และรัศมีการลู่เข้าคือ $R=2$ ■

ทฤษฎีบทต่อไปนี้มีความสำคัญมากในการหาผลเฉลยอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์

ทฤษฎีบท 7.4 *ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ มีรัศมีการลู่เข้า $R>0$ ในทุกจำนวนจริง x ที่อยู่บนบางช่วงเปิด แล้ว $c_n=0$ สำหรับทุก $n=0,1,2,\dots$*

ในกรณีที่อนุกรมกำลังลู่เข้า เราจะได้ผลรวมของอนุกรมดังกล่าวซึ่งขึ้นอยู่กับแต่ละค่า x ดังนั้น เมื่ออนุกรมกำลังลู่เข้า เราจึงสามารถเขียนผลรวมในรูปของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้ นั่นคือ

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

โดยโดเมนของฟังก์ชัน f นี้เป็นของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง

ทฤษฎีบท 7.5 *ให้ f เป็นฟังก์ชันที่เขียนในรูปอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ที่มีรัศมีการลู่เข้า $R > 0$ หรือ $R = +\infty$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง หาอนุพันธ์ได้ และหาปริพันธ์ได้บนช่วง $(a-R, a+R)$ หรือ $(-\infty, +\infty)$ ตามลำดับ*

ทั้งนี้การหาอนุพันธ์หรือปริพันธ์ของอนุกรมกำลังสามารถดำเนินการพจน์ต่อพจน์ได้เช่นเดียวกับการดำเนินการในพหุนาม ตัวอย่างเช่น พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots$$

ซึ่งเป็นอนุกรมกำลังใน x จะได้ว่า

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$

และ

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}$$

โดยเราจะเรียกฟังก์ชันที่มีลักษณะตามข้างต้นดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 7.4 (ฟังก์ชันวิเคราะห์)
เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f เป็น **ฟังก์ชันวิเคราะห์**ที่จุด a (analytic function at a) ถ้าฟังก์ชัน f สามารถเขียนในรูปอนุกรมกำลังใน $x-a$ ที่มีรัศมีการลู่เข้า $R > 0$ หรือ $R = +\infty$

ตัวอย่างของฟังก์ชันวิเคราะห์ที่พบในวิชาแคลคูลัส (ยังจำได้ไหม) ซึ่งเขียนอยู่ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) สำหรับฟังก์ชัน f ใน x

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$$

ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 7.1: ตัวอย่างของฟังก์ชันวิเคราะห์ที่พบในวิชาแคลคูลัส

ฟังก์ชันวิเคราะห์	ช่วงการลู่เข้า
$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$	$(-\infty,+\infty)$
$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$	$(-\infty,+\infty)$
$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$	$(-\infty,+\infty)$
$\cosh x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$	$(-\infty,+\infty)$
$\sinh x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$	$(-\infty,+\infty)$
$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$	$(-1,1]$
$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}x^n$	$(-1,1)$

นอกจากนี้ เรายังสามารถนำสองอนุกรมกำลังใด ๆ มาดำเนินการทางพีชคณิตได้เช่นเดียวกับการดำเนินการทางพีชคณิตของพหุนาม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.7 จงเขียนฟังก์ชัน $e^x\sin x$ ในรูปอนุกรมกำลังใน x

วิธีทำ เนื่องจาก

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

และ

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

โดยที่ผลตัดของโดเมนของทั้งสองฟังก์นี้คือ $(-\infty,+\infty)$ จึงได้ว่าโดเมนของฟังก์ชัน $e^x\sin x$ คือ $(-\infty,+\infty)$ ด้วย พิจารณา

$$\begin{aligned}
e^x \sin x &= \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right) \\
&= (1)x+(1)x^2+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)x^3+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)x^4 \\
&\quad+\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\right)x^5+\cdots \\
&= x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}+\cdots
\end{aligned}$$

■

ในการหาผลเฉลยอนุกรมกำลังที่จะศึกษาในลำดับถัดไปนั้นมักมีความเกี่ยวข้องกับการบวกอนุกรมตั้งแต่สองอนุกรมขึ้นไป และจำเป็นต้องเขียนรวมให้อยู่ในรูปของอนุกรมเดียว โดยใช้หลักการเลื่อนดัชนีดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.8 จงเขียนผลบวกอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

ให้อยู่ในรูปของอนุกรมเดียว

วิธีทำ ในการเขียนผลบวกของอนุกรมกำลังให้อยู่ในรูปอนุกรมเดียวนั้นมีหลักการ คือ จะต้องทำให้ดัชนีเริ่มต้นและเลขชี้กำลังของ x ในแต่ละอนุกรมตรงกันดังนี้

พิจารณาอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} \tag{7.4}$$

จะพบว่าดัชนีเริ่มต้นที่ $n=2$ และเลขชี้กำลังของ x เริ่มต้นที่ 0

ในขณะที่อนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \tag{7.5}$$

จะพบว่าดัชนีเริ่มต้นที่ $n=0$ และเลขชี้กำลังของ x เริ่มต้นที่ 1

ดังนั้นในลำดับแรกนี้ เราจะต้องทำให้เลขชี้กำลังของ x ในทั้งสองอนุกรมนี้เท่ากันก่อน โดยจะทำให้เริ่มต้นที่ 1 โดยการแยกสองพจน์แรกของอนุกรม (7.4) นั่นคือ

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} &= 2(2-1)c_2 x^{2-2} + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} \\ &= 2c_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} \qquad (7.6)\end{aligned}$$

ต่อไป เราจะต้องทำให้ดัชนีเริ่มต้นของอนุกรม (7.5) และ (7.6) เป็นตัวเดียวกัน โดยจะสร้างดัชนีใหม่เป็น k โดยที่ กำหนดให้ $k=n+1$ ในอนุกรม (7.5) และ $k=n-2$ ในอนุกรม (7.6) ตามลำดับ ซึ่งจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} &= \sum_{(k-1)=0}^{\infty} c_{k-1} x^{(k-1)+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} &= 2c_2 + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} \\ &= 2c_2 + \sum_{(k+2)=3}^{\infty} (k+2)((k+2)-1)c_{k+2} x^{(k+2)-2} \\ &= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} x^k\end{aligned}$$

เนื่องจากทั้งสองอนุกรมที่ได้นี้มีดัชนีเริ่มต้นและเลขชี้กำลังเริ่มต้นของ x เท่ากันแล้ว ดังนั้น

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k$$
$$= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}[(k+2)(k+1)c_{k+2} + c_{k-1}]x^k$$

■

ตัวอย่าง 7.9 จงเขียนผลบวกอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 6c_n x^{n+1}$$

ให้อยู่ในรูปของอนุกรมเดียว

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นการแสดงวิธีการหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ใน x ของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับหนึ่ง ซึ่งเป็นแนวทางในการหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับสองในหัวข้อถัดไป

ตัวอย่าง 7.10 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลัง $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ใน x ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y' + y = 0$$

บน $(-\infty, +\infty)$

วิธีทำ ในตัวอย่างนี้ เราจะแสดงการหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลัง $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ใน x ของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ตามลำดับขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 สมมติให้ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ที่กำหนดให้และหาอนุพันธ์ของ y ที่เกี่ยวข้องกับสมการที่กำหนดให้

สมมติให้ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ $y' + y = 0$ บน $(-\infty, +\infty)$ จึงได้ว่า

$$y' = c_1 + c_2 2x + c_3 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$

ขั้นที่ 2 แทนค่า y และ y' ในสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้

เนื่องจาก $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ และ $y' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ เมื่อแทนในสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ $y' + y = 0$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
0 &= y' + y \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n
\end{aligned}
$$

ขั้นที่ 3 ทำการเลื่อนดัชนีให้ดัชนีเริ่มต้นและเลขชี้กำลังเริ่มต้นของ x ของทุกอนุกรมเป็นตัวเดียวกัน จากนั้นรวมอนุกรมเข้าด้วยกัน

เนื่องจากทั้งสองอนุกรมนี้มีเลขชี้กำลังเริ่มต้นของ x เท่ากัน คือ 0 ดังนั้น เราจะพิจารณาการเลื่อนดัชนีเริ่มต้นของทั้งสองอนุกรมให้เป็นตัวเดียวกันโดยการแทนค่า $k = n - 1$ ในอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ และการแทนค่า $k = n$ ในอนุกรม ซึ่งจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{(k+1)=1}^{\infty} c_{(k+1)}(k+1)x^{(k+1)-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(k+1)x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} [c_{k+1}(k+1) + c_k] x^k
\end{aligned}
$$

ขั้นที่ 4 ทำการเทียบสัมประสิทธิ์ของอนุกรมโดยใช้ทฤษฎีบท 7.2 เพื่อหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของค่าคงตัว c_n สำหรับทุก $n = 0, 1, 2, \ldots$

เนื่องจากเราต้องการหาผลเฉลย y ที่ซึ่ง $y' + y = 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x นั่นคือ เราจะต้องทำให้ได้ว่า

$$
\sum_{k=0}^{\infty} [c_{k+1}(k+1) + c_k] x^k = 0
$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 7.2 จึงได้ว่า

$$c_{k+1}(k+1)+c_k=0 \qquad \text{สำหรับทุก } n=0,1,2,\ldots$$

ซึ่งทำให้ได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ

$$c_{k+1}=\frac{-c_k}{k+1}, \qquad \text{สำหรับทุก } n=0,1,2,\ldots$$

ขั้นที่ 5 กำหนดให้ c_0 เป็นค่าคงตัวใด ๆ และใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดที่ได้หาค่าคงตัว c_n สำหรับทุก $n=1,2,\ldots$

กำหนดให้ c_0 เป็นค่าคงตัวใด ๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
c_1 &= c_{0+1}=\frac{-c_0}{0+1}=-\frac{c_0}{1!}\\
c_2 &= c_{1+1}=\frac{-c_1}{1+1}=\frac{-c_1}{2}=\frac{-\left(\frac{-c_0}{1!}\right)}{2}=\frac{c_0}{2!}\\
c_3 &= c_{2+1}=\frac{-c_2}{2+1}=\frac{-c_2}{3}=\frac{-\left(\frac{c_0}{2!}\right)}{3}=-\frac{c_0}{3!}\\
c_4 &= c_{3+1}=\frac{-c_3}{3+1}=\frac{-c_3}{4}=\frac{-\left(\frac{-c_0}{3!}\right)}{4}=\frac{c_0}{4!}\\
c_5 &= c_{4+1}=\frac{-c_4}{4+1}=\frac{-c_4}{5}=\frac{-\left(\frac{c_0}{4!}\right)}{5}=-\frac{c_0}{5!}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

ขั้นที่ 6 เขียนผลเฉลย $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ ที่ได้โดยใช้ค่าคงตัว c_n สำหรับทุก $n=0,1,2,\ldots$ จากขั้นที่ 5

พิจารณาผลเฉลย

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \cdots \\
&= c_0 - \frac{c_0}{1!}x + \frac{c_0}{2!}x^2 - \frac{c_0}{3!}x^3 + \frac{c_0}{4!}x^4 - \frac{c_0}{5!}x^5 + \cdots \\
&= c_0 \left[1 - \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \right] \\
&= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n
\end{aligned}$$

■

ทั้งนี้ การหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังไม่จำเป็นต้องเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปดังเช่นตัวอย่างข้างต้นก็ได้ เราอาจจะเขียนในรูปกระจายอนุกรมโดยอนุโลมได้

ตัวอย่าง 7.11 จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลัง $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ใน x ของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y' = xy$$

บน $(-\infty, +\infty)$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

แบบฝึกหัด

จงหาช่วงการลู่เข้าและรัศมีการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 7.16 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$

แบบฝึกหัด 7.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$

แบบฝึกหัด 7.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$

แบบฝึกหัด 7.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10^n}(x-5)^n$

แบบฝึกหัด 7.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}(3x-1)^n$

จงเขียนผลบวกอนุกรมกำลังต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของอนุกรมเดียว

แบบฝึกหัด 7.21 $\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$

แบบฝึกหัด 7.22 $\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}+3\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+2}$

แบบฝึกหัด 7.23 $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+2}$

แบบฝึกหัด 7.24 $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}-2\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$

แบบฝึกหัด 7.25 $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^n+2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+3\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n$

แบบฝึกหัด 7.26 จงแสดงว่าอนุกรมกำลัง $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$ เป็นผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'+2xy=0$$

แบบฝึกหัด 7.27 จงแสดงว่าอนุกรมกำลัง $y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ เป็นผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(x+1)y''+y=0$$

จงหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลัง $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ใน x ของสมการเชิงอนุพันธ์

แบบฝึกหัด 7.28 $y' - 5y = 0$

แบบฝึกหัด 7.29 $4y' + y = 0$

แบบฝึกหัด 7.30 $(1+x)y' + y = 0$

7.3 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปอนุกรมกำลัง

ในตัวอย่าง 7.10 เราได้ศึกษาขั้นตอนการหาผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันกับหนึ่งมาแล้ว ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับสองที่อยู่ในรูปอนุกรมกำลังที่มีจุดศูนย์กลางเป็นจุดสามัญใด ๆโดยในลำดับแรกนี้ เราจำเป็นต้องรู้จักจุดสามัญดังบทนิยามต่อไปนี้

พิจารณาสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับสอง

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{7.7}$$

ซึ่งจัดให้อยู่ในรูปมาตรฐานได้เป็น

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{7.8}$$

โดยที่

$$P(x) := \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \quad \text{และ } Q(x) := \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$$

บทนิยาม 7.5 (จุดสามัญและจุดเอกฐาน)

- เราจะเรียกจุด $x = x_0$ ว่า **จุดสามัญ** (ordinary point) ของสมการเชิงอนุพันธ์ (7.7) ถ้าฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ $P(x)$ และ $Q(x)$ ในสมการเชิงอนุพันธ์ (7.8) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด x_0
- เราจะเรียกจุดที่ไม่เป็นจุดสามัญว่า **จุดเอกฐาน** (singular point) ของสมการเชิงอนุพันธ์ (7.7)

สังเกตว่าสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวจะไม่มีจุดเอกฐาน (Verify?) นอกจากนี้ ถ้าฟังก์ชัน $P(x)$ และ $Q(x)$ ในสมการเชิงอนุพันธ์ (7.8) อย่างน้อยหนึ่งฟังก์ชันไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด x_0 แล้วจะได้ว่า จุด x_0 ดังกล่าวเป็นจุดเอกฐานของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น ๆ (Why?)

ตัวอย่าง 7.12 จงตรวจสอบว่า $x = 0$ เป็นจุดสามัญหรือจุดเอกฐานของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์

$$y'' + (\sin x)y' + e^x y = 0$$

วิธีทำ สังเกตว่าสมการที่กำหนดให้อยู่ในรูปมาตรฐานที่ฟังก์ชัน $P(x) = \sin x$ และฟังก์ชัน $Q(x) = e^x$ และเราทราบว่าฟังก์ชัน $P(x) = \sin x$ และฟังก์ชัน $Q(x) = e^x$ นี้เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $x = 0$ เพราะฉะนั้นจึงสรุปได้ว่า $x = 0$ เป็นจุดสามัญของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ ■

ตัวอย่าง 7.13 จงตรวจสอบว่า $x = 0$ เป็นจุดสามัญหรือจุดเอกฐานของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์

$$y'' + xy' + (\ln x)y = 0$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน

■

ตัวอย่าง 7.14 จงตรวจสอบว่า $x = 0$ เป็นจุดสามัญหรือจุดเอกฐานของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

เนื่องจากฟังก์ชันพหุนามเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์สำหรับทุกจำนวนจริง x (Verify?) และฟังก์ชันเศษส่วนเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุกจำนวนจริง x ที่ไม่ทำให้ส่วนเป็นศูนย์ (Verify?) ดังนั้น ในกรณีที่สัมประสิทธิ์ $a_2(x), a_1(x)$ และ $a_0(x)$ ในสมการเชิงอนุพันธ์ (7.7) เป็นพหุนามที่ไม่มีตัวประกอบซ้ำ ซึ่งได้ว่าฟังก์ชันสัมประสิทธิ์

$$P(x) := \frac{a_1(x)}{a_2(x)} \quad \text{และ } Q(x) := \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$$

ในสมการเชิงอนุพันธ์ (7.8) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ที่ทุกจำนวนจริง x ที่ไม่ทำให้ $a_2(x) = 0$ โดยสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 7.6 *พิจารณาสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับสอง*

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

โดยฟังก์ชัน $a_2(x), a_1(x)$ และ $a_0(x)$ เป็นพหุนามที่ไม่มีตัวประกอบซ้ำ จะได้ว่า

i) ถ้า $a_2(x_0) \neq 0$ แล้ว x_0 เป็นจุดสามัญของสมการเชิงอนุพันธ์นี้

ii) ถ้า $a_2(x_0) = 0$ แล้ว x_0 เป็นจุดเอกฐานของสมการเชิงอนุพันธ์นี้

ตัวอย่าง 7.15 จงหาจุดสามัญและจุดเอกฐานของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' + 6y = 0$$

วิธีทำ พิจารณาพหุนาม $x^2 - 1 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 1, -1$ จึงได้ว่า จุดเอกฐานของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ คือ 1 และ -1 ซึ่งส่งผลให้ได้ด้วยว่าเซตของจุดสามัญของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ $(-\infty, +\infty) \setminus \{1, -1\}$ ■

ในบางครั้ง จุกเอกฐานอาจเป็นจำนวนเชิงซ้อนดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.16 จงหาจุดเอกฐานของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์

$$(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$$

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เกี่ยวข้องกับการมีอยู่จริงของผลเฉลยอนุกรมกำลังของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับสอง

ทฤษฎีบท 7.7 (การมีอยู่จริงของผลเฉลยอนุกรมกำลัง)

ถ้า $x = x_0$ เป็นจุดสามัญของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับสอง แล้ว มีผลเฉลยอนุกรมกำลัง $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ x_0 จำนวนสองผลเฉลยและเป็นอิสระเชิงเส้นกันเสมอ

นอกจากนี้ ผลเฉลยอนุกรมกำลังดังกล่าวลู่เข้าบนช่วง $(x_0 - R, x_0 + R)$ โดยที่ R เป็นระยะห่างจากจุด x_0 ไปยังจุดเอกฐานที่ใกล้ที่สุด

เราจะเรียกผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลัง $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ ว่า **ผลเฉลยรอบจุดสามัญ** x_0 (solution about the ordinary point x_0) และเราเรียกระยะห่าง R ในทฤษฎีบทข้างต้นนี้ว่า **รัศมีลู่เข้าน้อยสุด** (minimum radius) รอบจุดสามัญ x_0

ตัวอย่าง 7.17 จงหารัศมีลู่เข้าน้อยสุดและช่วงการลู่เข้าของผลเฉลยอนุกรมกำลังของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์

$$(x^2 - 2x + 5)y'' + xy' - y = 0$$

i) รอบจุดสามัญ $x = 0$
ii) รอบจุดสามัญ $x = -1$

วิธีทำ พิจารณาจุดเอกฐานของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ดังนี้ เนื่องจาก $x^2 - 2x + 5 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 1 + 2i$ และ $x = 1 - 2i$

i) พิจารณารัศมีการลู่เข้าน้อยสุดรอบจุดสามัญ $x = 0$ จะพบว่า

$$R = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

ดังนั้น ช่วงการลู่เข้า คือ

$$(0 - R, 0 + R) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$$

ii) ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ตัวอย่าง 7.18 จงหาผลเฉลยอนุกรมกำลังของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับสอง

$$y'' + xy = 0$$

บนช่วงที่ผลเฉลยที่ได้ลู่เข้า

วิธีทำ เนื่องจาก $a_2(x) = 1$ จึงได้ว่าทุกจำนวนจริงเป็นจุดสามัญของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ ในที่นี้ เราจะพิจารณาที่ $x = 0$ โดยทฤษฎีบท 7.7 จึงสามารถยืนยันได้ว่ามีผลเฉลยอนุกรมกำลัง $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ รอบจุดสามัญ $x = 0$ จำนวนสองผลเฉลยที่อิสระเชิงเส้นกันและลู่เข้าสำหรับทุกจำนวนจริง x

กำหนดให้ $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ เป็นผลเฉลยอนุกรมกำลังรอบจุดสามัญ $x = 0$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ นั่นคือ

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$

และ

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}$$

การแทนค่า y และ y'' ในสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
0 &= y'' + xy \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}
\end{aligned}$$

และเพื่อที่จะทำการเทียบสัมประสิทธิ์ของอนุกรม เราต้องทำการเลื่อนดัชนีและรวมอนุกรมให้อยู่ในรูปอนุกรมเดียวดังนี้

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \\
&= c_2 2(2-1)x^{2-2} + \sum_{n=3}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \\
&= 2c_2 + \sum_{n=3}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} \\
&= 2c_2 + \sum_{(k+2)=3}^{\infty} c_{(k+2)}(k+2)((k+2)-1)x^{(k+2)-2} + \sum_{(k-1)=0}^{\infty} c_{k-1}x^{(k-1)+1} \\
&= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k \\
&= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_{k+2}(k+2)(k+1) + c_{k-1}]x^k
\end{aligned}$$

เนื่องจากเราต้องการหาผลเฉลย y ที่ซึ่ง $y'' + xy = 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x นั่นคือ เราจะต้องทำให้ได้ว่า

$$2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_{k+2}(k+2)(k+1) + c_{k-1}]x^k = 0$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 7.2 จึงได้ว่า

$$2c_2 = 0$$

และ

$$c_{k+2}(k+2)(k+1) + c_{k-1} = 0 \qquad \text{สำหรับทุก } n = 1, 2, \dots$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$c_2 = 0$$

และความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ

$$c_{k+1} = \frac{-c_{k-1}}{(k+2)(k+1)}, \qquad \text{สำหรับทุก } n = 1, 2, \dots$$

กำหนดให้ c_0 และ c_1 เป็นค่าคงตัวใด ๆ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
c_2 &= 0 \\
c_3 &= c_{1+2} = \frac{-c_{1-1}}{(1+2)(1+1)} = \frac{-c_0}{3\cdot 2} \\
c_4 &= c_{2+2} = \frac{-c_{2-1}}{(2+2)(2+1)} = \frac{-c_1}{4\cdot 3} \\
c_5 &= c_{3+2} = \frac{-c_{3-1}}{(3+2)(3+1)} = \frac{-c_2}{5\cdot 4} = 0 \\
c_6 &= c_{4+2} = \frac{-c_{4-1}}{(4+2)(4+1)} = \frac{-c_3}{6\cdot 5} = \frac{-\left(\frac{-c_0}{3\cdot 2}\right)}{6\cdot 5} = \frac{c_0}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2} \\
c_7 &= c_{5+2} = \frac{-c_{5-1}}{(5+2)(5+1)} = \frac{-c_4}{7\cdot 6} = \frac{-\left(\frac{-c_1}{4\cdot 3}\right)}{7\cdot 6} = \frac{c_1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3} \\
c_8 &= c_{6+2} = \frac{-c_{6-1}}{(6+2)(6+1)} = \frac{-c_5}{8\cdot 7} = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้บน $(-\infty,+\infty)$ คือ

$$
\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + c_7 x^7 + c_8 x^8 + \cdots \\
&= c_0 + c_1 x + 0 - \frac{c_0}{3\cdot 2}x^3 - \frac{c_1}{4\cdot 3}x^4 + 0 + \frac{c_0}{6\cdot 5\cdot 3\cdot}x^6 + \frac{c_1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^7 + 0 + \cdots \\
&= c_0\left(1 - \frac{1}{3\cdot 2}x^3 + \frac{1}{6\cdot 5\cdot 3\cdot}x^6 - \cdots\right) + c_1\left(x - \frac{}{4\cdot 3}x^4 + \frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^7 - \cdots\right) \\
&= c_0 y_1 + c_1 y_2
\end{aligned}
$$

โดยที่

$$
y_1 := 1 - \frac{1}{3\cdot 2}x^3 + \frac{1}{6\cdot 5\cdot 3\cdot}x^6 - \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n)(3n-1)\cdots 3\cdot 2}x^{3n}
$$

และ

$$y_2 := x - \frac{}{4\cdot 3}x^4 + \frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^7 - \cdots = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)(3n)\cdots 4\cdot 3}x^{3n+1}$$

■

ตัวอย่าง 7.19 จงหาผลเฉลยอนุกรมกำลังของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับสอง

$$y'' - (1+x)y = 0$$

บนช่วงที่ผลเฉลยที่ได้ลู่เข้า

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ตัวอย่าง 7.20 จงหาผลเฉลยอนุกรมกำลังของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับสอง

$$y'' - xy' + (x+2)y = 0$$

บนช่วงที่ผลเฉลยที่ได้ลู่เข้า

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

ทั้งนี้ เราสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ที่สัมประสิทธิ์เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใด ๆ ได้โดยการประยุกต์ใช้การคูณอนุกรมกำลังดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.21 จงหาผลเฉลยอนุกรมกำลังของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับสอง

$$y'' + (\cos x)y = 0$$

บนช่วงที่ผลเฉลยที่ได้ลู่เข้า

วิธีทำ ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน ■

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยอนุกรมกำลังรอบจุดสามัญ $x=0$ บนช่วงที่ลู่เข้าของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับสองต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 7.31 $y''-xy=0$

แบบฝึกหัด 7.32 $y''+x^2y=0$

แบบฝึกหัด 7.33 $y''-2xy'+y=0$

แบบฝึกหัด 7.34 $y''-xy'+2y=0$

แบบฝึกหัด 7.35 $y''+x^2y'-xy=0$

แบบฝึกหัด 7.36 $y''+2xy'+2y=0$

แบบฝึกหัด 7.37 $(x-1)y''+y'=0$

แบบฝึกหัด 7.38 $(x+2)y''+xy'-y=0$

แบบฝึกหัด 7.39 $y''-(x+1)y'-y=0$

แบบฝึกหัด 7.40 $(x^2+1)y''-6y=0$

แบบฝึกหัด 7.41 $(x^2+2)y''+3xy'-y=0$

แบบฝึกหัด 7.42 $(x^2-1)y''-xy'-y=0$

จงใช้วิธีการหาผลเฉลยอนุกรมกำลังรอบจุดสามัญ $x=0$ บนช่วงที่ลู่เข้าของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับสองหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 7.43 $(x-1)y''-xy'+y=0, \quad y(0)=-2, y'(0)=6$

แบบฝึกหัด 7.44 $(x+1)y''-(2-x)y'+y=0, \quad y(0)=2, y'(0)=-1$

แบบฝึกหัด 7.45 $y''-2xy'+8y=0, \quad y(0)=3, y'(0)=0$

แบบฝึกหัด 7.46 $(x^2+1)y''+2xy'=0, \quad y(0)=0, y'(0)=1$

จงหาผลเฉลยอนุกรมกำลังรอบจุดสามัญ $x = 0$ บนช่วงที่ลู่เข้าของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับสองต่อไปนี้

แบบฝึกหัด 7.47 $y'' + (\sin x)y = 0$

แบบฝึกหัด 7.48 $y'' + e^{-x}y = 0$

แบบฝึกหัด 7.49 $y'' + e^{x}y' - y = 0$

แบบฝึกหัด 7.50 $xy'' + (\sin x)y = 0$

บรรณานุกรม

1. Blanchard, P., Devaney, R. L., & Hall, G. R. (2012). *Differential equations* (4th ed.). Boston, MA: Brooks/Cole.
2. Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2012). *Elementary differential equations* (10th ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
3. Braun, M. (1993). *Differential equations and their applications: An introduction to applied mathematics* (4th ed.). New York: Springer-Verlag.
4. Bronson, R., & Costa, G. (2014). *Schaum's outline of differential equations* (4th ed.). New York: McGraw-Hill Education
5. Constanda, C. (2013). *Differential equations: A primer for scientists and engineers*. New York: Springer-Verlag.
6. Greenberg, M. D. (2014). *Ordinary differential equations*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
7. Howell, K. B. (2016). *Ordinary differential equations: An introduction to the fundamental*. Danvers, MA: CRC Press, Taylor & Francis Group.
8. Logan, J. D. (2015). *A first course in differential equations*. Switzerland: Springer International Publishing.

9. Nagle, R. K., Saff, E. B., & Snider, A. D. (2012). *Fundamentals of differential equations and boundary value problems* (6th ed.). Boston, MA: Pearson Education.

10. Tenenbaum, M., Pollard, H. (1963). *Ordinary Differential Equations*. New York: Dover Publications.

11. Zill, D. G. (2009). *A first course in differential equations with modeling applications* (9th ed.). Canada: Brooks/Cole.

12. ปราโมทย์ มากชู. (2529). *สมการเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์*. พิษณุโลก: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พิษณุโลก.

13. สมเกียรติ ตั้งพูลผล. (2541). *สมการเชิงอนุพันธ์* (พิมพ์ครั้งที่ 3). ขอนแก่น: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ดัชนี