บทที่ 1 เทคนิคของการหาปริพันธ์

1.1 การหาปริพันธ์โดยการจัดรูปของปริพัทธ์เข้าสูตรพื้นฐานของการหาปริพันธ์

1.2 การหาปริพันธ์โดยใช้เทคนิคของการหาปริพันธ์

- 1.2.1 วิธีการแทนค่าหรือเปลี่ยนตัวแปร
  - 1.2.1.1 รูปแบบไม่แน่นอน
  - 1.2.1.2 รูปแบบแน่นอน
    - 1.2.1.2.1 ตรีโกณมิติ
    - 1.2.1.2.2 แทนค่าตรีโกณมิติ
- 1.2.2 วิธีแยกเศษส่วนย่อย
  - 1.2.2.1 ฟังก์ชันตรรกยะของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
  - ~~1.2.2.2 ฟังก์ชันอตรรกยะรูปแบบแน่นอน~~
- 1.2.3 การหาปริพันธ์ทีละส่วน (Integration by part)

1.3 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (Improper Integral)

สูตรการหาอนุพันธ์

กำหนดให้ u และ v เป็นฟังก์ชันซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้ และ c เป็นค่าคงตัว

$\frac{dc}{dx}=0$	$\frac{dx}{dx}=1$
$\frac{d(u\pm v)}{dx}=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}$	$\frac{d(u\cdot v)}{dx}=u\cdot\frac{du}{dx}+v\cdot\frac{dv}{dx}$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot\frac{du}{dx}-u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}$, $v\neq 0$	$\frac{du^n}{dx}=nu^{n-1}\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(\ln u)}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(\log_a u)}{du}=\frac{1}{u}\cdot\log_a u\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(a^u)}{dx}=a^u\ln a\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(e^u)}{dx}=e^u\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(\sin u)}{dx}=\cos u\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(\cos u)}{dx}=-\sin u\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(\tan u)}{dx}=\sec^2 u\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(\cot u)}{dx}=-\mathrm{cosec}^2 u\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(\sec u)}{dx}=\sec u\tan u\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(\mathrm{cosec}\,u)}{dx}=-\mathrm{cosec}\,u\cot u\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(\arcsin u)}{du}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(\arccos u)}{du}=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(\arctan u)}{du}=\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(\mathrm{arccot}\,u)}{du}=-\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(\mathrm{arcsec}\,u)}{du}=\frac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(\mathrm{arccosec}\,u)}{du}=-\frac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(\sinh u)}{dx}=\cosh u\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(\cosh u)}{dx}=\sinh u\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(\tanh u)}{dx}=\mathrm{sech}^2 u\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(\coth u)}{dx}=-\mathrm{cosech}^2 u\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(\mathrm{sech}\,u)}{dx}=-\sec u\tanh u\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(\mathrm{cosech}\,u)}{dx}=-\mathrm{cosech}\,u\cot u\cdot\frac{du}{dx}$

สูตรพื้นฐานของการหาปริพันธ์

กำหนดให้ c เป็นค่าคงตัวของการหาปริพันธ์

F1. $\int 0\,dx = c$

F2. $\int 1\,dx = x + c \Rightarrow \int k\,dx = kx + c$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

F3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$

F4. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

F5. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c\ , a > 0, a \neq 1$

F6. $\int e^u du = e^u + c$

F7. $\int \sin u\,du = -\cos u + c \qquad \Rightarrow \int \sin(ax)dx = \dfrac{-\cos(ax)}{a} + c, a \neq 0$

F8. $\int \cos u\,du = \sin u + c \qquad \Rightarrow \int \cos(ax)dx = \dfrac{\sin(ax)}{a} + c, a \neq 0$

F9. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + c \qquad \Rightarrow \int \sec^2(ax)dx = \dfrac{\tan(ax)}{a} + c, a \neq 0$

F10. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + c \qquad \Rightarrow \int \csc^2(ax)dx = \dfrac{-\cot(ax)}{a} + c, a \neq 0$

F11. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + c \qquad \Rightarrow \int \sec(ax)\tan(ax)dx = \dfrac{\sec(ax)}{a} + c, a \neq 0$

F12. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + c \qquad \Rightarrow \int \csc(ax)\cot(ax)dx = \dfrac{-\csc(ax)}{a} + c, a \neq 0$

F13. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + c = \ln|\sec u| + c$

$$\Rightarrow \int \tan(ax)dx = \frac{-\ln|\cos(ax)|}{a} + c = \frac{\ln|\sec(ax)|}{a} + c, a \neq 0$$

F14. $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + c = -\ln|\csc u| + c$

$$\Rightarrow \int \cot(ax)dx = \frac{\ln|\sin(ax)|}{a} + c = \frac{-\ln|\csc(ax)|}{a} + c, a \neq 0$$

F15. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + c \Rightarrow \int \sec(ax)\,dx = \dfrac{\ln|\sec(ax) + \tan(ax)|}{a} + c, a \neq 0$

F16. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + c \Rightarrow \int \csc(ax)\,dx = \dfrac{\ln|\csc(ax) - \cot(ax)|}{a} + c$

F17. $\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c \Rightarrow \int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right) + c, a > 0$

F18. $\int \dfrac{du}{1+u^2} = \arctan u + c \Rightarrow \int \dfrac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \dfrac{1}{a} \cdot \arctan\left(\dfrac{x}{a}\right) + c, a > 0$

F19. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}} = \operatorname{arcsec}|u| + c \Rightarrow \int \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = \dfrac{1}{a} \cdot \operatorname{arcsec}\left(\left|\dfrac{x}{a}\right|\right) + c, 0 < a < |x|$

1.1 การหาปริพันธ์โดยการจัดรูปปริพันธ์เข้าสูตรพื้นฐาน

พยายามจัดรูปให้เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาปริพันธ์ได้

ตัวอย่าง จงหา $\int\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{x^3}-2x\right)dx$

วิธีทำ

พิจารณา $\int\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{x^3}-2x\right)dx = \int\frac{1}{5}dx+\int\frac{2}{x^3}dx-\int 2x\,dx$

$$= \frac{1}{5}\int 1\,dx + 2\int x^{-3}dx - 2\int x\,dx$$

$$= \frac{x}{5} + \frac{2x^{-2}}{(-2)} - \frac{2x^2}{2} + C$$

$$= \frac{x}{5} - \frac{1}{x^2} - x^2 + C$$

$\square$

ตัวอย่าง จงหา $\displaystyle\int\left(\frac{4+\sqrt{x}-x^{\frac{2}{3}}}{x^{3}}\right)dx$

วิธีทำ

พิจารณา $\dfrac{4+\sqrt{x}-x^{\frac{2}{3}}}{x^{3}} = \dfrac{4+x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{2}{3}}}{x^{3}}$

$$= \frac{4}{x^{3}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{3}}-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{3}}$$

$$= 4x^{-3}+x^{\frac{1}{2}-3}-x^{\frac{2}{3}-3}$$

$$= 4x^{-3}+x^{-\frac{5}{2}}-x^{-\frac{7}{3}}$$

ดังนั้น $\displaystyle\int\left(\frac{4+\sqrt{x}-x^{\frac{2}{3}}}{x^{3}}\right)dx = \int\left(4x^{-3}+x^{-\frac{5}{2}}-x^{-\frac{7}{3}}\right)dx$

$$= 4\int x^{-3}dx+\int x^{-\frac{5}{2}}dx-\int x^{-\frac{7}{3}}dx$$

$$= \frac{4x^{-2}}{(-2)}+\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\left(-\frac{3}{2}\right)}-\frac{x^{-\frac{4}{3}}}{\left(-\frac{4}{3}\right)}+C$$

$$= -\frac{2}{x^{2}}-\frac{2}{3x^{3/2}}+\frac{3}{4x^{4/3}}+C$$

$\square$

ตัวอย่าง จงหา $\int \left(1+\sin^2 x \csc x\right) dx$

วิธีทำ

พิจารณา $1+\sin^2 x \csc x = 1+\sin^2 x \cdot \frac{1}{\sin x}$

$$= 1+\sin x$$

นั่นคือ

$$\int (1+\sin^2 x \csc x) dx = \int (1+\sin x) dx$$

$$= \int 1 dx + \int \sin x dx$$

$$= x - \cos x + C$$

$\square$

ตัวอย่าง จงหา $\displaystyle\int\left(\frac{\csc x}{\csc x-\sin x}\right)dx$

วิธีทำ

พิจารณา $$\frac{\csc x}{\csc x-\sin x}=\frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x}-\sin x}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}}$$

$$=\frac{1}{1-\sin^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

ดังนั้น $$\int\frac{\csc x}{\csc x-\sin x}dx=\int\sec^2 x\,dx$$

$$=\tan x+C$$

$\square$

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\cos x} dx$

วิธีทำ

พิจารณา $\left(\frac{\sin x + \cos x}{\cos x}\right)^2 = \frac{\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x}{\cos x}$

$= \frac{\sin^2 x}{\cos x} + 2\sin x + \cos x$

$= \ldots$