1.2.1.2.2 การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ (หน้า 35)

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$\sqrt{a^2 - x^2}$ หรือ $a^2 - x^2$

$\sqrt{a^2 + x^2}$ หรือ $a^2 + x^2$

$\sqrt{x^2 - a^2}$ หรือ $x^2 - a^2$

โดยที่ a เป็นค่าคงตัวที่มีค่าเป็นบวก

พิจารณาตัวอย่างฟังก์ชัน $\sqrt{a^2 - x^2}$ การแทนค่า $x = a \cdot \sin\theta$ ทำให้ได้ว่า

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$

วิธีทำ

ในทำนองเดียวกันนี้ เราสามารถใช้การแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อหาปริพันธ์ในรูปแบบอื่น ๆ ได้ ดังตารางต่อไปนี้

พจน์	**การแทนค่า**	**ขอบเขตของ θ**	**ผลลัพธ์**
$\sqrt{a^2-u^2}$ หรือ a^2-u^2	$u=a\cdot\sin\theta$	$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$	$a\cdot\cos\theta$
$\sqrt{a^2+u^2}$ หรือ a^2+u^2	$u=a\cdot\tan\theta$	$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$	$a\cdot\sec\theta$
$\sqrt{u^2-a^2}$ หรือ u^2-a^2	$u=a\cdot\sec\theta$	$0\le\theta<\frac{\pi}{2};u\ge a$ $\frac{\pi}{2}<\theta\le\pi;u\le -a$	$a\cdot\tan\theta$

และใช้**เอกลักษณ์**ดังต่อไปนี้

$$1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$$

$$\sec^2\theta-1=\tan^2\theta$$

$$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$$

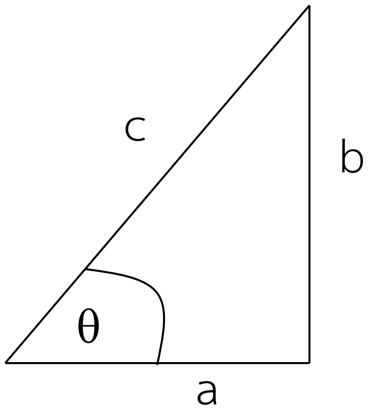
ตัวอย่าง 1. $\sqrt{1-u^2}$ จะแทนค่าด้วย

2. $\sqrt{u^2-36}$ จะแทนค่าด้วย

3. $\sqrt{9+u^2}$ จะแทนค่าด้วย

ทฤษฎีบทพีทากอรัส (Pythagorean Theorem)

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$



$$\sin\theta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

เราสามารถสรุปขั้นตอนการหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ดังนี้

1. จัดรูปฟังก์ชันให้ตรงตามรูปแบบในตาราง (มี u มี a)
2. กำหนดให้ $u = a\cdot[\sin/\ \tan/\ \sec]\theta$ และขอบเขตของ θ ตามตาราง
3. แทนค่าฟังก์ชันให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันของ θ และหา dx
4. หาปริพันธ์เทียบ θ
5. แทนค่าฟังก์ชันของ θ กลับเป็นฟังก์ชันของ x โดยการวาดรูปสามเหลี่ยมตามทฤษฎีบทพีทากอรัส

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}\,dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{1}{(x^2 - 9)^{3/2}} dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{1}{\sqrt{25x^2 - 4}} dx$

วิธีทำ

หมายเหตุ ถ้าปริพัทธ์มีตัวประกอบเป็น $\sqrt{ax^2+bx+c}$ หรือ ax^2+bx+c จะต้องแปลงให้อยู่ในรูปกำลังสองสัมบูรณ์ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
& ax^2+bx+c \\
&\quad = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\
&\quad = a\left(x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)\right) \\
&\quad = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right) \\
&\quad = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right) \\
&\quad = a(u^2+k^2)
\end{aligned}
$$

เมื่อ $u=x+\frac{b}{2a}$ และ $k^2=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$

แล้วจึงหาค่าปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8} dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{1}{(x^2 - 4x + 13)^2} dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}} dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2-\sin^2 x}}dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{2x+3}{4x^2+4x+5}dx$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด

จงหาค่า

1. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}dx$

2. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$

3. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2}dx$

4. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}dx$

5. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$

7. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$

8. $\int x\sqrt{4-x^2}\,dx$

9. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}dx$

10. $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$

11. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-8}}$

13. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

14. $\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$

15. $\int \frac{4x^2}{(x^2+1)^2}dx$

16. $\int \frac{dx}{[(x+1)^2+1]^2}$

17. $\int x^3\sqrt{4+x^2}\,dx$

18. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+2}$

19. $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}}\,dx$

20. $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2-4x}}dx$

1.2.2 การหาปริพันธ์โดยวิธีแยกเศษส่วนย่อย (Integration by partial fractions)

บทนิยาม <u>ฟังก์ชันตรรกยะ</u> คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูปเศษส่วนของฟังก์ชันพหุนามระดับขั้นต่าง ๆ

นั่นคือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

เมื่อ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามที่ไม่มีตัวประกอบร่วมกัน

ขั้นตอนการแยกเศษส่วนย่อยของฟังก์ชันตรรกยะ

ขั้นที่ 1 ถ้า $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$

ให้หารยาว $P(x)$ ด้วย $Q(x)$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

เมื่อ $S(x)$ และ $R(x)$ เป็นพหุนามและ $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$

ตัวอย่างเช่น

$$\frac{x^4}{x^2-1} = (x^2+1) + \frac{1}{x^2-1}$$

$$\frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}=2x+\frac{1}{x^2-x}$$

ขั้นที่ 2 แยกตัวประกอบของ $Q(x)$ ให้อยู่ในรูป $(x-a)$ และ ax^2+bx+c (ซึ่งไม่สามารถแยกตัวประกอบได้อีก)

2.1) ตัวประกอบของ $Q(x)$ เป็นตัวประกอบเชิงเส้นที่ไม่ซ้ำกัน

นั่นคือ $Q(x)=(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)\cdots(a_nx-b_n)$

จะได้

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x-b_1}+\frac{A_2}{a_2x-b_2}+\cdots+\frac{A_n}{a_nx-b_n}$$

แล้วหาค่าคงตัว $A_1, A_2, \ldots, A_n$ โดยวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์หรือวิธีการแทนค่า x ที่เหมาะสม

ตัวอย่าง (non-repeated linear factors)

1. จงแยก $\dfrac{x+4}{x^2+5x-6}$ เป็นเศษส่วนย่อย

2. จงหา $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+5x-6}\,dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง (non-repeated linear factors)

1. จงแยก $\dfrac{23x-11x^2}{(2x-1)(9-x^2)}$ เป็นเศษส่วนย่อย

2. จงหา $\displaystyle\int \frac{23x-11x^2}{(2x-1)(9-x^2)}\,dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง (non-repeated linear factors)

1. จงแยก $\dfrac{2x^3-4x^2-x-1}{x^2-2x-3}$ เป็นเศษส่วนย่อย

2. จงหา $\displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2-x-1}{x^2-2x-3}dx$

วิธีทำ

2.2) ตัวประกอบบางตัวของ $Q(x)$ เป็นตัวประกอบเชิงเส้นที่ซ้ำกัน

เช่น $Q(x)=(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)(a_3x-b_3)^m$ จะได้

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x-b_1}+\frac{A_2}{a_2x-b_2}+\frac{B_1}{a_3x-b_3}+\frac{B_2}{(a_3x-b_3)^2}+\cdots+\frac{B_m}{(a_3x-b_3)^m}$$

แล้วหาค่าคงตัว $A_1,\ A_2,\ B_1\ldots,\ A_m$ ต่อไป

ตัวอย่าง (repeated linear factors)

1. จงแยก $\dfrac{2x+4}{x^3-2x^2}$ เป็นเศษส่วนย่อย
2. จงหา $\displaystyle\int\frac{2x+4}{x^3-2x^2}dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง (repeated linear factors)

1. จงแยก $\dfrac{x^3+8}{(x-2)^4}$ เป็นเศษส่วนย่อย

2. จงหา $\displaystyle\int \frac{x^3+8}{(x-2)^4}\,dx$

วิธีทำ

2.3) ตัวประกอบของ $Q(x)$ เป็นตัวประกอบกำลังสองที่ไม่ซ้ำกัน

เช่น $Q(x)=(a_1x-b_1)(a_2x-b_2)(ax^2+bx+c)$

จะได้ $$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x-b_1}+\frac{A_2}{a_2x-b_2}+\frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$$

ตัวอย่าง (irreducible quadratic factors)

1. จงแยก $\dfrac{2x^2-5x+10}{(x+2)(x^2+x+5)}$ เป็นเศษส่วนย่อย
2. จงหา $\displaystyle\int\frac{2x^2-5x+10}{(x+2)(x^2+x+5)}dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง (irreducible quadratic factors)

1. จงแยก $\dfrac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}$ เป็นเศษส่วนย่อย

2. จงหา $\displaystyle\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$

วิธีทำ

ตัวประกอบของ $Q(x)$ เป็นตัวประกอบกำลังสองที่ซ้ำกัน

เช่น $Q(x)=(ax^2+bx+c)^m(a_1x-b_1)$ จะได้

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}+\frac{D}{a_1x-b_1}$$

ตัวอย่าง (irreducible quadratic factors)

1. จงแยก $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)^2}$ เป็นเศษส่วนย่อย
2. จงหา $\displaystyle\int\frac{1}{x^2(x^2+1)^2}dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{5+2\ln x}{x(1+\ln x)^2}dx$

วิธีทำ

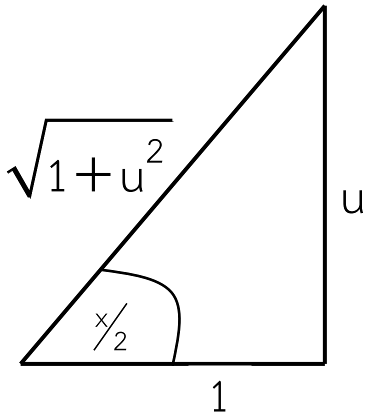
1.2.2.1 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (หน้า 51)

ปริพันธ์ในรูปแบบ

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

เมื่อ R เป็นฟังก์ชันตรรกยะในตัวแปร $\sin x$ และ/หรือ $\cos x$ สามารถแปลงให้อยู่ในรูปฟังก์ชันตรรกยะได้โดย**การแทนค่ามุมครึ่ง** ดังนี้

ให้ $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{x}{2} = \arctan u$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$



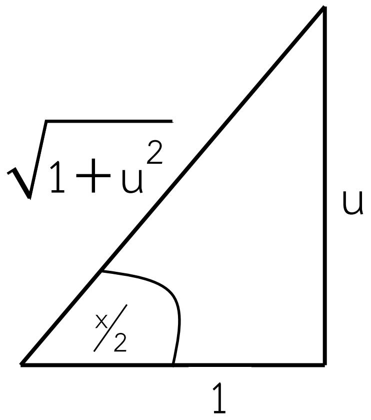
$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$x = 2\arctan u \Rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2}du$$

$$\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$



$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\begin{aligned}\sin x &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\\ &= 2\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)\\ &= \frac{2u}{1+u^2}\end{aligned}$$

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1 \qquad = \frac{2}{\sec^2\left(x/2\right)}-1$$

$$= \frac{2-\sec^2\left(x/2\right)}{\sec^2\left(x/2\right)} \qquad = \frac{1-\left(1+\sec^2\left(x/2\right)\right)}{1+\tan^2\left(x/2\right)}$$

$$= \frac{1-\tan^2\left(x/2\right)}{1+\tan^2\left(x/2\right)} \qquad = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{1}{1-\sin x+\cos x}dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{2\sin x}{2\sin x - \sin(2x)} dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{1}{\tan x + \sin x} dx$

วิธีทำ

1.2.3 การหาปริพันธ์ทีละส่วน (Integration by parts)

ให้ u(x) และ v(x) เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้

แล้ว $$\frac{d}{dx}\left[u(x)\cdot v(x)\right]=u(x)\cdot\frac{dv(x)}{dx}+v(x)\cdot\frac{du(x)}{dx}$$

ดังนั้น

$$\int\frac{d}{dx}\left[u(x)\cdot v(x)\right]dx=\int u(x)\cdot v'(x)dx+\int v(x)\cdot u'(x)dx$$

$$u(x)\cdot v(x)+c=\int u(x)\cdot v'(x)dx+\int v(x)\cdot u'(x)dx$$

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx+c$$

เนื่องจาก $\int v(x)u'(x)dx$ จะเกิดค่าคงตัวจากการหาปริพันธ์

ดังนั้นเราสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\boxed{\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx}$$

หรือเขียนสั้น ๆ ดังนี้

$$\boxed{\int u\,dv=uv-\int v\,du}$$

ซึ่งเป็น**สูตรของการหาปริพันธ์ทีละส่วน**

หลักการสำคัญของการหาปริพันธ์ทีละส่วน

คือ ต้องแยกปริพัทธ์ออกเป็นสองส่วน ส่วนหนึ่งเป็น u และอีกส่วนหนึ่งเป็น dv ซึ่งมีหลักการทั่วไป ดังนี้

1. เลือก u ซึ่งหาค่า du ได้

2. เลือก dv ซึ่งสามารถหา $\int v\,du$ ได้ง่ายกว่า $\int u\,dv$
โดยพยายามจัดกลุ่มฟังก์ชันที่มีหลายฟังก์ชันในปริพัทธ์ให้เป็นกลุ่มใหญ่ที่สุดเป็น dv เพื่อลดความยุ่งยาก

3. หา du และ v

4. เข้าสูตรการหาปริพันธ์ทีละส่วน

5. ถ้า $\int v\,du$ ไม่สามารถหาค่าได้ทันที อาจต้องทำการหาปริพันธ์ทีละส่วนซ้ำอีกครั้งหรือหลายครั้ง

6. ระหว่างหาปริพันธ์ ถ้ามีพจน์ $\int u\,dv$ ปรากฏขึ้นอีก ให้ย้ายข้างไปรวมกับทางซ้ายมือ

ปริพัทธ์ที่ควรใช้เทคนิคการหาปริพันธ์ทีละส่วน เช่น

1. เป็นผลคูณของฟังก์ชันตั้งแต่ 2 ฟังก์ชัน
2. อยู่ในรูปฟังก์ชันลอการิทึม หรือ ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง
3. อยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

ตัวอย่าง จงหา $\int \ln x\, dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int x \ln x \, dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int x \cos x \, dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \arcsin x \, dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int x e^{2x} \, dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int x^2 e^x \, dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int e^{x}\cos 2x\,dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \ln(x+x^2)\,dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \cos(\ln x)\,dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \sec^5 \theta \, d\theta$

วิธีทำ

ตัวอย่าง (การบ้าน)

1. จงพิสูจน์สูตรลดทอน

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cdot\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\cdot\int \cos^{n-2}x\,dx$$

2. จงพิสูจน์สูตรลดทอน

$$\int x^m\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n}\cdot x^m\sin(nx) - \frac{m}{n^2}\cdot x^{m-1}\cos(nx) - \frac{m(m-1)}{n^2}\cdot\int x^{m-2}\cos(nx)\,dx$$

แบบฝึกหัด

จงหาค่าปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int xe^{-x}dx$

2. $\int x^3 e^{-x^2} dx$

3. $\int x\ln(x+1)dx$

4. $\int x\cdot 2^x dx$

5. $\int x^2 \ln x\, dx$

6. $\int z\arctan z\, dz$

7. $\int \ln(-x)dx$

8. $\int x\,\mathrm{arcsec}\, x\, dx, x>0$

9. $\int x^2(e^x-1)dx$

10. $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx$

11. $\int (\ln x)^2 dx$

12. $\int x\sin(ax)dx, a\neq 0$

13. $\int \sin(\ln t)dt$

14. $\int \frac{x}{\sqrt{1+4x}}dx$

15. $\int \frac{x}{\sqrt{1+4x}}dx$

16. $\int \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt$

17. $\int_{-1}^{1} (x+x^3)e^x dx$

18. $\int_{0}^{1} (e-e^y)dy$

19. $\int_{-1}^{1} x\cdot a^x dx$

20. $\int_{0}^{\pi/4} (3x+x^2)\cos x\, dx$