บทที่ 3 ฟังก์ชันหลายตัวแปรและอนุพันธ์ย่อย

- ปัญหาเบื้องต้นอาจเป็นปัญหาที่ขึ้นอยู่กับปัจจัยเดียว
- การแก้ปัญหาอยู่ในรูปของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร (Calculus I)
- โดยทั่วไป ปัญหาจะขึ้นอยู่กับหลายปัจจัยโดยมีตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็น**ฟังก์ชันหลายตัวแปร**
- การแก้ปัญหาสามารถขยายแนวคิดจากแคลคูลัสของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรได้
- ในบทนี้**จะศึกษา**

1. ฟังก์ชันหลายตัวแปร
2. ลิมิตและความต่อเนื่อง
3. อนุพันธ์ย่อย
4. กฎลูกโซ่
5. อนุพันธ์ระบุทิศทาง
6. ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม

~~7. ระนาบสัมผัส และเส้นแนวฉาก~~

8. ค่าสุดขีด และการประยุกต์ปัญหาค่าสุดขีด
9. ตัวคูณลากรานจ์

3.1 ฟังก์ชันหลายตัวแปร

มีปริมาณหลาย ๆ อย่างที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป ตัวอย่างเช่น

<u>ปริมาตรของทรงกระบอก</u>: $V = \pi r^2 h$

ซึ่งขึ้นอยู่กับรัศมีของฐานวงกลม r และ ความสูง h

<u>พื้นที่สามเหลี่ยม</u>: $A = \frac{1}{2} \cdot bh$

ซึ่งขึ้นกับความยาวของฐาน b และ ความสูง h

<u>ปริมาตรของกล่อง</u> : $V^* = lwh$

ซึ่งขึ้นกับความยาว l ความกว้าง w และ ความสูง h

เรากล่าวว่า V และ A เป็น**ฟังก์ชัน 2 ตัวแปร**

และ V^* เป็น**ฟังก์ชัน 3 ตัวแปร**

บทนิยาม 3.1.1 ให้ $D = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\right\}$

ฟังก์ชันค่าจริง f บน D คือ กฎซึ่งกำหนดค่าของ $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นจำนวนจริงเพียงค่าเดียว ทุกจุดใน D

- เซต D เรียกว่า**โดเมน** (domain)
- เซตของค่าของ w ทั้งหมดเรียกว่า**พิสัย** (range)
- ตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เรียกว่า**ตัวแปรอิสระ** (independent variable)
- ตัวแปร w เรียกว่า**ตัวแปรตาม** (dependent variable)

หมายเหตุ

1. ในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร เขียนแทนด้วย z=f(x, y) และถ้า f เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร เขียนแทนด้วย w=f(x, y, z) เป็นต้น
2. ถ้า f ถูกกำหนดโดยกฎ ๆ หนึ่ง และโดเมนของ f ไม่ได้กำหนดชัดเจน แล้วให้เป็นที่เข้าใจว่าโดเมนจะประกอบด้วยจุดทุกจุดที่แทนในกฎนั้นแล้วได้ค่าเป็นจำนวนจริง และต้องไม่มีการหารเป็นศูนย์ เรียกโดเมนนี้ว่า “**โดเมนธรรมชาติ**” ของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง ให้ $f(x) = 3x^2\sqrt{y} + y^2\sqrt{x}$

จงหา $f(1,4)$, $f(0,9)$, $f(t^2,t), f(ab,9b)$ และโดเมนธรรมชาติของ f

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาและเขียนกราฟของโดเมนของฟังก์ชัน

$$f(x,y) = \ln(x^2 - y)$$

วิธีทำ

ใน Calculus I โดเมนส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปช่วง (interval) สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร โดเมนส่วนใหญ่อาจมีลักษณะเป็นบริเวณ (region) และมีบทนิยามในลักษณะต่าง ๆ ดังนี้

บทนิยาม 3.1.2

1. จุด (x_0, y_0) ในบริเวณ R เป็น

1.1 จุดภายใน (interior point) ถ้า (x_0, y_0) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีจุดทุกจุดอยู่ภายในบริเวณ R

1.2 จุดขอบ (boundary point) ถ้า (x_0, y_0) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีจุดบางส่วนอยู่ภายใน R และมีบางส่วนอยู่ภายนอก R

2. บริเวณ R เป็น**เซตเปิด** (open set) ถ้าจุดทุกจุดใน R เป็นจุดภายในและเป็น**เซตปิด** (closed) ถ้ามันบรรจุจุดขอบทั้งหมดของ R

3. บริเวณ R **มีขอบเขต** (bounded) ถ้าสามารถบรรจุอยู่ในวงกลมวงหนึ่งได้ ถ้าไม่เช่นนั้นจะกล่าวว่า**ไม่มีขอบเขต** (unbounded)

ตัวอย่าง จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

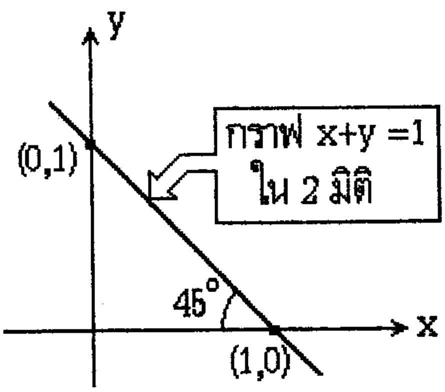
วิธีทำ

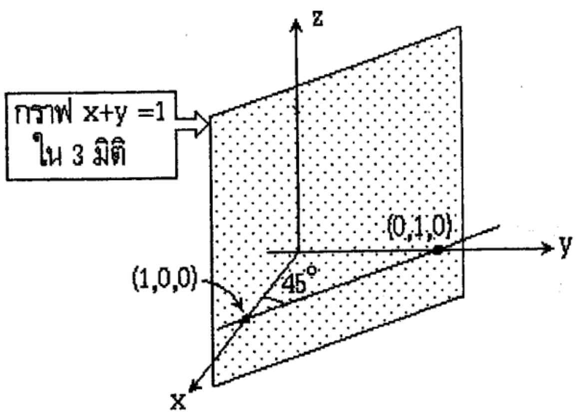
ตัวอย่าง จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $g(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

วิธีทำ

กราฟของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร

- กราฟของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร f ในระนาบ xy คือ กราฟของสมการ $y=f(x)$
- กราฟของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร f ในระนาบ xyz คือกราฟของสมการ $z=f(x,y)$ ซึ่งโดยทั่วไปจะเป็น**พื้นผิวใน 3 มิติ**
- เมื่อกล่าวถึงกราฟใน 3 มิติ สมการในเทอม x และ y เช่น $x+y=1$ จะเป็นสมการที่<u>กำกวมไม่ชัดเจน</u>ว่าควรเขียนกราฟใน 2 มิติหรือ 3 มิติ จึงควรเขียนสมการใหม่เป็น $x+y+0z=1$ ซึ่งเป็นกรณีของ 3 มิติ ซึ่งทั้งสองกรณีจะกราฟดังนี้





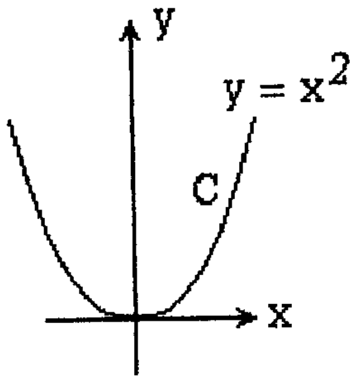
พื้นที่ผิวใน 3 มิติอาจเกิดจากการเลื่อนเส้นโค้งบนระนาบหนึ่งขนานไปกับเส้นคงที่เส้นหนึ่ง ในรูป ระนาบ $x+y=1$ ได้จากการเลื่อนเส้นตรง $x+y=1$ ขนานไปกับแกน Z

โดยทั่วไปแล้ว ถ้าสมการในเทอมของ x และ y มีกราฟใน 2 มิติเป็นเส้นโค้ง C ในระนาบ XY แล้วเมื่อเขียนกราฟเดียวกันใน 3 มิติจะเกิดพื้นผิวที่ได้จากการเลื่อนเส้นโค้ง C ขนานกับแกน Z

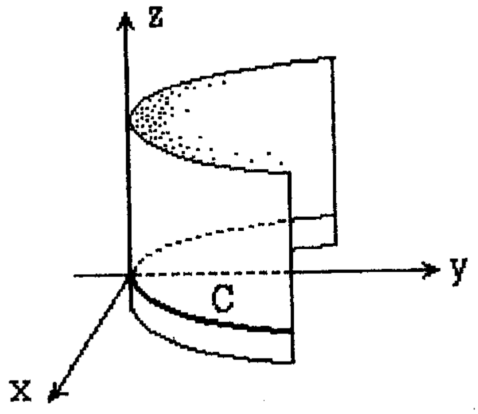
ทำนองเดียวกันสมการในเทอมของ x และ z จะให้พื้นผิวใน 3 มิติที่ได้จากการเลื่อนเส้นโค้งขนานกับแกน Y

และ สมการในเทอมของ y และ z จะให้พื้นผิวใน 3 มิติที่ได้จากการเลื่อนเส้นโค้งขนานกับแกน X

ตัวอย่าง กราฟของ $y = x^2$ ใน 2 และ 3 มิติแสดงได้ดังรูป



กราฟใน 2 มิติ



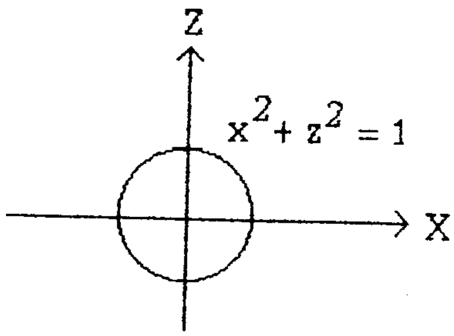
กราฟใน 3 มิติ

บทนิยาม 3.1.3 (หน้า 147) ให้ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

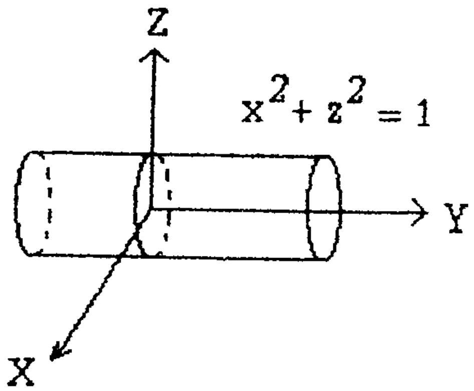
1. เซตของจุดในระนาบที่ทำให้ f(x, y)=c เรียกว่า**เส้นโค้งระดับ** (level curve) ของฟังก์ชัน f และ
2. เซตของจุด (x, y, f(x,y)) ทั้งหมด เรียกว่า**กราฟ** (graph) ของฟังก์ชัน f หรืออาจเรียกว่า**พื้นผิว** (surface) z=f(x, y)

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของสมการ $x^2 + z^2 = 1$ ใน 3 มิติ

วิธีทำ เริ่มเขียนกราฟของสมการ $x^2 + z^2 = 1$ บนระนาบ xz ก่อน ซึ่งกราฟเป็นวงกลม ดังรูป



เมื่อเลื่อนเส้นนี้ขนานไปกับแกน Y จะทำให้เกิดทรงกระบอกตรง ดังรูป



ตัวอย่างที่ 3.1.3 (หน้า 147) จงบอกลักษณะกราฟของฟังก์ชัน

$$f(x,y)=1-x-\frac{1}{2}y \text{ ในปริภูมิ XYZ}$$

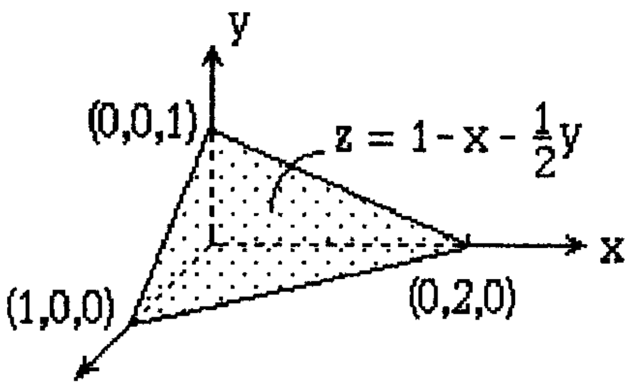
วิธีทำ กราฟของฟังก์ชันที่กำหนดคือ

$$z=1-x-\frac{1}{2}y \qquad \text{หรือ} \qquad x+\frac{1}{2}y+z=1$$

ซึ่งเป็นระนาบ

เราสามารถเขียนส่วนหนึ่งของระนาบโดยลงจุดตัดแกนพิกัดทั้งสามและลากเส้นเชื่อมจุดตัด

1. หาจุดตัดแกน X โดยแทน $y=z=0$ ในสมการได้ $x=1$
2. หาจุดตัดแกน Y โดยแทน $x=z=0$ ในสมการได้ $y=2$
3. หาจุดตัดแกน Z โดยแทน $x=y=0$ ในสมการได้ $z=1$



หมายเหตุ แกนในรูปไม่ถูกต้อง

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ในปริภูมิ XYZ

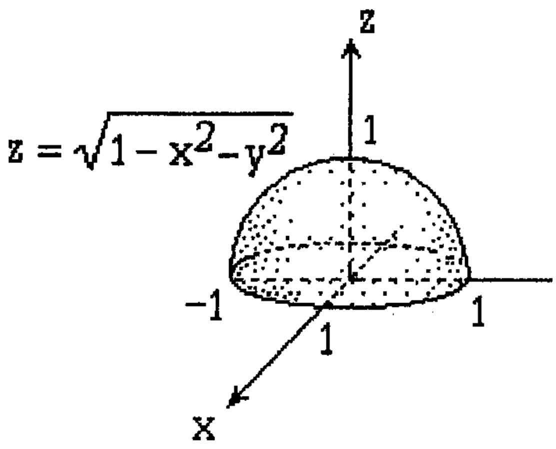
วิธีทำ กราฟของฟังก์ชันคือกราฟของสมการ $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

เมื่อยกกำลังสองทั้งสองข้างได้ $\quad z^2=1-x^2-y^2$

จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น $\quad x^2+y^2+z^2=1$

ซึ่งเป็นทรงกลมหนึ่งหน่วยมีจุดศูนย์กลางที่ (0,0,0)

เนื่องจาก $z\geq 0$ ดังนั้นกราฟของ f จึงเป็น**ครึ่งบนของทรงกลม** $x^2+y^2+z^2=1$



หมายเหตุ แกน Y ในรูปหายไป

ตัวอย่างที่ 3.1.6 (หน้า 147) จงเขียนกราฟและโดเมนของฟังก์ชัน

$$f(x,y)=x^2+4y^2$$

วิธีทำ 1. ถ้าพื้นผิวตัดกับระนาบ z=k เมื่อ k>0 จะได้เส้นโค้งระดับเป็นรูปวงรี ซึ่งมีสมการคือ $x^2+4y^2=k$ และ z=k

(ถ้า k เพิ่มขึ้น รูปวงรีก็จะใหญ่ตามไปด้วย)

2. ถ้าพื้นผิวตัดกับระนาบ yz (x=0)

จะได้เส้นโค้งเป็นรูปพาราโบลาซึ่งมีสมการ $z=4y^2, x=0$

3. ถ้าพื้นผิวตัดกับระนาบ xz (y=0)

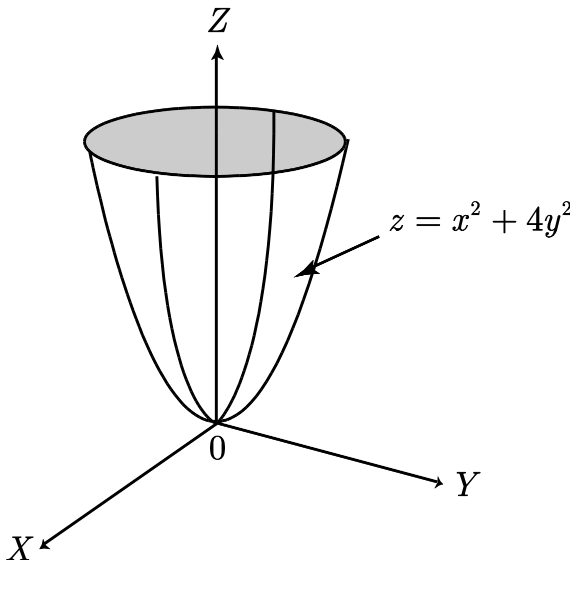
จะได้เส้นโค้งเป็นรูปพาราโบลาซึ่งมีสมการ $z=x^2, y=0$

4. ถ้าพื้นผิวตัดกับระนาบ xy (z=0)

จะได้จุดกำเนิดเพียงจุดเดียวดังแสดงในรูป

เพราะฉะนั้น โดเมนของฟังก์ชันนี้คือ $\{(x,y):x^2+4y^2\geq 0\}$

หรือบริเวณบนระนาบ xy ทั้งหมด



3.2 ลิมิตและความต่อเนื่อง

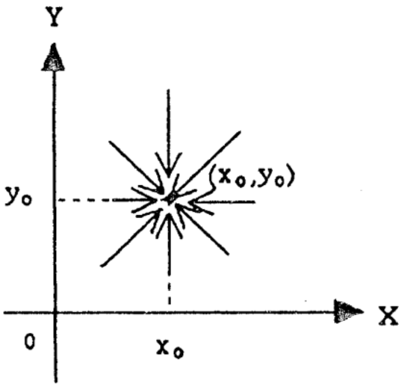
บทนิยาม 3.2.1 (หน้า 150) ให้ f(x, y) เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร โดยโดเมนทั้งหมดบรรจุอยู่ภายในวงกลมบางวงที่มีจุดศูนย์กลาง (x_0, y_0)(แต่อาจไม่รวม (x_0, y_0))

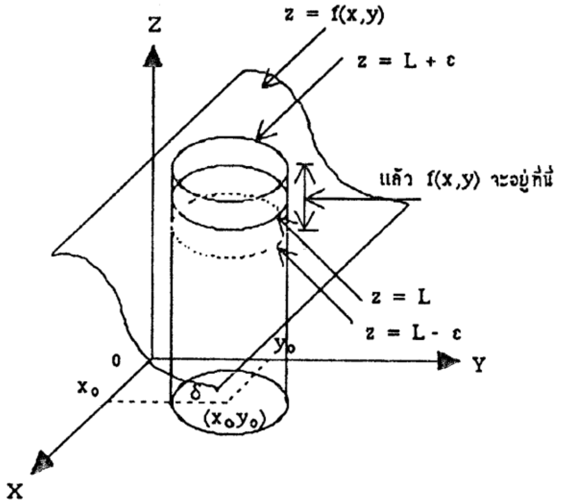
f(x, y) มีลิมิต L ขณะที่จุด (x, y) เข้าใกล้ (x_0, y_0)

เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$

ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(x,y) - L| < \varepsilon$

สำหรับทุก (x, y) ซึ่ง $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$





หมายเหตุ จำนวนจริง L ในบทนิยาม 3.2.1 **มีเพียงค่าเดียว**เท่านั้น

นั่นคือ $f(x,y) \to L$ เพียงค่าเดียวเท่านั้น

ไม่ว่า $(x,y) \to (x_0, y_0)$ ในทิศทางใดก็ตาม (ซึ่งใน $\mathbb{R}^2$ ทิศทางที่ $(x,y) \to (x_0, y_0)$ มีเป็นจำนวนอนันต์)

ตัวอย่าง จงใช้บทนิยาม 3.2.1 พิสูจน์ว่า

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} (3x+2y)=7$$

วิธีทำ

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \varepsilon/5$ จะได้ว่า

สำหรับ $0 < \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} < \delta$

แล้ว $|x-1| = \sqrt{(x-1)^2} \le \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} < \delta$

และ $|y-2| = \sqrt{(y-2)^2} \le \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} < \delta$

ซึ่งทำให้

$$\begin{aligned} |f(x,y)-7| &= |(3x+2y)-7| \\ &= |3(x-1)+2(y-2)| \\ &\le 3|x-1|+2|y-2| \\ &\le 5\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} \\ &< 5\delta \\ &= 5(\varepsilon/5) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

โดยบทนิยาม 3.2.1 ได้ว่า $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (3x+2y)=7$

บทนิยาม ให้ f(x, y) เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และ C เป็นเส้นโค้งเรียบบน $\mathbb{R}^2$ ที่ผ่านจุด (x_0, y_0) ซึ่งกำหนดโดย $y = g(x)$ **ลิมิตของ f(x, y) เมื่อ (x, y) เข้าใกล้** (x_0, y_0) **บน C** คือ

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x, g(x))$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{on } C}} f(x,y)$

ซึ่งคำนวณโดยการแทนค่า $y = g(x)$ ลงใน f(x, y) ได้ $f(x, g(x))$ ซึ่งมีแต่ตัวแปร x เพียงอย่างเดียว แล้วหา $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, g(x))$ ซึ่งเป็นลิมิตของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร

บทนิยาม ให้ f(x, y) เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และ C เป็นเส้นโค้งเรียบบน $\mathbb{R}^2$ ที่ผ่านจุด (x_0, y_0) ซึ่งกำหนดโดย $x = h(y)$ **ลิมิตของ f(x, y) เมื่อ (x, y) เข้าใกล้** (x_0, y_0) **บน C** คือ

$\lim\limits_{y \to y_0} f(h(y), y)$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ \text{on } C}} f(x,y)$

ซึ่งคำนวณโดยการแทนค่า $x = h(y)$ ลงใน f(x, y) ได้ $f(h(y), y)$ ซึ่งมีแต่ตัวแปร y เพียงอย่างเดียว แล้วหา $\lim\limits_{y \to y_0} f(h(y), y)$ ซึ่งเป็นลิมิตของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร

ตัวอย่าง จงหาลิมิตของ $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

เมื่อ $(x,y)\longrightarrow(0,0)$ บนเส้นโค้งต่อไปนี้

1. แกน X
2. แกน Y
3. พาราโบลา $y=x^2$
4. เส้นตรง $x=y$

วิธีทำ

หมายเหตุ เราสามารถใช้ลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปรตามแนวเส้นโค้งอธิบายการหาค่าไม่ได้ของลิมิต ได้ 2 วิธี ดังนี้

> **ถ้า**สามารถหาเส้นโค้งซึ่งผ่านจุด (x_0, y_0) ที่แตกต่างกันได้ 2 เส้น แต่ให้ค่าลิมิตของ $f(x,y)$ เมื่อ $(x,y) \to (x_0, y_0)$ ไม่เท่ากัน หรือสามารถหาเส้นโค้งที่ผ่านจุด (x_0, y_0) ที่ลิมิตของ $f(x,y)$ เมื่อ $(x,y) \to (x_0, y_0)$ หาค่าไม่ได้ (มีค่าเป็น ∞ หรือ $-\infty$)
>
> **แล้ว** $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ หาค่าไม่ได้

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงพิจารณา $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

ถ้าหาได้จงหาค่า ถ้าหาค่าไม่ได้จงให้เหตุผล

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาค่า $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2+y^2-2}{x-y}$ ถ้าลิมิตหาค่าได้

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 3.2.1 (สมบัติของลิมิตของฟังก์ชันของตัวแปร 2 ตัว)
ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร โดย L, M, k เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ และ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=M$
แล้ว

1. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y)+g(x,y)\right]=L+M$
2. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y)-g(x,y)\right]=L-M$
3. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y)\cdot g(x,y)\right]=L\cdot M$
4. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[k\cdot f(x,y)\right]=k\cdot L$
5. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{L}{M}$ เมื่อ $M\neq 0$
6. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)]^{r/s}=L^{r/s}$ เมื่อ $s\neq 0, L^{r/s}\in\mathbb{R}$

ตัวอย่างที่ 3.2.5 (หน้า 151) จงหาค่า

1. $$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy + y^3}$$

2*. $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)^2 + (y+2)(x^2-1)}{(x-1)(y+2)^2}$$

วิธีทำ

บทนิยาม 3.2.2 ฟังก์ชัน $f(x,y)$ **ต่อเนื่อง**ที่จุด (x_0,y_0) ถ้า

1. f นิยามที่จุด (x_0,y_0) (นั่นคือ $f(x_0,y_0)$ หาค่าได้)
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ หาค่าได้

และ 3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

ถ้า ฟังก์ชัน f ไม่สอดคล้องเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่งใน 3 ข้อนี้
แล้ว ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่อง (discontinuous) ที่จุด (x_0,y_0)

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ ต่อเนื่องที่จุด (0,0) หรือไม่

วิธีทำ

กำหนดให้ $\varepsilon>0$ เลือก $\delta=\varepsilon$ เนื่องจาก $|x|\le\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ และ $y^2\le x^2+y^2$ ดังนั้น สำหรับ (x, y) ซึ่ง $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ แล้ว

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|\le\frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon$$

โดยบทนิยาม 3.2.1 ได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=0$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด (0,0) หรือไม่

1. $.f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 1 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

2. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

บทนิยาม 3.2.3 1. ฟังก์ชันสองตัวแปร x และ y เรียกว่า**ต่อเนื่องบนบริเวณ R** ของระนาบ xy ถ้าฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจุดของ R

2. ถ้าฟังก์ชันใดต่อเนื่องทุกจุดบนระนาบ xy จะเรียกว่า **ฟังก์ชันต่อเนื่อง** (continuous function)

ทฤษฎีบท 3.4.3 [ทฤษฎีบทของความต่อเนื่อง]

1. ถ้า g และ h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของตัวแปรเดียว แล้ว $f(x,y) = g(x)h(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของตัวแปร x และ y

2. ถ้า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องตัวแปรเดียว และ h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของสองตัวแปรแล้วฟังก์ชันประกอบ $f(x,y) = g(h(x,y))$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของตัวแปร x และ y

3. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0) และ k เป็นค่าคงที่ แล้ว

- $f+g,\ f-g,\ kf,\ fg$ จะต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0)
- $\frac{f}{g}$ ต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0) ซึ่ง $g(x_0, y_0) \neq 0$

ตัวอย่าง 1. พหุนาม $p(x,y)$ ของตัวแปร x และ y คือ ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปผลบวกจำกัดของพจน์ที่อยู่ในรูป $Ax^m y^n$ เมื่อ $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $A \in \mathbb{R}$

เช่น $p(x,y) = 5x^5y^2 + 12xy^9 - 37x^{82}y^5 + x + 4y - 6$

ต่อเนื่องที่ทุกจุด $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

2. ฟังก์ชันตรรกยะ $r(x,y)$ ของตัวแปร x และ y คือ ฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปเศษส่วนของสองพหุนาม

นั่นคือ $r(x,y) = \dfrac{p(x,y)}{q(x,y)}$ เมื่อ $p(x,y)$ และ $q(x,y)$

เช่น $r(x,y) = \dfrac{8x^3y^7 + 12x^2y^4 + xy - 2y}{1 - 3y^2 + 7x^2y^2 + 18x^7y}$

ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ซึ่ง $q(x_0, y_0) \neq (0,0)$

3. ฟังก์ชันต่อไปนี้ $3 - 2x^2y + 9x^4y^8$, $e^{xy}\cos(xy^2 + 1)$ และ $(3 + ye^x)^{17}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ตัวอย่าง จงหาเซตย่อยของ $\mathbb{R}^2$ ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x,y) = \ln(2x + y)$ ต่อเนื่อง

วิธีทำ

3.3 อนุพันธ์ย่อย (Partial derivatives)

แนวคิด อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันหลายตัวแปรเทียบกับตัวแปรใด หมายถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งแปรเทียบกับตัวแปรนั้น โดยมองว่า<u>ตัวแปรอื่นเป็นค่าคงตัว</u>

บทนิยาม 3.3.1 ให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของ x และ y

1) อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x ที่จุด (x, y) คือ ฟังก์ชัน

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \qquad (1)$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

2) อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y ที่จุด (x, y) คือ ฟังก์ชัน

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \qquad (2)$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 3.3.1 จะเห็นว่า

ถ้าต้องการหา $\frac{\partial f}{\partial x}$ เราจะให้ y เป็นค่าคงตัว และ

ถ้าต้องการหา $\frac{\partial f}{\partial y}$ เราจะให้ **x** เป็นค่าคงตัว

แล้ว จึงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันของตัวแปร 1 ตัว

สำหรับ**อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันซึ่งมากกว่าสองตัวแปรขึ้นไป** เราก็ให้ตัวแปรหนึ่งเป็นตัวแปรอิสระ ส่วนตัวแปรที่เหลือเป็นค่าคงตัว เช่น อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน n ตัวแปร $f(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)$ เทียบกับ x_k คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f(x_1,\ldots,x_k+\Delta x_k,\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)}{\Delta x_k}$$

จะเห็นว่า $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ เป็นอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x_k โดยที่ตัวแปร x_j เมื่อ j=1,2,...,n และ $j\neq k$ เป็นค่าคงตัว

ค่าของอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x และ y ที่จุด (x_0,y_0) เขียนแทนด้วย $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ หรือ $f_x(x_0,y_0)$

และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ หรือ $f_y(x_0,y_0)$ ตามลำดับ

มีความหมายดังนี้

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\, y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,\, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

ตัวอย่าง 3.3.1 (หน้า 155) กำหนดให้ $f(x,y)=2y^2-3xy$

จงใช้บทนิยาม 3.3.1 หาค่า $\frac{\partial f}{\partial x}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}$

วิธีทำ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2y^2 - 3(x+\Delta x)y] - [2y^2 - 3xy]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3y\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (-3y)$$

$$= (-3y)$$

และ

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[2(y+\Delta y)^2 - 3x(y+\Delta y)] - [2y^2 - 3xy]}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(4y-3x)\Delta y + (\Delta y)^2}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} (4y - 3x + \Delta y)$$

$$= 4y - 3x$$

ตัวอย่าง จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ เมื่อ $f(x,y) = \dfrac{x}{y} \cdot \sin(x^2y^3)$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา f_x และ f_y เมื่อ $f(x,y) = xye^{-x^2}$

วิธีทำ

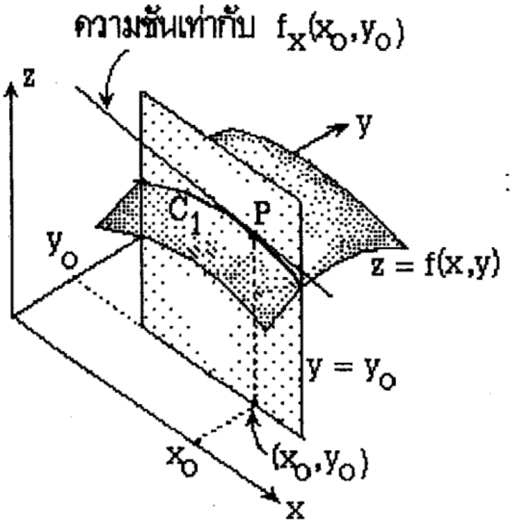
ตัวอย่าง กำหนด $f(x,y)=(1+x^2+y^5)^{\frac{4}{3}}$

จงหา $\frac{\partial f}{\partial x}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}$ ที่จุด (3, 1)

วิธีทำ

ความหมายทางเรขาคณิตของ $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ของ $z = f(x,y)$

ให้ P เป็นจุดบนพื้นผิวที่มีสมการคือ $z = f(x,y)$



ถ้า **ให้ y คงที่**โดย $y = y_0$ และ **ให้ x แปรค่า**

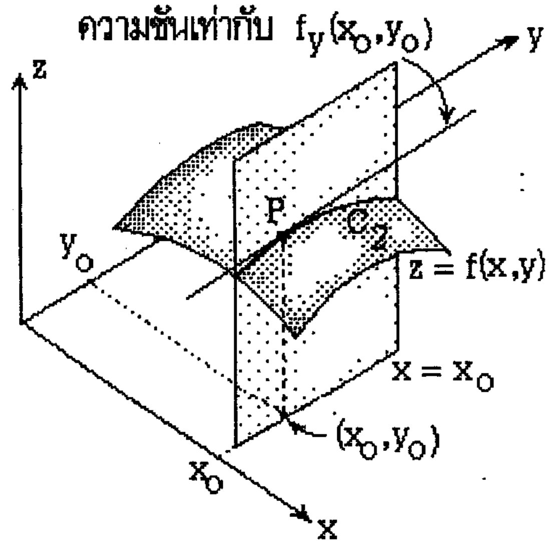
แล้ว P จะเป็นจุดที่เคลื่อนไปตามเส้นโค้ง C_1 ที่เกิดจากการตัดพื้นผิว $z = f(x,y)$ กับระนาบ $y = y_0$

ดังนั้น $f_x(x_0,y_0)$ คือ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C_1 ที่จุด (x_0,y_0) (ซึ่งก็คือ การเปลี่ยนแปลงในค่า z เมื่อ x เพิ่มขึ้นหนึ่งหน่วย)

นั่นคือ $$f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

ความหมายทางเรขาคณิตของ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ของ $z = f(x, y)$



ถ้า **ให้ x คงที่**โดย $x = x_0$ และ**ให้ y แปรค่า**

แล้ว P จะเป็นจุดที่เคลื่อนไปตามเส้นโค้ง C_2 ที่เกิดจากการตัดพื้นผิว $z = f(x, y)$ กับระนาบ $x = x_0$

ดังนั้น $f_y(x_0, y_0)$ คือ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C_2 ที่จุด (x_0, y_0) (ซึ่งก็คือ การเปลี่ยนแปลงในค่า z เมื่อ y เพิ่มขึ้นหนึ่งหน่วย)

นั่นคือ $$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

ตัวอย่าง 3.3.5 (หน้า 157) จุด Q เคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งซึ่งเป็นรอยตัดของทรงกลม $x^2+y^2+z^2=1$ กับระนาบ $x=2/3$ ที่จุด $P\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ z เทียบกับ y มีค่าเท่าไร

วิธีทำ เนื่องจากพิกัด z ของจุด P มีค่าเป็นบวก จะได้ว่าจุดนี้อยู่บนพื้นผิวของครึ่งทรงกลมส่วนบนซึ่งมีสมการ $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ z เทียบกับ y ที่จุดนี้ (เสมือนกับจุด Q เคลื่อนที่ไปตามวงกลมของรอยตัด) คือ $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y)$$

$$=-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

เพราะฉะนั้น $$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)}=-\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}}=-\frac{1}{2}$$

วิธีที่ 2 หา $\frac{\partial z}{\partial y}$ จากฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดยปริยายของทรงกลม $x^2+y^2+z^2=1$ เทียบกับ y และ**พิจารณา z เป็นฟังก์ชันของ x และ y** จะได้

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x^2+y^2+z^2\right]=\frac{\partial}{\partial y}(1)$$

$$2y+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$$

แทนค่าพิกัด y และ z ของจุด $P\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ จะได้

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}=-\frac{(1/3)}{(2/3)}=-\frac{1}{2}$$

ตัวอย่าง 3.3.7 (หน้า 159) เส้นทแยงมุม D ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากำหนดโดย $D=\sqrt{x^2+y^2}$ เมื่อ x และ y เป็นความยาวของด้านประกอบมุมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

(a) จงหาสูตรสำหรับหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ D เทียบกับ x ถ้า x เปลี่ยนแปลงไปขณะที่ y คงที่

(b) สมมุติ y=4 เซนติเมตร จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ D เทียบกับ x ขณะที่ด้าน x ยาว 3 เซนติเมตร

วิธีทำ

(a) $$\frac{\partial D}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}(2x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(b) $$\left.\frac{\partial D}{\partial x}\right|_{(3,4)}=\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{5}$$

อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง (Higher-Order Partial Derivatives)

อนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งของ $z = f(x, y)$ $[f_x(x, y)$ และ $f_y(x, y)]$ ยังคงเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ y

สามารถหาอนุพันธ์ย่อยของ f_x และ f_y เทียบกับ x และเทียบกับ y ได้ เรียกว่า**อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของ f**
ซึ่งมีวิธีหาดังนี้

1) การหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x สองครั้ง

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

2) การหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x ก่อนแล้วจึงเทียบกับ y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

3) การหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y ก่อนแล้วจึงเทียบกับ x

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

4) การหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y สองครั้ง

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

หมายเหตุ อนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ หรือ f_{xy} และ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ หรือ f_{yx} เรียกว่า <u>อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองแบบผสม</u> ซึ่งอาจมีค่าเท่ากันหรือต่างกันก็ได้

ทฤษฎีบท 3.3.1 ให้ f(x, y) เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ย่อยได้ และ $f, \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ และ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ต่างเป็นฟังก์ชันที่มีความ**ต่อเนื่อง**บนบริเวณ R แล้ว $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ทุก ๆ จุด R

โดยการหาอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องกันไปเรื่อย ๆ เราสามารถหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสามหรือสูงกว่าไปเรื่อย ๆ ได้ ตัวอย่างเช่น

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}\right)$$

อนุพันธ์ย่อยอันดับสูงกว่าอันดับหนึ่ง เราสามารถแทนด้วยสัญลักษณ์ที่รัดกุมกว่าด้วยดัชนี (Subscript) ดังนี้

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = (f_x)_y \text{ (เขียน } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy})$$

ข้อสังเกต ในการเขียนสัญลักษณ์ “∂” เราจะหาอนุพันธ์ย่อยเรียงลำดับจากขวาไปซ้าย แต่ในสัญลักษณ์แบบดัชนีล่างเรียงจากซ้ายไปขวา ตัวอย่างเช่น

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f_{yyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, f_{xxyy} = \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}$$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ

$$f(x,y) = \sin(xy) + xe^{y}$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ เมื่อ $w = xy + \dfrac{e^y}{y^2 + 1}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 3.3.10 (หน้า 161) จงแสดงว่า

$$f(x,y)=\arctan\left(\frac{2xy}{x^2-y^2}\right)$$

สอดคล้องกับสมการ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

วิธีทำ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right)^2}\cdot\frac{(x^2-y^2)(2y)-(2xy)(2x)}{(x^2-y^2)^2}$$

$$=\frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}\cdot\frac{2y(x^2-y^2-2x^2)}{(x^2-y^2)^2}$$

$$=\frac{-2y(x^2+y^2)}{x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2y^2}$$

$$=\frac{-2y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{-2y}{x^2+y^2}$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{(2y)(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$ ------ (*)

ทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{2xy}{x^2-y^2}\right)^2}\cdot\frac{(x^2-y^2)(2x)-(2xy)(-2y)}{(x^2-y^2)^2}$$

$$=\frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot\frac{2x(x^2-y^2+2y^2)}{(x^2-y^2)^2}$$

$$=\frac{2x}{x^2+y^2}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$ ------- (**)

นำ (*) + (**) ได้ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

หมายเหตุ 1. สมการ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ ของฟังก์ชัน f(x, y) เรียกว่า **สมการลาปลาซของฟังก์ชันสองตัวแปร** (Laplace's Equation in Function of Two Variables) ส่วน**สมการลาปลาซของฟังก์ชันสามตัวแปร** f(x, y, z) คือ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$

2. ฟังก์ชัน f จะเรียกว่า **ฟังก์ชันฮาร์มอนิก** (Harmonic) ในบริเวณ R ถ้าฟังก์ชันนั้นสอดคล้องกับสมการลาปลาซในบริเวณ R และอนุพันธ์ย่อยอันดับสองเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องใน R

3. ฟังก์ชันในตัวอย่าง 3.3.10 เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก ในระนาบ xy ที่ไม่รวมจุดซึ่งอยู่บนเส้นตรง $y=\pm x$

3.4 กฎลูกโซ่ (Chain rule)

ทบทวน กฎลูกโซ่ในฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร

ทฤษฎีบท กฎลูกโซ่ (Chain Rule)
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้บน (a, b) และ
g เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้บน Range(f)
ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = c$ ในช่วง (a, b) และ
g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(c)$
แล้ว $g \circ f$ หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = c$ และ

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

ถ้าให้ $y = g(x)$ และ $x = f(t)$

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = g'(f(t)) \text{ และ } \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

ดังนั้น $y = g(x) = g(f(t)) = (g \circ f)(t)$

และ $\dfrac{dy}{dt} = (g \circ f)'(t) = g'(f(t)) \cdot f'(t) = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt}$

นั่นคือ $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt}$ -------------------- (*)

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{y} \arrow[d, dash, "\frac{dy}{dx}"] \\
\boxed{x} \arrow[d, dash, "\frac{dx}{dt}"] \\
\boxed{t}
\end{tikzcd}
\qquad
\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}}
$$

สมการ (*) สามารถขยายไปสู่ฟังก์ชันประกอบที่มากกว่าสองฟังก์ชันได้ เช่น ถ้า $y=f(x)$, $x=g(t)$ และ $t=h(s)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ จะได้

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

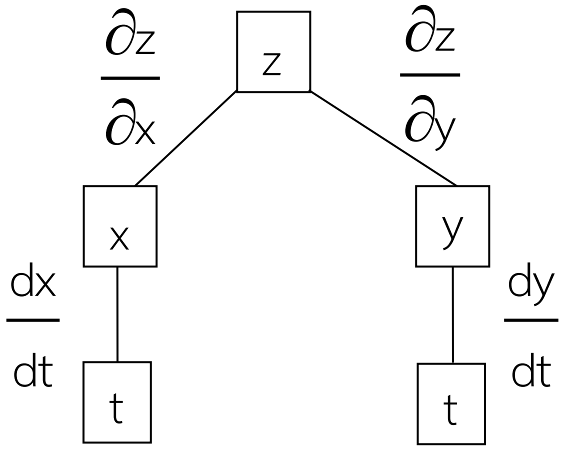
ในหัวข้อนี้เราจะขยายแนวความคิดเกี่ยวกับกฎลูกโซ่ไปสู่ฟังก์ชันสองตัวแปรตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท [กฎลูกโซ่สำหรับตัวแปรเสริม 1 ตัว]
ถ้า $x=x(t)$ และ $y=y(t)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ที่ t ได้
และถ้า $z=f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ย่อยได้ที่ $(x(t), y(t))$
แล้ว $z=f(x(t), y(t))$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ t และ

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

ข้อสังเกต พิจารณาแผนภาพซึ่งมีจุดยอดเป็นตัวแปรตาม z และแตกกิ่งแยกเป็นตัวแปรอิสระ x และ y จากนั้นแตกกิ่งเป็นตัวแปรเสริม t โดยในแต่ละสาขาจะมีอนุพันธ์กำกับไว้ ซึ่งกฎลูกโซ่ได้จากการคูณกันของอนุพันธ์ในแต่ละสาขาและนำทั้งสองสาขามาบวกกันได้เป็น

$$\frac{dz}{dt} = \underset{\text{left branch}}{\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}} + \underset{\text{right branch}}{\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}}$$



ตัวอย่างที่ 3.4.2 (หน้า 164) ให้ $z = x^2 y$ และ $x = t^2, y = t^3$

จงหา $\dfrac{dz}{dt}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง กำหนดให้ $w = \ln(u^2 + v^2)$ และ $u = 1 - x, v = 2x$

จงหา $\dfrac{dw}{dx}$ ที่ $x = 0$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$

เมื่อ $z = e^{xy^2}, x = t\cos t$ และ $y = t\sin t$

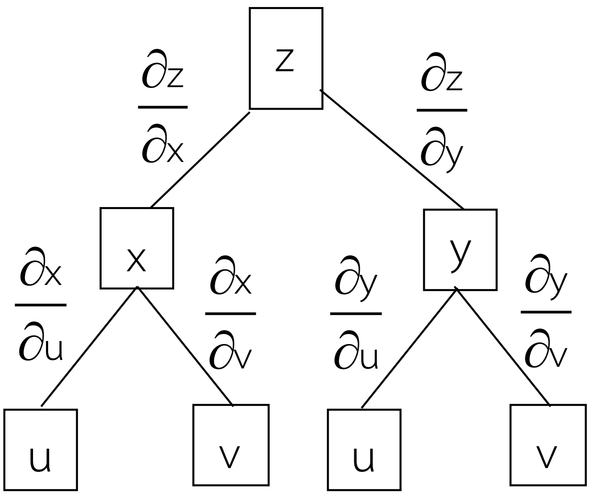
วิธีทำ

ทฤษฎีบท 3.4.2 (กฎลูกโซ่สำหรับตัวแปรเสริมสองตัว)
ให้ $z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x,y) และให้ $x = x(u,v)$ และ $y = y(u,v)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ซึ่ง $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial u}$ และ $\dfrac{\partial y}{\partial v}$ หาค่าได้และต่อเนื่องที่จุด (u,v)
แล้ว ฟังก์ชันประกอบ $z = f(x(u,v), y(u,v))$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด (u,v) และ

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

หมายเหตุ เราสามารถพิจารณาแผนภาพซึ่งมีจุดยอดเป็นตัวแปรตาม z และแตกกิ่งเป็นตัวแปรอิสระ x และ y จากนั้นแตกกิ่งเป็นตัวแปรเสริม u และ v โดยในแต่ละสาขาจะมีอนุพันธ์กำกับไว้ ซึ่งกฎลูกโซ่ได้จากการคูณกันของอนุพันธ์ในแต่ละสาขาและนำทั้งสองสาขามาบวกกันได้เป็น

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$



ตัวอย่าง 3.4.3 จงหา $\frac{\partial z}{\partial u}$ และ $\frac{\partial z}{\partial v}$ ในพจน์ของ u และ v

เมื่อ $z = e^{xy}$ โดยที่ $x = 2u + v$ และ $y = \frac{u}{v}$

วิธีทำ

* **ตัวอย่าง** จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ เมื่อ $z = f(2x + 3y, x - 2y)$

โดยที่ f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้

วิธีทำ

ตัวอย่าง 3.4.5 ถ้า $y = f(x + ct) + g(x - ct)$

จงแสดงว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้สอดคล้องกับ**สมการคลื่นในหนึ่งมิติ**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว --------- (*)

วิธีทำ

เรานำกฎลูกโซ่ไปช่วยแก้ปัญหาเกี่ยวกับ**อัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าฟังก์ชันหลายตัวแปร**เมื่อทราบอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอิสระที่เหลือ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.4.6 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าในขณะที่ด้านยาวมีค่า 15 cm และ ด้านยาวเพิ่มขึ้นด้วย**อัตรา 3 cm/s** ส่วนด้านกว้างมีค่า 6 cm และด้านกว้างเพิ่มขึ้นด้วย**อัตรา 2 cm/s**

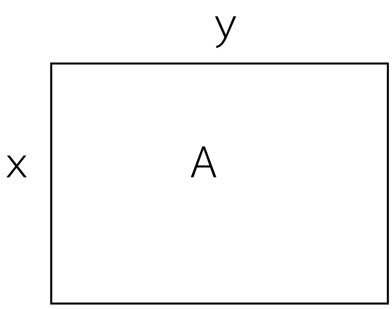
วิธีทำ ขั้นที่ 1 วาดรูปและกำหนดตัวแปร

ให้ x แทน ความยาวของด้านยาว (หน่วย cm)

ให้ y แทน ความยาวของด้านกว้าง (หน่วย cm)

ให้ A แทน พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า (หน่วย cm^2)

ให้ t แทน เวลา (หน่วยวินาที (s))



ในที่นี้โจทย์ให้ $\frac{dx}{dt}=3$ และ $\frac{dy}{dt}=2$ ในขณะที่ x=15, y=6

เราต้องการหา $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{\substack{x=15\\y=6}}$

ขั้นที่ 2 สร้างความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร

สูตรของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า $A=xy$

ขั้นที่ 3 หาอนุพันธ์เทียบกับเวลาทั้งสองข้าง ได้ว่า

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\partial A}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial A}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=y\cdot\frac{dx}{dt}+x\cdot\frac{dy}{dt}$$

ขั้นที่ 4 หาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่เมื่อรูปสี่เหลี่ยมมีความยาว 15 cm และความกว้าง 6 cm

แทนค่า $\frac{dx}{dt}=3, \frac{dy}{dt}=2, x=15$ และ $y=6$ ได้

$$\frac{dA}{dt}=6(3)+15(2)=48$$

นั่นคือ พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 48 cm^2/s ในขณะที่มีความยาว 15 cm และความกว้าง 6 cm

ตัวอย่าง น้ำรั่วออกจากถังรูปกรวยกลมตรงในอัตรา 1 m^3 / min ถ้าถังขยายตัวในลักษณะที่ยังคงเป็นรูปกรวยกลมตรง และผิวน้ำในถังมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวขึ้นในอัตรา 3 m/min

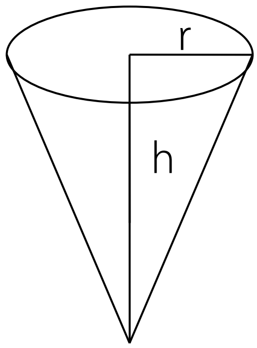
จงหาว่าความสูงของน้ำในถังจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงในอัตราเท่าใด ในขณะที่เส้นผ่านศูนย์กลางของผิวน้ำเท่ากับ 10 m และปริมาตรของน้ำเป็น 75 m^3

วิธีทำ <u>ขั้นที่ 1</u> วาดรูปและกำหนดตัวแปร

ให้ r และ h แทน ความยาวของรัศมีและความสูงของถังรูปกรวยกลมตรงตามลำดับ

V แทน ปริมาตรของถังรูปกรวยกลมตรง

แล้ว $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dh}{dt}$ และ $\frac{dV}{dt}$ แทน อัตราการเปลี่ยนแปลงของความยาวของรัศมี ความสูง และปริมาตรของถังรูปกรวยกลมตรง ตามลำดับ



จากโจทย์เราได้ว่า $\frac{dr}{dt} = \frac{3}{2}$ เมตรต่อนาที และ

$\frac{dV}{dt} = -1$ ลูกบาศก์เมตรต่อนาที

ต้องการหาค่า $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{\substack{r=5 \\ V=75}}$

<u>ขั้นที่ 2</u> สร้างความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร ได้ว่า

จาก $V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$ ดังนั้น $h = \frac{3V}{\pi r^2}$

<u>ขั้นที่ 3</u> หาอนุพันธ์เทียบกับเวลาทั้งสองข้างของความสัมพันธ์ ได้ว่า

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial h}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dt} = \left(-\frac{6V}{\pi r^3}\right) \cdot \frac{dr}{dt} + \left(\frac{3}{\pi r^2}\right) \cdot \frac{dV}{dt}$$

<u>ขั้นที่ 4</u> หาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูงเมื่อ รัศมียาว 5 เมตร และปริมาตรเท่ากับ 75 ลูกบาศก์เมตร

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{\substack{r=5 \\ V=75}} = \left(-\frac{6(75)}{\pi (5)^3}\right)\left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{\pi (5)^2}\right)(-1) = \left(-\frac{138}{25\pi}\right)$$

ดังนั้น ความสูงของถังกรวยกลมตรงลดลงด้วยอัตรา $\frac{138}{25\pi}$ m/min

นอกจากนี้กฎลูกโซ่ยังสามารถนำไปประยุกต์ในการหาอนุพันธ์ของ **ฟังก์ชันโดยปริยาย** (Implicit Function) ได้ดังนี้

ฟังก์ชันโดยชัดแจ้ง $z = f(x, y)$

เมื่อ z เป็นตัวแปรตาม และ x, y เป็นตัวแปรอิสระ

เช่น $z = f(x, y) = x^2 + y^2$

ฟังก์ชันโดยปริยาย เขียนในรูปทั่วไปเป็น $F(x, y) = 0$

ซึ่งไม่ทราบว่า x หรือ y เป็นตัวแปรตามหรือตัวแปรอิสระ

เช่น $x^2 + y^2 + 1 = 0$

แต่ถ้าเราเขียนว่า $F(x, y) = 0$ และ $y = f(x)$

$\Rightarrow$ y เป็นตัวแปรตาม และ x เป็นตัวแปรอิสระ

ทฤษฎีบท 3.4.3 ให้ F(x, y) เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ย่อยได้

และ $F(x,y)=0$

ถ้า y หาอนุพันธ์เทียบกับ x ได้

แล้ว ที่จุดใด ๆ ซึ่ง $F_y \neq 0$ จะได้ $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$

บทพิสูจน์ ให้ $w=F(x,y)=0$

จะได้ $$\frac{dw}{dx}=F_x\cdot\frac{dx}{dx}+F_y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$0=F_x+F_y\cdot\frac{dy}{dx}$$

ดังนั้น $$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

ตัวอย่าง 3.4.7 จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $y^2-x^2-\sin(xy)=0$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $e^x + \sin(xy) = \ln(x + y)$

วิธีทำ

3.5 อนุพันธ์ระบุทิศทาง (Directional derivative)

พิจารณาฟังก์ชัน $z = f(x,y)$ ซึ่งมีกราฟเป็นพื้นผิว ที่ผ่านมาศึกษาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันในทิศทางของแกนหลัก

$\dfrac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow$ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ z ในแนวแกน X

$\dfrac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow$ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ z ในแนวแกน Y

ในหัวข้อนี้ศึกษาการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน**ในทิศทางใด ๆ**

กำหนดให้

- $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดบนโดเมน R
- $P_0(x_0,y_0)$ เป็นจุดใน R
- $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

จะได้ว่า สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(x_0,y_0)$ และขนานกับ **u** คือ

$$x = x_0 + su_1 \quad \text{และ} \quad y = y_0 + su_2$$

เมื่อ s เป็นพารามิเตอร์ที่แทนความยาวจากจุด P_0 ตามทิศทางของเวกเตอร์ **u**

ในลักษณะนี้เราสามารถหาอนุพันธ์ของ $f(x,y)$ ที่จุด $P_0(x_0,y_0)$ ในทิศทางของเวกเตอร์ **u** ได้ตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3.5.1 <u>อนุพันธ์ระบุทิศทาง</u>ของ $f(x,y)$ ที่จุด $P_0(x_0,y_0)$ ในทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}$ เขียนแทนด้วย $\left(\dfrac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0}$ หรือ $(D_u f)_{P_0}$ กำหนดโดย

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0}=\lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1,y_0+su_2)-f(x_0,y_0)}{s}$$

เมื่อลิมิตดังกล่าวหาค่าได้

ตัวอย่าง 3.5.1 จงใช้บทนิยาม 3.5.1 หาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน $f(x,y)=x^2+xy$ ที่จุด $P_0(1,2)$ ในทิศทางของเวกเตอร์ $\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$

วิธีทำ เนื่องจาก $|\mathbf{u}|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$

แสดงว่าเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามบทนิยาม

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0}=\lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1,y_0+su_2)-f(x_0,y_0)}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{f\left(1+s\frac{1}{\sqrt{2}},2+s\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-f(1,2)}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(2+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)-\left(1^2+(1)(2)\right)}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{\left(1+\frac{2s}{\sqrt{2}}+\frac{s^2}{2}\right)+\left(2+\frac{3s}{\sqrt{2}}+\frac{s^2}{2}\right)-3}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{\left(\frac{5s}{\sqrt{2}}+s^2\right)}{s}=\lim_{s\to 0}\left(\frac{5}{\sqrt{2}}+s\right)=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน $f(x,y)=x^2+xy$ ที่จุด $P_0(1,2)$ ในทิศทางของเวกเตอร์ $\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$ เท่ากับ $\frac{5}{\sqrt{2}}$

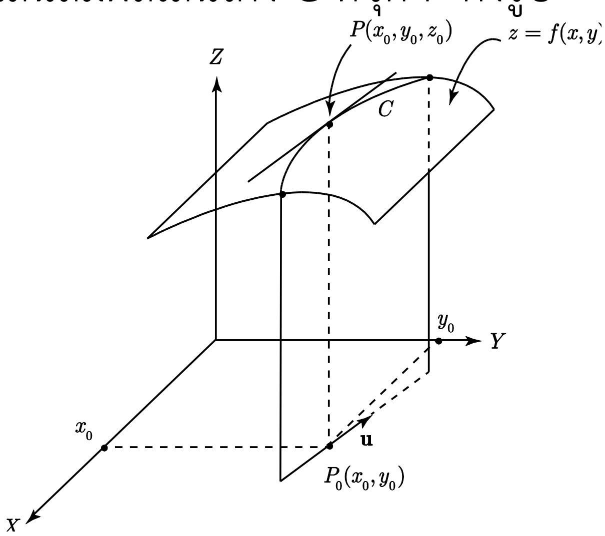
ความหมายทางเรขาคณิตของอนุพันธ์ระบุทิศทาง

กำหนดโดยให้ $z = f(x,y)$ เป็นพื้นผิว S

ถ้า $z_0 = f(x_0, y_0)$ แล้ว จุด $P(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดบนพื้นผิว S

ระนาบที่ตั้งฉากกับระนาบ xy ที่ผ่านจุด $P(x_0, y_0, z_0)$ และ $P_0(x_0, y_0)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ จะตัดกับพื้นผิว S เป็นเส้นโค้ง C

ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f ในทิศทางของเวกเตอร์ **u** จะเป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C ที่จุด P ดังรูป



หมายเหตุ ในกรณีที่ $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับแกน X และแกน Y จะได้ว่า

1. ถ้า $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ แล้ว $\left(\dfrac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = (D_u f)_{P_0} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

2. ถ้า $\mathbf{u} = \mathbf{j}$ แล้ว $\left(\dfrac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = (D_u f)_{P_0} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

ต่อไปพิจารณาการคำนวณอนุพันธ์ระบุทิศทางที่มีประสิทธิภาพโดยใช้ **เกรเดียนต์ (Gradient)** ตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3.5.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ย่อยที่จุด $P_0(x_0, y_0)$ **เกรเดียนต์ของ f ที่จุด** P_0 คือ เวกเตอร์ ∇f อ่านว่า grad f หรือ del f โดยที่

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \mathbf{j}$$

ทฤษฎีบท 3.5.1 ให้ $\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0}$ เป็นอนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ที่จุด $P_0(x_0, y_0)$ ในทิศทางของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ จะได้ว่า

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \mathbf{u}$$

ตัวอย่าง 3.5.3 (หน้า 174) จงใช้เกรเดียนต์หาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน $f(x,y)=xe^{y}+\cos(xy)$ ที่จุด $P_0(2,0)$ ในทิศทางของเวกเตอร์ $\mathbf{v}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}$

วิธีทำ

พิจารณาสมบัติของอนุพันธ์ระบุทิศทางจากการคำนวณโดยใช้เกรเดียนต์ $\left(D_u f\right)_{P_0} = \left(\dfrac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = \left(\nabla f\right)_{P_0} \cdot \mathbf{u}$

โดยการหาอนุพันธ์ระบุทิศทางที่จุด P(x, y) จะได้ว่า

$$\left(D_u f\right) = \left(\nabla f\right) \cdot \mathbf{u} = \left|\nabla f\right| \left|\mathbf{u}\right| \cos\theta = \left|\nabla f\right| \cos\theta$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ ∇f และ $\mathbf{u}$

โดยอาศัยการวิเคราะห์เกี่ยวกับค่าของ θ ในลักษณะต่าง ๆ จะได้สมบัติเกี่ยวกับอนุพันธ์ระบุทิศทางที่สำคัญดังต่อไปนี้

สมบัติของอนุพันธ์ระบุทิศทาง $\left(D_u f\right) = \left(\nabla f\right) \cdot \mathbf{u} = \left|\nabla f\right| \cos\theta$

1. ฟังก์ชัน f จะมีอัตราการเพิ่มมากที่สุด เมื่อ $\cos\theta = 1$ นั่นคือ เมื่อ $\theta = 0$ หรือ ∇f และ $\mathbf{u}$ มีทิศทางเดียวกัน

และ $\left(D_u f\right) = \left(\nabla f\right) \cdot \mathbf{u} = \left|\nabla f\right|$

2. ฟังก์ชัน f จะมีอัตราการลดมากที่สุด เมื่อ $\cos\theta = -1$ นั่นคือ เมื่อ $\theta = 180^\circ$ หรือ ∇f และ $\mathbf{u}$ มีทิศทางตรงกันข้าม

และ $\left(D_u f\right) = \left(\nabla f\right) \cdot \mathbf{u} = -\left|\nabla f\right|$

3. ฟังก์ชัน f จะไม่มีการเปลี่ยนแปลง เมื่อ $\cos\theta = 0$ นั่นคือ เมื่อ $\theta = 90^\circ$ หรือ ∇f และ $\mathbf{u}$ ตั้งฉากกัน

และ $\left(D_u f\right) = \left(\nabla f\right) \cdot \mathbf{u} = 0$

ตัวอย่าง 3.5.4 จงหาทิศทางที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x,y)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$ มีอัตราการเปลี่ยนแปลงดังนี้

1. มีอัตราการเพิ่มมากที่สุดที่จุด (1,1)
2. มีอัตราการลดมากที่สุดที่จุด (1,1)
3. ไม่มีการเปลี่ยนแปลงที่จุด (1,1)

วิธีทำ

ต่อไปพิจารณา**เกรเดียนต์และเส้นสัมผัสเส้นโค้งระดับ**

ให้ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์

และ $f(x,y)=c$ เป็นเส้นโค้งระดับ

ถ้า เส้นโค้งระดับแทนด้วย $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$

แล้ว $f(x(t),y(t))=c$

โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับ t ทั้งสองข้างจะได้

$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t))=\frac{d}{dt}(c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\right)\left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy}{dt}\mathbf{j}\right)=0$$

นั่นคือ $\nabla f\bullet\mathbf{r}'=0$ ------------- (*)

เนื่องจาก $\nabla f\bullet\mathbf{r}'=\left|\nabla f\right|\left|\mathbf{r}'\right|\cos\theta$

และ (*) ได้ว่า $\cos\theta=0$

ดังนั้น มุมระหว่างเวกเตอร์ ∇f และเวกเตอร์สัมผัส $\mathbf{r}'(t)$

คือ $\pi/2=90^\circ$

นั่นคือ ∇f **ตั้งฉากกับเวกเตอร์สัมผัส** $\mathbf{r}'(t)$

สรุปได้ว่า ∇f ตั้งฉากกับเส้นโค้งระดับ $f(x,y)=c$

แสดงว่าที่จุด (x_0,y_0) ใด ๆ โดยพิจารณาว่า $f(x_0,y_0)=c$

ได้ว่า $\nabla f(x_0,y_0)$ **ตั้งฉากกับเส้นโค้งระดับ** $f(x,y)=f(x_0,y_0)$

ตัวอย่าง 3.5.5 (หน้า 176) จงหาสมการเส้นสัมผัสวงรี

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2 \quad \text{ที่จุด } (-2, 1)$$

วิธีทำ

พิจารณาเกรเดียนต์ของ r เมื่อ $r = |\mathbf{r}|$
โดยที่ $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งใด ๆ
จะได้ว่า $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
ดังนั้น

$$\nabla r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{j}\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}\right) = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

นอกจากนี้ถ้าการหาเกรเดียนต์ของผลบวก ผลต่าง ผลคูณ และผลหาร จะมีลักษณะ**เหมือนสมบัติของการหาอนุพันธ์** ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.5.2 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ย่อยได้ และ $k \in \mathbb{R}$ จะได้

1. $\nabla(kf) = k \cdot \nabla f$
2. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
3. $\nabla(f-g) = \nabla f - \nabla g$
4. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
5. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

ทุก x ในโดเมนของ g ซึ่ง $g(x) \neq 0$

หมายเหตุ เราสามารถขยายแนวคิดสู่ฟังก์ชันที่มากกว่าสองตัวแปรได้ พิจารณาให้ f(x, y, z) เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ย่อยได้ และ $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในปริภูมิสามมิติ จะได้ว่า**เกรเดียนต์ของ f** คือ

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot \mathbf{k}$$

และสำหรับอนุพันธ์ระบุทิศทางของ f ในทิศทางของ **u** คือ

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u}} = (\nabla f)\cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot u_3$$

ตัวอย่าง 3.5.7 (หน้า 178) จงหาทิศทางและอัตราการเปลี่ยนแปลงที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$ มีอัตราการเปลี่ยนแปลงดังนี้

1. มีอัตราการเพิ่มมากที่สุดที่จุด (1, 1, 0)
2. มีอัตราการลดมากที่สุดที่จุด (1, 1, 0)

วิธีทำ

3.6 ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม (Total Differential)

บทนิยาม 3.6.1 ให้ f(x, y) เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ (x_0, y_0) เรียก $df(x_0, y_0)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ Δx และ Δy ซึ่งนิยามโดย

$$df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

ว่า**ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม**ของ f(x, y) ที่จุด (x_0, y_0)

- $f(x,y) = x \Rightarrow f_x(x,y) = 1$ และ $f_y(x,y) = 0$

$$\Rightarrow df(x,y)(\Delta x, \Delta y) = \Delta x$$

$$\Rightarrow dx = \Delta x$$

- $f(x,y) = y \Rightarrow f_x(x,y) = 0$ และ $f_y(x,y) = 1$

$$\Rightarrow df(x,y)(\Delta x, \Delta y) = \Delta y$$

$$\Rightarrow dy = \Delta y$$

ถ้าพิจารณาที่จุด (x, y) ใด ๆ ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม จะได้เป็น

$$df(x,y) = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

หรือ $$df = f_x dx + f_y dy$$

ตัวอย่าง 3.6.1 (หน้า 180) จงหาส่วนเปลี่ยนแปลงและผลต่างเชิงอนุพันธ์รวมของฟังก์ชัน $f(x,y)=x^2+3xy-y^2$ ที่ $x=2, y=3$ โดยที่ $\Delta x=0.05$ และ $\Delta y=-0.04$

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 หาส่วนเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)\\ &= f(2+0.05,\ 3-0.04) - f(2,\ 3)\\ &= f(2.05,\ 2.96) - f(2,\ 3)\\ &= \left[(2.05)^2+3(2.05)(2.96)-(2.96)^2\right]\\ &\qquad -\left[(2)^2+3(2)(3)-(3)^2\right]\\ &= 0.6449\end{aligned}$$

ขั้นที่ 2 หา $df(x,y)=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy$

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+3xy-y^2)=\text{......................}$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+3xy-y^2)=\text{......................}$$

$$df(x,y)(\Delta x,\Delta y)=\text{..}$$

$$df(2,3)(0.05,-0.04)=\text{..}$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 3.6.1 จะเห็นว่า $\Delta f \approx df$

สามารถนิยามผลต่างเชิงอนุพันธ์รวมของฟังก์ชัน 3 ตัวแปร หรือมากกว่า 3 ตัวแปร ได้ดังนี้

บทนิยาม 3.6.2 ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวมของ w = f(x, y, z) คือ

$$dw = df = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot dz$$

และ ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวมของ $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ คือ

$$dz = df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot dx_n$$

ตัวอย่าง กำหนด $w = e^{x^2+y^2}\sin^2 z$ จงหา dw

วิธีทำ $\frac{\partial}{\partial x}(e^{x^2+y^2}\sin^2 z) =$ ....

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^{x^2+y^2}\sin^2 z) = \text{...}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(e^{x^2+y^2}\sin^2 z) = \text{...}$$

ดังนั้น $dw = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot dz$

$$= \text{...}$$

หมายเหตุ บางครั้งเรียก Δw ว่า**ความคลาดเคลื่อนของ w**
เรียก $\dfrac{\Delta w}{w}$ ว่า**ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของ w** และ
เรียก $\dfrac{\Delta w}{w} \times 100$ ว่า**เปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนของ w**

ตัวอย่าง 3.6.3 (หน้า 181) สมมุติความคลาดเคลื่อนของการวัดขนาดของกล่องสี่เหลี่ยมเป็น ± 0.1 มิลลิเมตร ขนาดของกล่องเป็น $x = 50$เซนติเมตร $y = 20$ เซนติเมตร และ $z = 15$ เซนติเมตร จงใช้ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวมประมาณ**ค่าการเปลี่ยนแปลง**ของปริมาตร และ**ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์**ของปริมาตร

วิธีทำ ให้ปริมาตรของกล่องกำหนดโดย $V = xyz$ ดังนั้น

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial V}{\partial z} \bullet dz$$

$$= \text{..}$$

จาก 0.1 mm $= 0.01$ cm และ $dx = dy = dz = \pm 0.01$ จะได้

$$\begin{aligned}
\Delta V &\approx dV \\
&= (20)(15)(\pm 0.01) + (50)(15)(\pm 0.01) + (50)(20)(\pm 0.01) \\
&= 300(\pm 0.01) + 750(\pm 0.01) + 1000(\pm 0.01) \\
&= 2050(\pm 0.01) \\
&= \pm 20.5 \quad \text{ลูกบาศก์เซนติเมตร}
\end{aligned}$$

ปริมาตรของกล่อง คือ $V = (50)(20)(15) = 15{,}000$ ลบ.ซม.

ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $\dfrac{\Delta V}{V}$ ประมาณค่าโดย

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{20.5}{15000} \approx 0.0014$$

เปอร์เซ็นต์ของความคลาดเคลื่อนของ V คือ

$$\frac{\Delta V}{V} \times 100 = \frac{20.5}{15000} \times 100 \approx 0.14$$

หมายเหตุ เราสามารถนำผลต่างอนุพัทธ์รวมมาใช้**หาค่าประมาณ**ของฟังก์ชันสองตัวแปรหรือมากกว่า 2 ตัวได้ ในทำนองเดียวกับใช้ผลต่างอนุพัทธ์รวมหาค่าประมาณและค่าความคลาดเคลื่อนของฟังก์ชันที่มีตัวแปร 1 ตัว

สำหรับฟังก์ชันสองตัวแปร

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + dz$$

สำหรับฟังก์ชันสามตัวแปร

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \approx f(x, y, z) + dw$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x,y)=\sqrt{9x^2+y^2}$

จงใช้ผลต่างอนุพัทธ์รวมประมาณค่า $f(0.98,4.04)$

วิธีทำ ให้ $(x,y)=(1,4)$ และ

$(x+\Delta x,y+\Delta y)=(0.98,4.04)=(1-0.02,4+0.04)$

นั่นคือ $dx=\Delta x=-0.02$ และ $dy=\Delta y=0.04$

ผลต่างอนุพัทธ์รวม คือ

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y=\left(\frac{9x}{\sqrt{9x^2+y^2}}\right)\Delta x+\left(\frac{y}{\sqrt{9x^2+y^2}}\right)\Delta y$$

เมื่อแทนค่า $x=1,\ y=4,\ \Delta x=-0.02$ และ $\Delta y=0.04$ ได้

$$dz=\left(\frac{9(1)}{\sqrt{9(1)^2+(4)^2}}\right)(-0.02)+\left(\frac{4}{\sqrt{9(1)^2+(4)^2}}\right)(0.04)=(-0.004)$$

เนื่องจาก

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+dz$$

ดังนั้น

$$f(0.98,4.04)\approx f(1,4)+(-0.004)$$

$$=\sqrt{9(1)^2+(4)^2}-0.004$$

$$=5-0.004=4.996$$

นั่นคือ $f(0.98,4.04)\approx 4.996$

3.7 ระนาบสัมผัส และเส้นแนวฉาก

ให้ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง C ในปริภูมิสามมิติ
ถ้า C มีเวกเตอร์สัมผัสหน่วย **t** และเวกเตอร์แนวฉากหน่วย **n** ที่จุด P_0 แล้ว จะเรียก

1. เส้นตรงที่ผ่านจุด P_0 และขนานกับเวกเตอร์ **t** ว่า**เส้นสัมผัสของเส้นโค้ง C ที่จุด P_0**
2. เส้นตรงที่ผ่านจุด P_0 และขนานกับเวกเตอร์ **n** ว่า**เส้นแนวฉากของเส้นโค้ง C ที่จุด P_0**

บทนิยาม 3.7.1 ให้ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดอยู่บนพื้นผิว S และ

1. ถ้าเส้นโค้งเรียบทุกเส้นบน S ที่ผ่านจุด P_0 มีเส้นสัมผัส ณ จุด P_0 อยู่บนระนาบเดียวกันทั้งหมด จะเรียกระนาบนั้นว่า**ระนาบสัมผัส** (Tangent Plane) **ของพื้นผิว S ที่จุด P_0**

และ 2. เรียกเส้นตรงที่ผ่านจุด P_0 และตั้งฉากกับระนาบสัมผัสว่า **เส้นแนวฉาก** (Normal Line) **ของพื้นผิว S ที่จุด P_0**

ทฤษฎีบท 3.7.1 ให้ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ เป็นจุดบนพื้นผิว $z = f(x, y)$
ถ้า f(x, y) เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด (x_0, y_0)
แล้ว พื้นผิวจะมีระนาบสัมผัสที่จุด P_0

และระนาบสัมผัสมีสมการเป็น

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

ยิ่งกว่านั้น

1. เวกเตอร์ $\mathbf{n} = \left\langle f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1 \right\rangle$

   เป็น**เวกเตอร์แนวฉากของพื้นผิวที่จุด P_0** และ

2. **สมการของเส้นแนวฉากของพื้นผิวที่จุด P_0** เป็น

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

ตัวอย่าง 3.7.1 (หน้า 138) จงหาสมการของระนาบสัมผัส และสมการของเส้นแนวฉากของพื้นผิว $z = x^2 + y^2$ ที่จุด (1, -2, 5)

วิธีทำ สมการระนาบสัมผัส คือ

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

สมการของเส้นแนวฉาก คือ

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

$f_x(x, y) =$ .... $\Rightarrow f_x(1, -2) =$ ....

$f_y(x, y) =$ .... $\Rightarrow f_y(1, -2) =$ ....

ดังนั้น **สมการระนาบสัมผัส**ที่จุด (1, -2, 5) คือ

$$f_x(1, -2)(x - 1) + f_y(1, -2)(y - (-2)) - (z - 5) = 0$$

....

และ**สมการของเส้นแนวฉาก**ของพื้นผิวที่จุด (1, -2, 5) คือ

$$\frac{x - 1}{f_x(1, -2)} = \frac{y - (-2)}{f_y(1, -2)} = \frac{z - 5}{-1}$$

....

ถ้าพื้นผิวในปริภูมิสามมิติ กำหนดโดย $F(x,y,z)=0$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันโดยปริยาย โดยที่ z เป็นฟังก์ชันของ x และ y จะได้

$$f_x=-\frac{F_x}{F_z},\quad f_y=-\frac{F_y}{F_z}$$

เพราะฉะนั้น **สมการของระนาบสัมผัสพื้นผิว** $F(x,y,z)=0$ ที่จุด $P_0(x_0,y_0,z_0)$ คือ

$$-\frac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)-\frac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

หรือ

$$\begin{aligned}F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)\\ +F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน **สมการของเส้นแนวฉากของพื้นผิว** $F(x,y,z)=0$ ที่จุด $P_0(x_0,y_0,z_0)$ คือ

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

โดยที่เวกเตอร์ $\mathbf{n}=\left\langle F_x(x_0,y_0,z_0), F_y(x_0,y_0,z_0), F_z(x_0,y_0,z_0)\right\rangle$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากของพื้นผิว $F(x,y,z)=0$ ที่จุด $P_0(x_0,y_0,z_0)$

ตัวอย่าง 3.7.2 จงหาสมการของระนาบสัมผัสและสมการของ

เส้นแนวฉากของพื้นผิวทรงรี $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$ ที่จุด (-2, 1, -3)

วิธีทำ ให้ $F(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}-3=0$ จะได้

$F_x=$........................... $\Rightarrow$ $F_x(-2,1,-3)=$...................

$F_y=$........................... $\Rightarrow$ $F_y(-2,1,-3)=$...................

$F_z=$........................... $\Rightarrow$ $F_z(-2,1,-3)=$...................

สมการของระนาบสัมผัสของพื้นผิวของทรงรีที่จุด (-2, 1, -3) คือ

$$F_x(-2,1,\ -3)(x-(-2))+F_y(-2,1,\ -3)(y-1)$$
$$+F_z(-2,1,\ -3)(z-(-3))=0$$

นั่นคือ ....

สมการของเส้นแนวฉากของพื้นผิวทรงรีที่จุด (-2, 1, -3) คือ

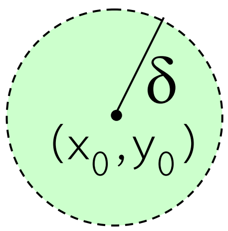
$$\frac{x-(-2)}{F_x(-2,1,\ -3)}=\frac{y-1}{F_y(-2,1,\ -3)}=\frac{z-(-3)}{F_z(-2,1,\ -3)}$$

นั่นคือ ....

3.8 ค่าสุดขีดและการประยุกต์ปัญหาค่าสุดขีด

บทนิยาม ย่านจุด (x_0, y_0) คือ เซตของจุด (x, y) ที่มีระยะห่างจากจุด (x_0, y_0) ภายในระยะ δ ที่กำหนด เขียนแทนด้วย $N_\delta(x_0, y_0)$ นั่นคือ

$$N_\delta(x_0, y_0) = \left\{(x,y) : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\right\}$$



$N_\delta(x_0, y_0)$

บทนิยาม 3.8.1 ให้ f(x, y) เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร

1. **f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** หรือ**มีค่าต่ำสุดเฉพาะที่** (Relative Minimum or Local Minimum) ที่ (x_0, y_0) ถ้า $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$ สำหรับทุก (x, y) ที่อยู่ในย่านจุด (x_0, y_0) และเรียก $f(x_0, y_0)$ ว่า**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** (Relative Minimum Value)

2. **f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์** หรือ**มีค่าสูงสุดเฉพาะที่** (Relative Maximum or Local Maximum) ที่ (x_0, y_0) ถ้า $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$ สำหรับทุก (x, y) ที่อยู่ในย่านจุด (x_0, y_0) และเรียก $f(x_0, y_0)$ ว่า**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์** (Relative Minimum Value)

หมายเหตุ ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดเรียกรวมกันว่า**ค่าสุดขีด** (Extreme Value)

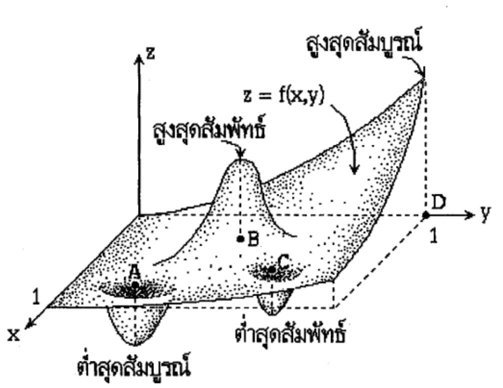
บทนิยาม 3.8.2 ให้ f(x, y) เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และ

ให้ D_f แทนโดเมนของฟังก์ชัน f

1. **f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์** (Absolute Minimum) ที่ (x_0, y_0) ถ้า $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$ สำหรับทุก $(x,y) \in D_f$

2. **f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์** (Absolute Maximum) ที่ (x_0, y_0) ถ้า $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$ สำหรับทุก $(x,y) \in D_f$

รูปต่อไปนี้แสดงกราฟของ f ซึ่งมีโดเมนเป็นบริเวณสี่เหลี่ยมจัตุรัสปิดในระนาบ xy ซึ่งจุดในโดเมนสอดคล้องกับอสมการ $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$

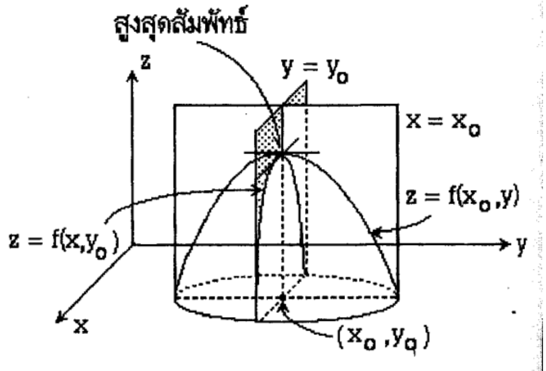


- ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด A และ C
- ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด C
- ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่จุด A
- ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่จุด D

สมมติให้ f(x, y) มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด (x_0, y_0) และอนุพันธ์ย่อยของ f หาค่าได้ที่จุด (x_0, y_0)

แล้ว เส้นรอยตัดของพื้นผิว $z = f(x,y)$ บนระนาบ $x = x_0,\ y = y_0$ มีเส้นสัมผัสที่ (x_0, y_0) อยู่ตามแกนนอน

ดังนั้น $f_x(x_0, y_0) = 0$ และ $f_y(x_0, y_0) = 0$



ข้อสรุปนี้ยังคงจริงกับกรณีที่ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด (x_0, y_0) และได้ผลดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.8.1 ถ้า f(x, y) มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หรือค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด (x_0, y_0) และอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ f(x, y) หาค่าได้ แล้ว $f_x(x_0, y_0) = 0$ และ $f_y(x_0, y_0) = 0$

บทนิยาม 3.8.3 ให้ f(x, y) เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร
(x_0, y_0) เป็น**จุดวิกฤต** (Critical Point) ของ f(x, y)
ถ้า $f_x(x_0, y_0) = 0$ และ $f_y(x_0, y_0) = 0$ หรือ อนุพันธ์ย่อยใดอนุพันธ์ย่อยหนึ่งหรือทั้งสองหาค่าไม่ได้ที่จุด (x_0, y_0)

ตัวอย่าง 3.8.1 (หน้า 186) จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

$$f(x,y)=x^2+y^2-2x-6y+14$$

วิธีทำ

<u>ขั้นที่ 1</u> คำนวณอนุพันธ์ย่อย

$f_x(x,y)=$................................., $f_y(x,y)=$....................................

<u>ขั้นที่ 2</u> หาจุดวิกฤต โดยแก้ระบบสมการ

$$f_x(x,y)=0 \text{ และ } f_y(x,y)=0$$

<u>ขั้นที่ 3</u> ตรวจสอบประเภทของค่าสุดขีด (ต่ำสุด/สูงสุด)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2+y^2-2x-6y+14 \\ &= (x-1)^2+(y-3)^2+4 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $(x-1)^2 \geq 0$ และ $(y-3)^2 \geq 0$

ดังนั้น $f(x,y) \geq 4$ ทุก (x, y)

เนื่องจาก $f(1,3)=(1-1)^2+(3-3)^2+4=4$

นั่นคือ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(1,3)=4$

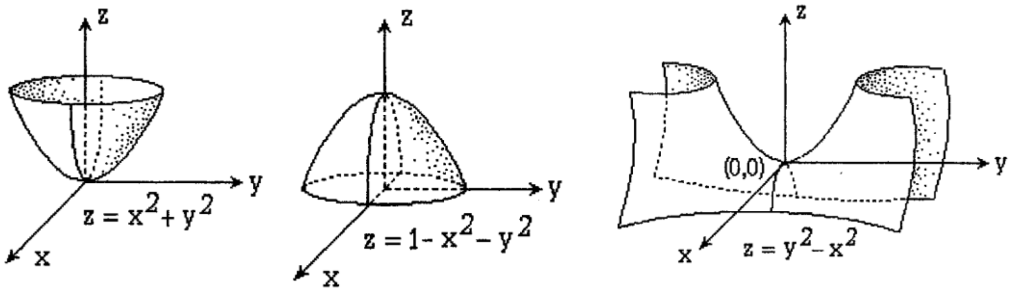
ตัวอย่าง จงพิจารณากราฟของฟังก์ชัน

$$z = f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$z = g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$

$$z = h(x,y) = y^2 - x^2$$

ดังรูป



มีอนุพันธ์ย่อยดังนี้

$$f_x(x,y) = 2x, \qquad f_y(x,y) = 2y$$

$$g_x(x,y) = -2x, \quad g_y(x,y) = -2y$$

$$h_x(x,y) = -2x, \quad h_y(x,y) = 2y$$

ทั้งสามฟังก์ชันมีอนุพันธ์ย่อยทั้งหมดเป็นศูนย์ที่จุด (0, 0)
ดังนั้น (0, 0) เป็นจุดวิกฤตสำหรับทุกฟังก์ชัน

f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด (0, 0)

g มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด (0, 0)

แต่ h <u>ไม่มีทั้งค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์</u>ที่จุด(0, 0)

สังเกตว่าสำหรับทุกย่านจุด (0, 0) ใน $\mathbb{R}^2$

จะมี จุดที่ h(x, y) เป็นบวก (จุดบนแกน Y) และ

จุดที่ h(x, y) เป็นลบ (จุดบนแกน X)

ดังนั้น $h(0,0) = 0$ จึงไม่เป็นทั้งค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของ h(x, y) ในย่านจุด (0, 0)

บทนิยาม 3.8.4 ให้ (x_0, y_0) เป็นจุดวิกฤตของ f(x, y)
เรียก (x_0, y_0) ว่า**จุดอานม้า** (Saddle Point) ของ f(x, y)
ถ้า (x_0, y_0)ไม่ได้ให้ค่าสุดขีดของ f(x, y)

ดังนั้น จุด (0, 0) เป็นจุดอานม้าของฟังก์ชัน $h(x,y) = y^2 - x^2$

ทฤษฎีบท 3.8.2 สมมติให้อนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ f(x, y) ต่อเนื่องในย่านจุดวิกฤต (x_0, y_0) ให้

$$D = D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - \left[f_{xy}(x_0, y_0) \right]^2$$

1. ถ้า $D > 0$ และ $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$
   แล้ว $f(x_0, y_0)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
2. ถ้า $D > 0$ และ $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$
   แล้ว $f(x_0, y_0)$เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์
3. ถ้า $D < 0$ แล้ว $f(x_0, y_0)$ ไม่เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือ
   ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ นั่นคือ f(x, y) มีจุดอานม้าที่จุด (x_0, y_0)
4. ถ้า $D = 0$ แล้ว ไม่สามารถสรุปเกี่ยวกับจุดวิกฤตได้

หมายเหตุ 1. สำหรับกรณีที่ $D > 0$
แล้ว $f_{xx}(x_0, y_0)$ และ $f_{yy}(x_0, y_0)$ จะมีเครื่องหมายเหมือนกัน
เราจึงสามารถแทน $f_{xx}(x_0, y_0)$ ในทฤษฎีบท 3.8.2 ด้วย
$f_{yy}(x_0, y_0)$ ในการทดสอบส่วนหลังได้

2. เพื่อความสะดวกในการจำสูตรของ D ให้พิจารณาหาค่า

ตัวกำหนดของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ดังนี้

$$D(x_0,y_0)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

เมื่อ $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$

ตัวอย่าง จงหาตำแหน่งที่เกิดค่าสุดขีดสัมพัทธ์หรือจุดอานม้าของฟังก์ชัน $f(x,y)=4xy-x^4-y^4$

วิธีทำ

<u>ขั้นที่ 1</u> หาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งและอันดับที่สอง

$$f_x(x,y)=4y-4x^3, \qquad f_y(x,y)=4x-4y^3$$

$$f_{xx}(x,y)=-12x^2, \qquad f_{yy}(x,y)=-12y^2$$

และ $f_{xy}(x,y)=4$

<u>ขั้นที่ 2</u> หาค่าจุดวิกฤต

เนื่องจาก $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามหาค่าได้ทุกจุด (x,y)ในระนาบ xy

ดังนั้น จุดวิกฤตเกิดที่ $f_x(x,y)=0$ และ $f_y(x,y)=0$

นั่นคือ

$$f_y(x,y)=4y-4x^3=0 \qquad (1)$$

$$f_x(x,y)=4x-4y^3=0 \qquad (2)$$

จากสมการ (1) ได้ $x=y^3$ (3)

แทน (3) ใน (1) ได้ $4y-4(y^3)^3=0$

$$4y-4y^9=0$$

$$4y(1-y^8)=0$$

$$y=-1,\ 0,\ 1$$

แทนค่า y ลงใน (3) ได้จุดวิกฤต คือ $(-1,-1)$, $(0,0)$ และ $(1,1)$

<u>ขั้นที่ 3</u> คำนวณค่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองและ หาค่า D ที่จุดวิกฤต

$$D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}^2(x,y)=(-12x^2)(-12y^2)-(4)^2$$

จุดวิกฤต	$f_{xx}(x,y)$	$f_{yy}(x,y)$	$f_{xy}(x,y)$	$D(x,y)$
$(-1,-1)$	-12	-12	4	128
$(0,0)$	0	0	4	-16
$(1,1)$	-12	-12	4	128

- ที่จุด $(-1,-1)$ และ $(1, 1)$ มีค่า $D > 0$ และ $f_{xx} < 0$

ได้ว่า จุด $(-1,-1)$ และ $(1, 1)$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ เท่ากับ

$$f(-1,-1) = 4(-1)(-1) - (-1)^4 - (-1)^4 = 4 - 1 - 1 = 2$$

และ $f(1,1) = 4(1)(1) - (1)^4 - (1)^4 = 4 - 1 - 1 = 2$

- ที่จุด $(0, 0)$ มีค่า $D(0,0) < 0$ ได้ว่า จุด $(0, 0)$ เป็นจุดอานม้า

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงความไม่สมบูรณ์ของทฤษฎีบท 3.8.2

ตัวอย่าง จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ $f(x,y) = x^2y^2$

วิธีทำ

<u>ขั้นที่ 1</u> หาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งและอันดับที่สอง

$$f_x(x,y) = 2xy^2,\ f_y(x,y) = 2x^2y,\quad f_{xx}(x,y) = 2y^2,$$

$$f_{yy}(x,y) = 2x^2 \qquad \text{และ} \qquad f_{xy}(x,y) = 4xy$$

<u>ขั้นที่ 2</u> หาค่าจุดวิกฤต

เนื่องจาก $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามหาค่าได้ทุกจุด (x, y) ในระนาบ xy

ดังนั้น จุดวิกฤตเกิดที่ $f_x(x,y) = 0$ และ $f_y(x,y) = 0$

นั่นคือ

$$f_x(x,y) = 2xy^2 = 0 \qquad (1)$$

$$f_y(x,y) = 2x^2y = 0 \qquad (2)$$

จากสมการ (1) และสมการ (2) ได้ว่า

$$f_x(x,y) = 0 \text{ และ } f_y(x,y) = 0 \text{ เมื่อ } x = 0 \text{ หรือ } y = 0$$

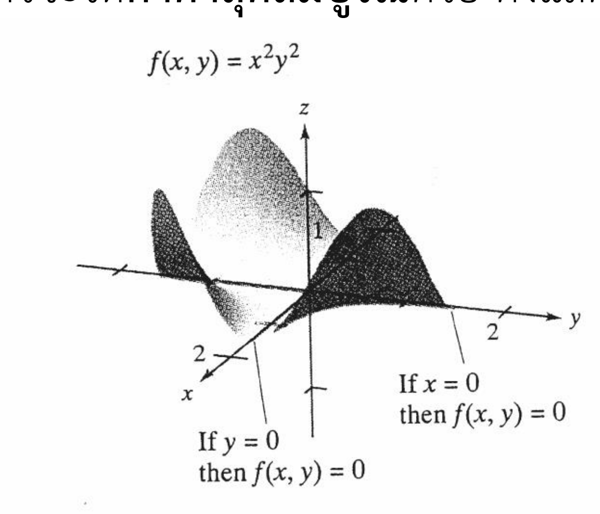
นั่นคือ จุดวิกฤต คือ จุดทุกจุดบนแกน X และจุดทุกจุดบนแกน Y

ขั้นที่ 3 คำนวณค่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองและ
หาค่า D ที่จุดวิกฤต

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y) = (2y^2)(2x^2) - (4xy)^2 = 0$$

ได้ว่า $D(x,y) = 0$ ที่จุดวิกฤตซึ่งอยู่บนแกน X หรือบนแกน Y
ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.8.2 ไม่สามารถสรุปเกี่ยวกับจุดวิกฤตได้
อย่างไรก็ตาม เนื่องจาก

- $f(x,y) = 0$ ทุกจุดบนแกน X และทุกจุดบนแกน Y
- $f(x,y) = x^2y^2 > 0$ สำหรับจุดอื่น ๆ บนระนาบ xy
- สรุปได้ว่า จุดวิกฤตทุกจุดให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
- ซึ่งจุดดังกล่าวจะให้**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์**ด้วย ดังแสดงในรูป



รูปแสดงค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน $f(x,y) = x^2y^2$

ทฤษฎีบท 3.8.3 ถ้า f(x, y) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตปิดและมีขอบเขต R ใน $\mathbb{R}^2$

แล้ว จะมีจุด(x_1,y_1) และ (x_2,y_2)ใน R ซึ่ง f(x, y) จะมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ $f(x_1,y_1)$ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ $f(x_2,y_2)$

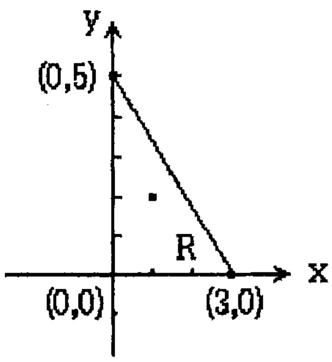
ขั้นตอนการหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์

1. หาจุดวิกฤตของ f ที่อยู่ภายในบริเวณเซต R
2. หาจุดขอบเขตทั้งหมดที่สามารถเกิดค่าสุดขีดสัมบูรณ์
3. คำนวณ $f(x,y)$ ที่จุดที่หาได้ในขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2

ค่าที่มากที่สุดจะเป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

และค่าที่น้อยที่สุดจะเป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ตัวอย่าง จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ $f(x,y) = 3xy - 6x - 3y + 7$ บนบริเวณ R ที่เป็นสามเหลี่ยมปิด ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ (0, 0), (3, 0) และ (0, 5)



วิธีทำ

<u>ขั้นที่ 1</u> หาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งได้ดังนี้

$$f_x(x,y) = 3y - 6 \quad \text{และ} \quad f_y(x,y) = 3x - 3$$

<u>ขั้นที่ 2</u> หาค่าจุดวิกฤต

เนื่องจาก $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$ หาค่าได้ทุกค่า (x, y)

ดังนั้น จุดวิกฤตจะเกิดที่ $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$

$$f_x(x,y) = 3y - 6 = 0 \qquad (1)$$

$$f_y(x,y) = 3x - 3 = 0 \qquad (2)$$

จากสมการ (1) เราได้ $y = 2$

และ จากสมการ (2) เราได้ $x = 1$

ดังนั้น จุดวิกฤต คือ จุด (1,2)

<u>ขั้นที่ 3</u> หาจุดบนขอบเขตของ R สามารถให้ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ได้

ขอบเขตของ R ประกอบด้วยเส้นตรง 3 เส้น

ซึ่งจะแยกคิดทีละเส้น ดังนี้

3.1) เส้นตรงที่เชื่อมจุด (0, 0) และจุด (3, 0)

เส้นตรงมีสมการคือ $y = 0$

เขียน $f(x,y)$ ในรูปของฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงตัวเดียว คือ

$$u(x) = f(x,0) = -6x + 7,\ 0 \le x \le 3$$

เนื่องจาก $u'(x) = -6 \ne 0$ สำหรับทุก $x \in [0,3]$

ดังนั้น $u(x)$ จึงไม่มีจุดวิกฤต

ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ $u(x)$ จะเกิดที่จุดปลาย $x = 0$ และ $x = 3$ ซึ่งคือจุด (0, 0) และจุด (3, 0)

3.2) เส้นตรงที่เชื่อมจุด (0, 0) และจุด (0, 5)

เส้นตรงมีสมการคือ $x = 0$

เขียน $f(x,y)$ ในรูปของฟังก์ชันของตัวแปร y เพียงตัวเดียว คือ

$$v(y) = f(0,y) = -3y + 7,\ 0 \leq y \leq 5$$

เนื่องจาก $v'(y) = -3 \neq 0$ สำหรับทุก $y \in [0,5]$

ดังนั้น $v(y)$ จึงไม่มีจุดวิกฤต

ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ $v(y)$ จะเกิดที่จุดปลาย $y = 0$ และ $y = 5$ ซึ่งคือจุด $(0,0)$ และจุด $(0,5)$

3.3) เส้นตรงที่เชื่อมจุด (3, 0) และจุด (0, 5)

เส้นตรงมีความชันคือ $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0-5}{3-0} = \left(-\dfrac{5}{3}\right)$

และ มีสมการเส้นตรงคือ $y - 5 = -\dfrac{5}{3}(x-0)$

นั่นคือ $\quad y = -\dfrac{5}{3}x + 5$

เขียน $f(x,y)$ ในรูปของฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงตัวเดียว คือ

$$\begin{aligned}
w(x) &= f\left(x, -\frac{5}{3}x + 5\right) \\
&= 3x\left(-\frac{5}{3}x + 5\right) - 6x - 3\left(-\frac{5}{3}x + 5\right) + 7 \\
&= -5x^2 + 14x - 8
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $w'(x) = -10x + 14 = 0$ เมื่อ $x = \dfrac{7}{5}$

ซึ่งทำให้เกิดจุดวิกฤตคือจุด $\left(\dfrac{7}{5}, \dfrac{8}{3}\right)$

ค่าสุดขีดของ $w(x)$ จะเกิดที่จุด $x=\frac{7}{5}$ หรือจุดปลาย $x=0$ และ $x=3$ ซึ่งคือจุด $\left(\frac{7}{5},\frac{8}{3}\right),(3,0)$ และจุด $(0,5)$

<u>ขั้นที่ 4</u> คำนวณค่า $f(x,y)$ ที่จุดวิกฤตใน R และที่จุดบนขอบเขตที่ค่าสุดขีดสัมบูรณ์สามารถเกิดขึ้นได้

(x,y)	$(0,0)$	$(3,0)$	$(0,5)$	$\left(\frac{7}{5},\frac{8}{3}\right)$	$(1,2)$
$f(x,y)$	7	-11	-8	$\frac{9}{5}$	1

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x,y)$ คือ $f(0,0)=7$ และ
ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ $f(x,y)$ คือ $f(3,0)=-11$

เราสามารถประยุกต์ค่าสุดขีดของฟังก์ชันสองตัวแปรได้ในทำนองเดียวกับการประยุกต์ค่าสุดขีดของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร

ตัวอย่าง จงหาขนาดของกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าเปิดฝาด้านบน มีปริมาตร 32 ลูกบาศก์ฟุต ซึ่งใช้**วัสดุในการทำกล่องในปริมาณที่น้อยที่สุด**

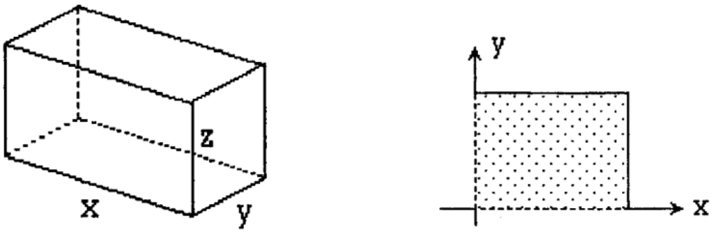
วิธีทำ กำหนดให้

x แทน ความยาวของกล่อง (ฟุต)

y แทน ความกว้างของกล่อง (ฟุต)

z แทน ความสูงของกล่อง (ฟุต)

S แทน พื้นที่ผิวของกล่อง (ตารางฟุต)



รูปแสดงรูปกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า

กล่องที่ต้องการใช้วัสดุปริมาณน้อยที่สุดคือกล่องที่มีพื้นที่ผิวน้อยที่สุด

ดังนั้น ปัญหานี้เป็นการหาค่าน้อยที่สุดของพื้นที่ผิว

$$S = xy + 2xz + 2yz \qquad (1)$$

โดยมีปริมาตร 32 ลูกบาศก์ฟุต นั่นคือ

$$xyz = 32$$

ได้ว่า

$$z = \frac{32}{xy} \qquad (2)$$

ดังนั้น

$$S = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x} \qquad (3)$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันสองตัวแปร

- เนื่องจาก $x>0$ และ $y>0 \Rightarrow$ ปัญหาการหาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ S บนบริเวณที่ $x>0$ และ $y>0$
- เนื่องจากบริเวณนี้ไม่มีขอบเขต จึงไม่สามารถยืนยันได้ว่าค่าต่ำสุดสัมบูรณ์มีหรือไม่
- แต่ถ้ามีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์จะเกิดขึ้นที่จุดวิกฤตของ S

หาค่าจุดวิกฤตโดยการหาค่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งของ (3) ได้

$$\frac{\partial S}{\partial x}=y-\frac{64}{x^2} \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial S}{\partial y}=x-\frac{64}{y^2}$$

เนื่องจาก $\frac{\partial S}{\partial x}$ และ $\frac{\partial S}{\partial y}$ หาค่าได้ทุกค่า $x>0$ และ $y>0$

ดังนั้น จุดวิกฤตจะเกิดที่ $\frac{\partial S}{\partial x}=0$ และ $\frac{\partial S}{\partial y}=0$ นั่นคือ

$$\frac{\partial S}{\partial x}=0 \quad \Rightarrow \quad y-\frac{64}{x^2}=0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}=0 \quad \Rightarrow \quad x-\frac{64}{y^2}=0 \qquad (5)$$

จากสมการ (4) ได้ $y=\frac{64}{x^2}$ นำไปแทนในสมการ (5) ได้

$$x-\frac{64}{\left(\frac{64}{x^2}\right)^2}=0 \qquad \text{หรือ} \qquad x\left(1-\frac{x^3}{64}\right)=0$$

มีคำตอบคือ $x=0$ และ $x=4$

เนื่องจากต้องการ $x>0$ จึงมี $x=4$ เป็นคำตอบเดียว

แทนค่าหา y ได้ $y=4$

ดังนั้น จุดวิกฤต คือ (4,4)

ใช้อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองทดสอบจุดวิกฤต

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{128}{x^3},\ \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{128}{y^3} \text{ และ } \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 1$$

ดังนั้น เมื่อ $x = 4$ และ $y = 4$ ได้ว่า

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 2,\quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 2 \text{ และ } \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 1$$

ดังนั้น $D(4,4) = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \right)^2 = (2)(2) - (1)^2 = 3$

เนื่องจาก $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 2 > 0$ และ $D(4,4) = 3 > 0$

โดยทฤษฎีบท 3.8.2 ได้ว่า จุด (4,4) ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

แทนค่า $x = 4$ และ $y = 4$ ลงใน (2) ได้ $z = 2$

ดังนั้น กล่องที่ใช้วัสดุน้อยที่สุดคือกล่องที่มีความสูง 2 ฟุตและมีฐานเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวด้านเท่ากับ 4 ฟุต

ข้อสังเกต คำตอบที่ได้ยังไม่สมบูรณ์ เพราะยังไม่ได้แสดงว่าค่าต่ำสุดสัมบูรณ์สำหรับ S เกิดเมื่อ $x = 4$, $y = 4$ และ $z = 2$ เป็นแต่เพียงค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่านั้น

การที่จะแสดงว่าค่าสูงสุดขีดสัมพัทธ์เป็นค่าสุดขีดสัมบูรณ์ด้วยนั้นทำได้ยากสำหรับฟังก์ชันของสองตัวแปรหรือมากกว่า แต่อย่างไรก็ตามในโจทย์ประยุกต์เช่นตัวอย่างนี้ มักจะเห็นได้ชัดเจนจากการพิจารณารูปร่าง หรือพิจารณาในทางเรขาคณิตว่าค่าที่หาได้เป็นค่าสุดขีดสัมบูรณ์หรือไม่

3.9 ตัวคูณลากรานจ์ (Lagrange Multiplier)

ให้ $f(x,y)$ มีค่าสุดขีดและ $\nabla g \neq \mathbf{0}$ บนพื้นผิว $g(x,y)=k$

วิธีการหาค่าสุดขีดของ $f(x,y)$ โดยมีเงื่อนไขประกอบ $g(x,y)=k$ โดยที่

1. หาทุกค่าของ x, y และ λ โดยที่

$$\nabla f(x,y)=\lambda \nabla g(x,y)$$

และ $$g(x,y)=k$$

2. ค่าของ f ที่ทุกจุด (x, y) จากข้อ 1. ที่มากที่สุดจะเป็นค่าสูงสุดของ f และค่าน้อยที่สุดจะเป็นค่าต่ำสุดของ f

วิธีการนี้เรียกว่า**วิธีตัวคูณลากรานจ์** (Method of Lagrange Multiplier) และเรียกจำนวนจริง λ ว่า**ตัวคูณลากรานจ์** (Lagrange Mmultiplier)

ถ้าเขียนสมการเวกเตอร์ $\nabla f=\lambda \nabla g$ ในพจน์ของส่วนประกอบแล้วจะได้

$$f_x=\lambda g_x, \quad f_y=\lambda g_y, \quad g(x,y)=k$$

ซึ่งเป็นระบบสมการ 3 สมการ และมีตัวไม่ทราบค่า 3 ตัว ได้แก่ x, y และ λ

ตัวอย่าง 3.9.2 (หน้า 194) จงหาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน
$f(x,y) = x^2 + 2y^2$ บนวงกลม $x^2 + y^2 = 1$

วิธีทำ

<u>ขั้นที่ 1</u> เขียนปัญหา คือ

ค่าสุดขีดของ $f(x,y) = x^2 + 2y^2$

สอดคล้องเงื่อนไข $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$

<u>ขั้นที่ 2</u> สร้างระบบสมการจาก $\nabla f = \lambda \nabla g$

$f_x = \lambda g_x, \quad f_y = \lambda g_y, \quad g(x,y) = k$

ได้

$$2x = 2x\lambda \qquad (1)$$

$$4y = 2y\lambda \qquad (2)$$

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (3)$$

<u>ขั้นที่ 3</u> หาผลเฉลยของระบบสมการ

จาก (1) ได้ $x = 0$ หรือ $\lambda = 1$

<u>กรณีที่ 1</u> $x = 0$ $\Rightarrow$ แทนค่า x ใน (3) ได้ $y = \pm 1$

<u>กรณีที 2</u> $\lambda = 1$ $\Rightarrow$ แทนค่า λ ใน (2) ได้ $y = 0$

$\Rightarrow$ แทนค่า y ใน (3) ได้ $x = \pm 1$

ดังนั้น f จะมีค่าสุดขีดที่จุด (0, 1), (0, -1), (1, 0) และ (-1, 0)
ดังนั้นค่าของ f ทั้งสี่จุด คือ
$f(0,1) = 2, \quad f(0,-1) = 2, \quad f(1,0) = 1, \quad f(-1,0) = 1$

ขั้นที่ 4 หาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดบนวงกลม $x^2+y^2=1$

ค่าสูงสุดของ f คือ $f(0,\pm 1)=2$

และ**ค่าต่ำสุด** คือ $f(\pm 1,0)=1$

เราสามารถขยายแนวคิดของวิธีตัวคูณลากรานจ์ไปสู่ฟังก์ชันสามตัวแปรได้ ดังนี้

ให้ $f(x,y,z)$ มีค่าสุดขีดและ $\nabla g \neq \mathbf{0}$ บนพื้นผิว $g(x,y,z)=k$

วิธีการหาค่าสุดขีดของ $f(x,y,z)$ โดยมีเงื่อนไขประกอบ $g(x,y,z)=k$ โดยที่

1. หาทุกค่าของ x, y, z และ λ โดยที่

$$\nabla f(x,y,z)=\lambda \nabla g(x,y,z)$$

และ $$g(x,y,z)=k$$

2. ค่าของ f ที่ทุกจุด (x, y, z) จากข้อ 1. ที่มากที่สุดจะเป็นค่าสูงสุดของ f และค่าน้อยที่สุดจะเป็นค่าต่ำสุดของ f

วิธีการนี้เรียกว่า**วิธีตัวคูณลากรานจ์** (Method of Lagrange Multiplier) และเรียกจำนวนจริง λ ว่า**ตัวคูณลากรานจ์** (Lagrange Multiplier)

ถ้าเขียนสมการเวกเตอร์ $\nabla f = \lambda \nabla g$ ในพจน์ของส่วนประกอบ แล้วจะได้

$$f_x = \lambda g_x, \quad f_y = \lambda g_y, \quad f_z = \lambda g_z, \quad g(x,y,z) = k$$

ซึ่งเป็นระบบสมการ 4 สมการ และ มีตัวไม่ทราบค่า 4 ตัว

ได้แก่ x, y, z และ λ

ตัวอย่าง 3.9.3 (หน้า 195) จงหาจุดบนทรงกลม

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ที่อยู่ใกล้และไกลที่สุดจากจุด (3, 1, -1)

วิธีทำ ระยะทางจากจุด (x, y, z) ไปยังจุด (3, 1, -1) คือ

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$$

เนื่องจากการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ

$$S = f(x,y,z) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$$

จะได้ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ d ด้วย

เพราะฉะนั้น จะพิจารณาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ f(x, y, z)

เมื่อจุด (x, y, z) อยู่บนทรงกลม

นั่นคือ $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$

<u>ขั้นที่ 1</u> เขียนปัญหา คือ

ค่าสุดขีดของ $f(x,y,z) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$

สอดคล้องเงื่อนไข $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$

<u>ขั้นที่ 2</u> สร้างระบบสมการจาก $\nabla f = \lambda \nabla g$

$$f_x = \lambda g_x, \quad f_y = \lambda g_y, \quad f_z = \lambda g_z, \quad g(x,y,z) = k$$

ได้ $2(x-3) = 2x\lambda$ (1)

$2(y-1) = 2y\lambda$ (2)

$$2(z+1) = 2z\lambda \qquad (3)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \qquad (4)$$

<u>ขั้นที่ 3</u> หาผลเฉลยของระบบสมการ

จาก (1), (2), (3) ได้

$$x = \frac{3}{1-\lambda}, \; y = \frac{1}{1-\lambda}, \text{ และ } z = -\frac{1}{1-\lambda}$$

แทนค่า x, y, z ใน (4) ได้

$$\frac{3^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{1^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{(-1)^2}{(1-\lambda)^2} = 4$$

$$(1-\lambda)^2 = \frac{11}{4}$$

ได้ว่า $\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$

นั่นคือ f มีค่าสุดขีดที่จุด $\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$

และจุด $\left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$

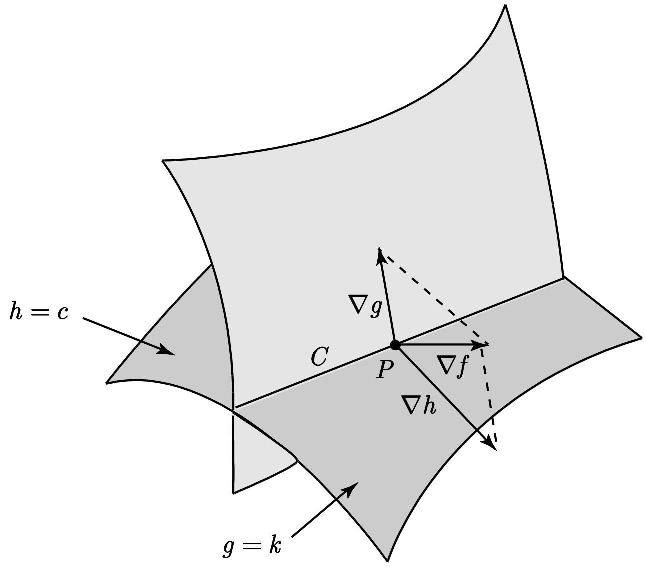
ขั้นที่ 4 หาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

แทนค่าจุดทั้งสองใน f(x, y, z) ได้ว่า

จุด $\left(\frac{6}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$ อยู่**ใกล้**จุด (3, 1, -1) ที่สุด

และ จุด $\left(-\frac{6}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$ อยู่**ไกล**จุด (3, 1, -1) ที่สุด

ถ้าต้องการ**หาค่าต่ำสุดและค่าสูงสุด**ของฟังก์ชัน f(x, y, z)
โดยมี**เงื่อนไข** $g(x,y,z)=k$ **และ** $h(x,y,z)=c$
ซึ่งหมายความว่าค่าสุดขีดของ f เมื่อ (x, y, z) เป็นจุดบนเส้นโค้ง C ที่เกิดจากการตัดกันของพื้นผิว $g(x,y,z)=k$
และพื้นผิว $h(x,y,z)=c$



- สมมติ f มีค่าสุดขีดที่จุด $P(x_0,y_0,z_0)$
- เนื่องจาก ∇f จะตั้งฉากกับเส้นโค้ง C ที่จุด P
- **แต่** ∇g จะตั้งฉากกับพื้นผิว $g(x,y,z)=k$
  และ ∇h จะตั้งฉากกับพื้นผิว $h(x,y,z)=c$
- ดังนั้น ∇g และ ∇hจะต้องฉากกับเส้นโค้ง C
- นั่นคือ $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$จะอยู่ในระนาบที่กำหนดโดย
  $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$และ $\nabla h(x_0,y_0,z_0)$

- ดังนั้นจะมีจำนวนจริง λและ μ(เรียกว่า**ตัวคูณลากรานจ์**) โดยที่
  $\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0,z_0)+\mu\nabla h(x_0,y_0,z_0)$ (*)

- หาค่าสุดขีดโดยแก้ระบบสมการ 5 สมการ 5 ตัวไม่ทราบค่า x, y, z, λ และ μ โดยระบบสมการได้มาจาก (*) คือ

$$f_x = \lambda g_x + \mu h_x$$

$$f_y = \lambda g_y + \mu h_y$$

$$f_z = \lambda g_z + \mu h_z$$

$$g(x, y, z) = k$$

$$h(x, y, z) = c$$

ตัวอย่าง 3.9.4 (หน้า 197) จงหาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $f(x,y,z)=x+2y+3z$ บนเส้นโค้ง C ที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $x-y+z=1$ และทรงกระบอก $x^2+y^2=1$

วิธีทำ แก้ระบบสมการหาค่า x,y,z,λ และ μ จากระบบสมการ

$$\nabla f=\lambda\nabla g+\mu\nabla h$$

$$g(x,y,z)=1$$

$$h(x,y,z)=1$$

และเขียนระบบสมการใหม่ ได้เป็น

$$f_x=\lambda g_x+\mu h_x \quad\Rightarrow\quad 1=\lambda+2\mu x \qquad (1)$$

$$f_y=\lambda g_y+\mu h_y \quad\Rightarrow\quad 2=-\lambda+2\mu y \qquad (2)$$

$$f_z=\lambda g_z+\mu h_z \quad\Rightarrow\quad 3=\lambda \qquad (3)$$

$$g(x,y,z)=1 \quad\Rightarrow\quad x-y+z=1 \qquad (4)$$

$$h(x,y,z)=1 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2=1 \qquad (5)$$

แทนค่า $\lambda=3$ ใน (1) ได้ $2\mu x=-2\Rightarrow x=-\dfrac{1}{\mu}$

แทนค่า $\lambda=3$ ใน (2) ได้ $2\mu y=5 \Rightarrow y=\dfrac{5}{2\mu}$

แทนค่า x และ y ใน (5) ได้

$$\frac{1}{\mu^2}+\frac{25}{4\mu^2}=1\Rightarrow \mu^2=\frac{29}{4}\Rightarrow \mu=\pm\frac{\sqrt{29}}{2}$$

ทำให้ได้ $x=\mp\dfrac{2}{\sqrt{29}}$ และ $y=\pm\dfrac{5}{\sqrt{29}}$

แทนค่า x และ y ใน (4) ได้ $z=1\pm\frac{7}{\sqrt{29}}$

ดังนั้น ค่าของ f คือ

$$
\begin{aligned}
&f\left(\mp\frac{2}{\sqrt{29}},\pm\frac{5}{\sqrt{29}},1\pm\frac{7}{\sqrt{29}}\right)\\
&=\mp\frac{2}{\sqrt{29}}+2\left(\pm\frac{5}{\sqrt{29}}\right)+3\left(1\pm\frac{7}{\sqrt{29}}\right)\\
&=3\pm\sqrt{29}
\end{aligned}
$$

ค่ามากที่สุดของ f บนเส้นโค้งที่กำหนด คือ $3+\sqrt{29}$