

1.3 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

เป็นการศึกษาปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x)dx$ เมื่อ

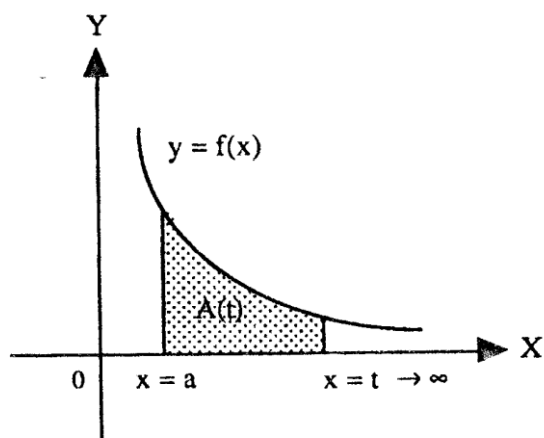
1. กรณีที่ลิมิตของการหาปริพันธ์มีค่าเป็นอนันต์
($+\infty$ หรือ $-\infty$) หรือ
2. ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบมีค่าเป็นอนันต์ที่บางจุด $c \in [a,b]$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$ หรือ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$

ซึ่งเราเรียกปริพันธ์ดังกล่าวว่า**ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ** (improper integrals) และจะแยกพิจารณาเป็นกรณีย่อย ๆ ดังต่อไปนี้

1. ลิมิตของการหาปริพันธ์มีค่าเป็นอนันต์

ก) ลิมิตบนเป็นอนันต์ ($b = \infty$)



กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, \infty)$

พิจารณา $A = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$

- ถ้าสามารถหาค่า A ได้ (นั่นคือ A เป็นจำนวนจริง)

แล้วปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^\infty f(x) dx$ **ลู่เข้า** และ

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$$

- ถ้าไม่สามารถหาค่า A ได้

แล้วปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^\infty f(x) dx$ **ลู่ออก**

หมายเหตุ (1) ถ้า $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, +\infty)$ แล้ว $A = +\infty$

จะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ลู่ออกลู่อินันต์

เขียนแทนด้วย $\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ และ

สำหรับ $t > a$ พื้นที่ $A(t)$ ของบริเวณใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$

จาก $x = a$ ถึง $x = t$ จะหาได้โดย $A(t) = \int_a^t f(x)dx$

และเมื่อให้ $t \rightarrow +\infty$ แล้วทำให้ลิมิตของ $A(t)$ หาค่าได้

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx$ คือ พื้นที่ของบริเวณที่ไม่มีขอบเขตใต้เส้นโค้ง
 $y = f(x)$ บนช่วง $[a, +\infty)$

(2) ถ้า $f(x)$ มีค่าทั้งบวกและลบบน $[a, +\infty)$ แล้ว ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ อาจลู่ออกแบบกวัดแกว่ง (oscillation) เช่น เมื่อเรา

พิจารณา

$$\int_0^t \sin x dx = \begin{cases} 0; & t = 2k\pi \\ 2; & t = (2k+1)\pi \end{cases} \quad \text{ซึ่งมีค่ากวัดแกว่ง}$$

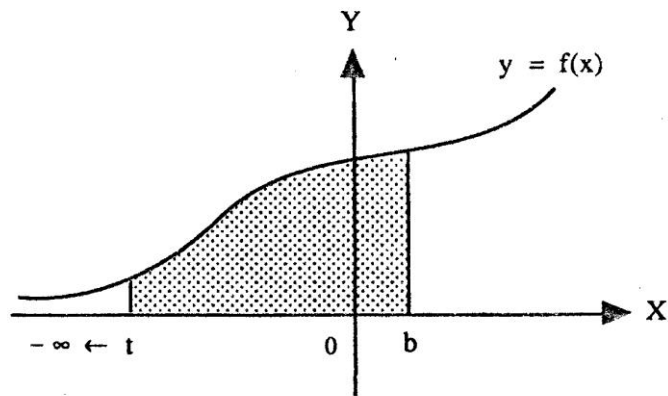
ระหว่าง 0 และ 2 เมื่อ $t \rightarrow +\infty$ ดังนั้น $\int_0^t \sin x dx$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ต่อไปนี้ ลู่เข้าหรือลู่ออก
ถ้าลู่เข้าจงหาค่าปริพันธ์

ก.
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx$$

ข.
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

ข) ลิมิตล่างเป็นอนันต์ ($a = -\infty$)



กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-\infty, b]$

พิจารณา $B = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$

- ถ้าสามารถหาค่า B ได้ ($B \in \mathbb{R}$) แล้ว $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ ลู่เข้า

และ
$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

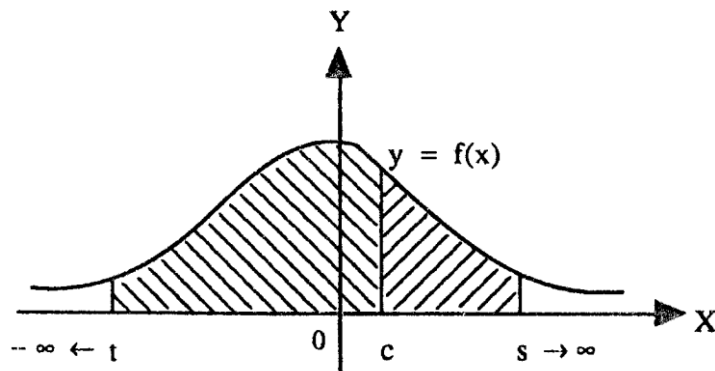
- ถ้าไม่สามารถหาค่า B ได้

แล้ว ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ ลู่ออก

ตัวอย่าง จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ $\int_{-\infty}^1 \frac{x}{(x^2 + 4)} dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก
ถ้าลู่เข้าจงหาค่าปริพันธ์

ค) ทั้งลิมิตบนและลิมิตล่างเป็นอนันต์

($a = -\infty$ และ $b = +\infty$)



กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$

พิจารณา

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

- เรากล่าวว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ลู่เข้า

เมื่อ $\int_{-\infty}^c f(x)dx$ และ $\int_c^{\infty} f(x)dx$ ลู่เข้า และมีค่าเท่ากับ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^c f(x)dx + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_c^s f(x)dx$$

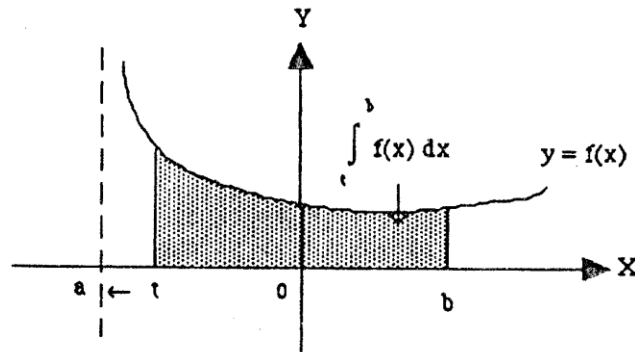
- นอกนั้น เราจะกล่าวว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ลู่ออก

ตัวอย่าง จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ $\int_{-\infty}^{+\infty} 2xe^{-x^2} dx$ ลู่เข้าหรือลู่ออก
ถ้าลู่เข้าจงหาค่าปริพันธ์

2. กรณีที่ปริพันธ์ไม่ต่อเนื่องและมีค่าเป็นอนันต์

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ ยกเว้นที่บางจุด $c \in [a, b]$ ซึ่ง $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$ หรือ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$

ก) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(a, b]$ และ f ไม่ต่อเนื่องที่จุด $c = a$ และ $f(x) \rightarrow \infty$ เมื่อ $x \rightarrow a^+$



พิจารณา $A^* = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$

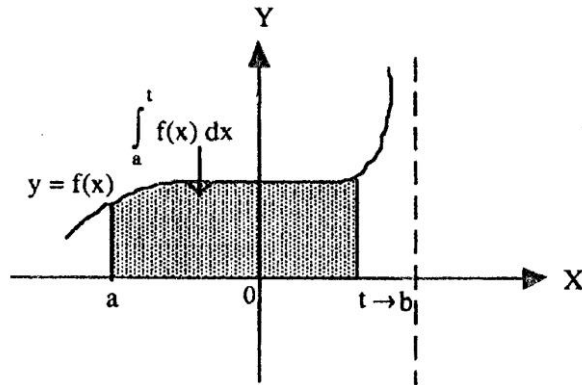
- ถ้าสามารถหาค่า A^* ($A^* \in \mathbb{R}$) แล้ว $\int_a^b f(x) dx$ ลู่เข้า

และ $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$

- ถ้าไม่สามารถหาค่า A^* ได้ แล้ว $\int_a^b f(x) dx$ ลู่ออก

- ถ้า $A^* = \infty$ แล้ว $\int_a^b f(x) dx$ ลู่ออกสู่ออนันต์

ข) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b)$ และ f ไม่ต่อเนื่องที่จุด $c = b$ และ $f(x) \rightarrow \infty$ เมื่อ $x \rightarrow b^-$



พิจารณา $B^* = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$

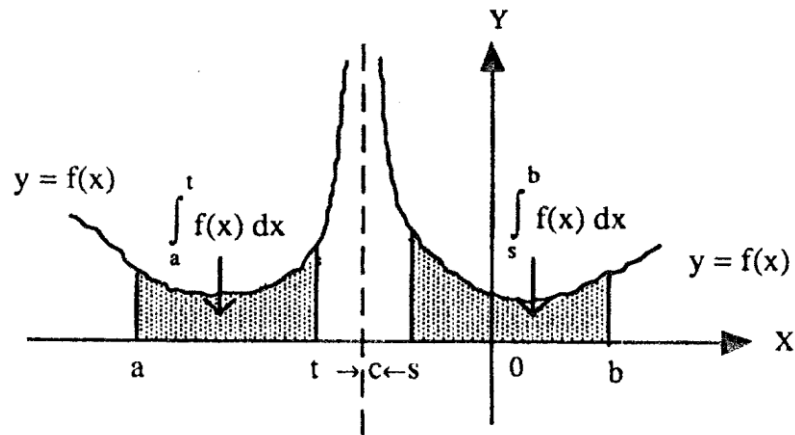
- ถ้าสามารถหาค่า B^* ($B^* \in \mathbb{R}$) แล้ว $\int_a^b f(x) dx$ ลู่เข้า

และ $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$

- ถ้าไม่สามารถหาค่า B^* ได้ แล้ว $\int_a^b f(x) dx$ ลู่ออก และ

- ถ้า $B^* = \infty$ แล้ว $\int_a^b f(x) dx$ ลู่ออกสู่อินฟินิตี้

ค) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ ยกเว้นที่บางจุด $c \in (a,b)$ ซึ่งลิมิตทางซ้ายหรือทางขวาของ f ที่จุด $x=c$ มีค่าเป็นอนันต์



พิจารณา
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

- ถ้า $\int_a^c f(x) dx$ และ $\int_c^b f(x) dx$ ลู่เข้า แล้ว $\int_a^b f(x) dx$ ลู่เข้า

และ
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x) dx + \lim_{s \rightarrow c^+} \int_s^b f(x) dx$$

- นอกจากนี้ เรากล่าวว่า $\int_a^b f(x) dx$ ลู่ออก

ตัวอย่าง จงแสดงว่าปริพันธ์ต่อไปนี้ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ถ้าลู่เข้าจงหาค่าปริพันธ์

ก. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx$ ข. $\int_0^1 (-\ln x) dx$ ค. $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^2 - x - 2} dx$

3. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่เป็นทั้งกรณี 1 และ กรณี 2

คือ ปริพันธ์ที่ทั้งลิมิตของการหาปริพันธ์เป็นอนันต์ และ
ปริพันธ์ไม่ต่อเนื่องและมีค่าเป็นอนันต์ที่บางจุดในช่วงของการหา
ปริพันธ์ ซึ่งมีหลายรูปแบบดังนี้

ก) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-\infty, b]$ แต่ไม่ต่อเนื่องและมีค่า
อนันต์ที่บางจุด $c \in (-\infty, b]$

$\Rightarrow$ สำหรับ $a < c$ พิจารณา

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (*)$$

ข) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, \infty)$ แต่ไม่ต่อเนื่องและมีค่าอนันต์
ที่บางจุด $c \in [a, \infty)$

$\Rightarrow$ สำหรับ $b < c$ พิจารณา

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx \quad (**)$$

ค) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-\infty, \infty)$ แต่ไม่ต่อเนื่องและมีค่า
อนันต์ที่บางจุด $c \in (-\infty, \infty)$

$\Rightarrow$ สำหรับ $a < c < b$ พิจารณา

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx \quad (***)$$

1. ปริพันธ์ไม่ตรงแบบด้านซ้ายของแต่ละสมการในกรณี ก) ข) และ ค) ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบด้านขวามือของแต่ละสมการลู่เข้า และ
2. ถ้ามีปริพันธ์ด้านขวาอย่างน้อยหนึ่งตัวลู่ออก แล้วปริพันธ์ไม่ตรงแบบด้านซ้ายลู่ออก

ตัวอย่าง จงเขียนปริพันธ์ไม่ตรงแบบต่อไปนี้ในรูปผลรวมของลิมิตของปริพันธ์แท้ (ไม่ต้องทดสอบการลู่เข้า)

$$\begin{array}{ll} \text{ก.} \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2 + x - 2} dx & \text{ข.} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)} dx \\ \text{ค.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx & \end{array}$$

บทที่ 2 การประยุกต์ของปริพันธ์

1. การหาปริมาตรทรงตันโดยการหมุนพื้นที่
 - 1.1 วิธีแบบแผ่นกลม
 - 1.2 วิธีเปลือกบาง
2. ความยาวเส้นโค้งบนระนาบ
3. โมเมนต์และจุดศูนย์กลางของมวล
4. พื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุน
5. งาน

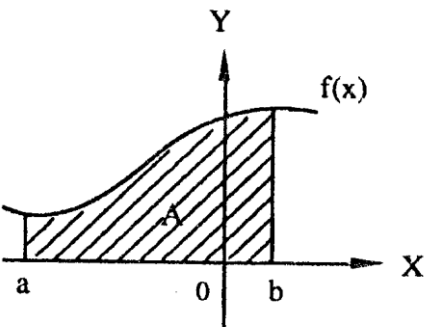
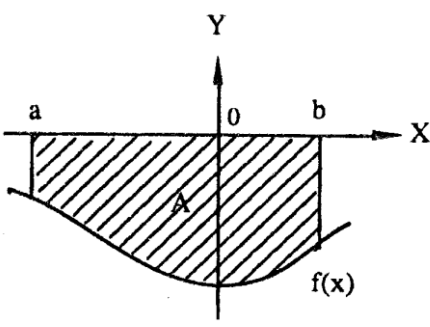
ทบทวน

การหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง และ พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

พื้นที่ใต้เส้นโค้ง (Area under curves)

กรณีที่ 1 $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และ
 $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ $\left(\int f(x) dx = F(x) + C \right)$

ก.) $f(x)$ ไม่ตัดแกน X บนช่วง (a, b)

พื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$	
$f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$	$f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$
	
$A = \int_a^b f(x) dx$	$A = -\int_a^b f(x) dx = \left \int_a^b f(x) dx \right $

สรุป ถ้า กราฟของ $f(x)$ ไม่ตัดแกน X บนช่วง (a, b)

$$\text{จะได้ว่า } A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

ข.) กราฟของ $f(x)$ ตัดแกน X ที่บางจุดในช่วง (a, b)

นั่นคือ กราฟของ $f(x)$ บนช่วง $[a, b]$ มีบางส่วนอยู่เหนือแกน x และมีบางส่วนอยู่ใต้แกน x

พื้นที่ใต้เส้นโค้ง จาก $x = a$ ถึง $x = b$ เท่ากับผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของค่าปริพันธ์ในแต่ละช่วงย่อยเหล่านี้

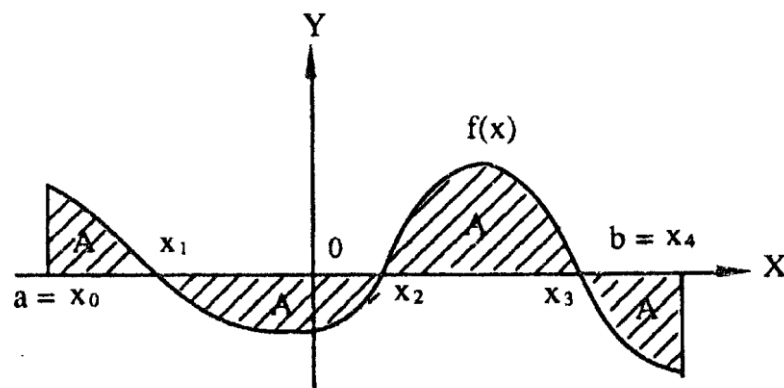
นั่นคือ ถ้า $f(x)$ ตัดแกน X ที่จุด $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$

และให้ $a = x_0, b = x_n$ และ

$$I_i = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \right| \quad ; i = 1, 2, 3, \dots, n$$

แล้วพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$ คือ

$$A = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$



กรณีที่ 2 $x = g(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[c, d]$ และ $G(y)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $g(y)$

ก.) $g(y)$ ไม่ตัดแกน Y บนช่วง (c, d)

พื้นที่ใต้เส้นโค้ง $x = g(y)$ จาก $y = c$ ถึง $y = d$	
$g(y) \geq 0, \forall y \in [c, d]$	$g(y) \leq 0, \forall y \in [c, d]$
$A = \int_c^d g(y) dy$	$A = -\int_c^d g(y) dy = \left \int_c^d g(y) dy \right $
สรุป $A = \left \int_c^d g(y) dy \right $	

ข.) กราฟ $x=g(y)$ ตัดแกน Y ที่บางจุดในช่วง (c, d)

นั่นคือ กราฟของ $g(y)$ บนช่วง $[c, d]$ มีบางส่วนอยู่ด้านขวาของแกน y และมีบางส่วนอยู่ด้านซ้ายของแกน y

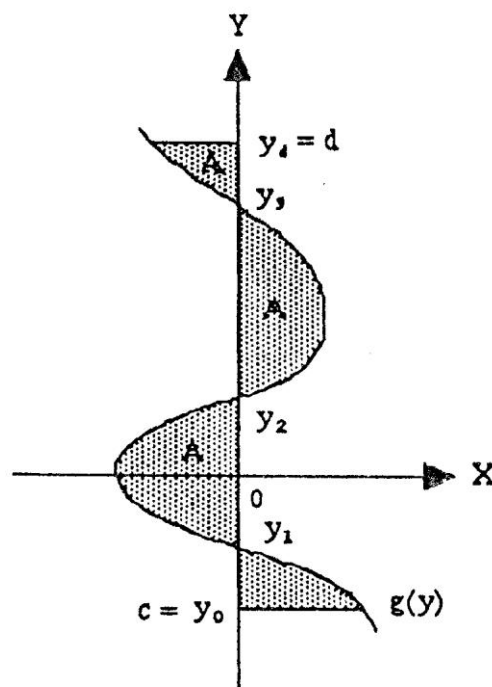
พื้นที่ใต้เส้นโค้งจาก $y=c$ ถึง $y=d$ เท่ากับผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของค่าปริพันธ์ในแต่ละช่วงย่อยเหล่านี้

นั่นคือ ถ้า $x = g(y)$ ตัดแกน y ที่จุด $y_1, y_2, \dots, y_n \in (c, d)$ และให้ $c = y_0, d = y_n$ และ

$$I_i = \left| \int_{y_{i-1}}^{y_i} g(y) dy \right| \quad ; i = 1, 2, 3, \dots, n$$

แล้ว พื้นที่ใต้เส้นโค้ง $x = g(y)$ จาก $y=c$ ถึง $y=d$ คือ

$$A = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$



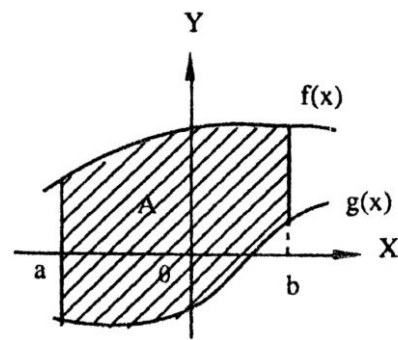
พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง (Area between curves)

กรณีที่ 1 ให้ $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$

ก.) เมื่อ f และ g ไม่ตัดกันบนช่วง $[a, b]$

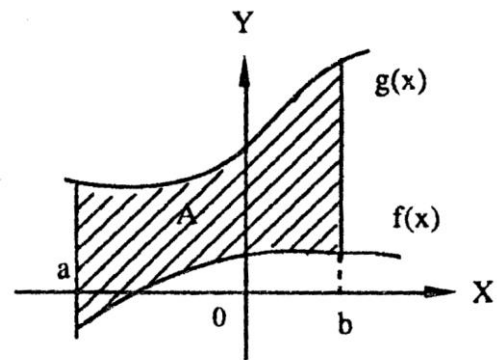
พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง f และ g จาก $x = a$ ถึง $x = b$

$$f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$$



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

$$f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$$



$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \\ &= -\int_a^b [f(x) - g(x)] dx \end{aligned}$$

สรุป

$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

ข.) เมื่อ f และ g ตัดกันบางจุดในช่วง (a, b)

กล่าวคือ $f(x) - g(x)$ มีค่าเป็นบวกและลบบนบางช่วงย่อยของ $[a, b]$

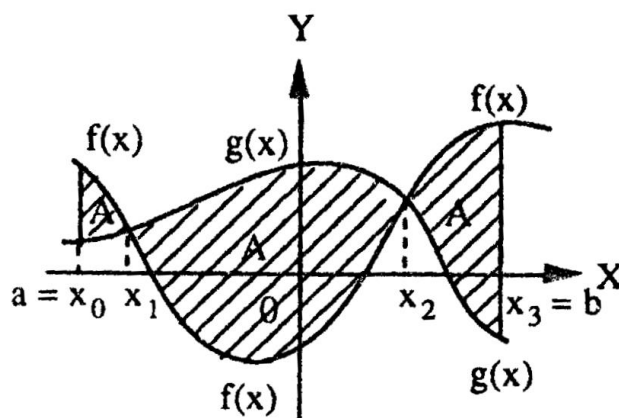
ให้ f และ g ตัดกันที่จุด $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in (a, b)$

และให้ $a = x_0, b = x_n$ และ

$$I_i = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - g(x)] dx \right| \quad ; i = 1, 2, 3, \dots, n$$

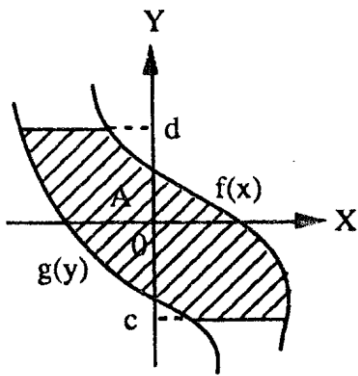
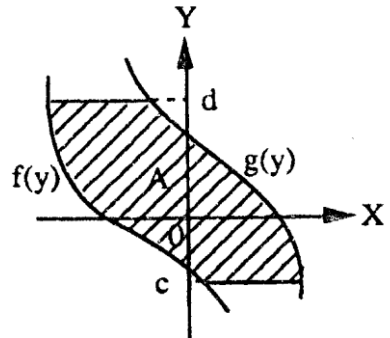
แล้วพื้นที่ A ระหว่างเส้นโค้ง f และ g จาก $x = a$ ถึง $x = b$

คือ $A = I_1 + I_2 + \dots + I_n$



กรณีที่ 2 $x = f(y)$ และ $x = g(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[c, d]$

ก.) เมื่อ f และ g ไม่ตัดกันบนช่วง $[c, d]$

พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง f และ g จาก $y = c$ ถึง $y = d$	
$f(y) \geq g(y), \forall y \in [c, d]$	$f(y) \leq g(y), \forall y \in [c, d]$
	
$A = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy$	$A = \int_c^d [g(y) - f(y)] dy$ $= -\int_c^d [f(y) - g(y)] dy$
สรุป $A = \left \int_c^d [f(y) - g(y)] dy \right $	

ข.) เมื่อ f และ g ตัดกันบางจุดในช่วง (c, d)

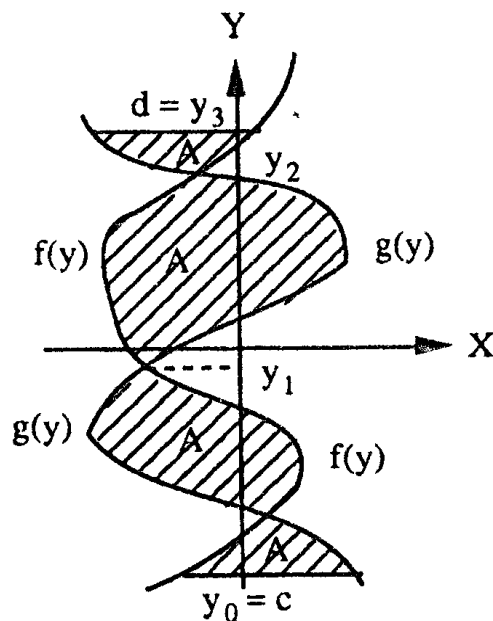
กล่าวคือ $f(x) - g(x)$ มีค่าเป็นบวกและลบบนบางช่วงย่อยของ $[c, d]$

กำหนดให้ f และ g ตัดกันที่จุด $y_1, y_2, \dots, y_{n-1} \in (c, d)$
และให้ $c = y_0, d = y_n$ และ

$$I_i = \left| \int_{y_{i-1}}^{y_i} [f(y) - g(y)] dy \right| \quad ; i = 1, 2, 3, \dots, n$$

แล้ว พื้นที่ A ระหว่างเส้นโค้ง f และ g จาก $y = c$ ถึง $y = d$

$$A = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$



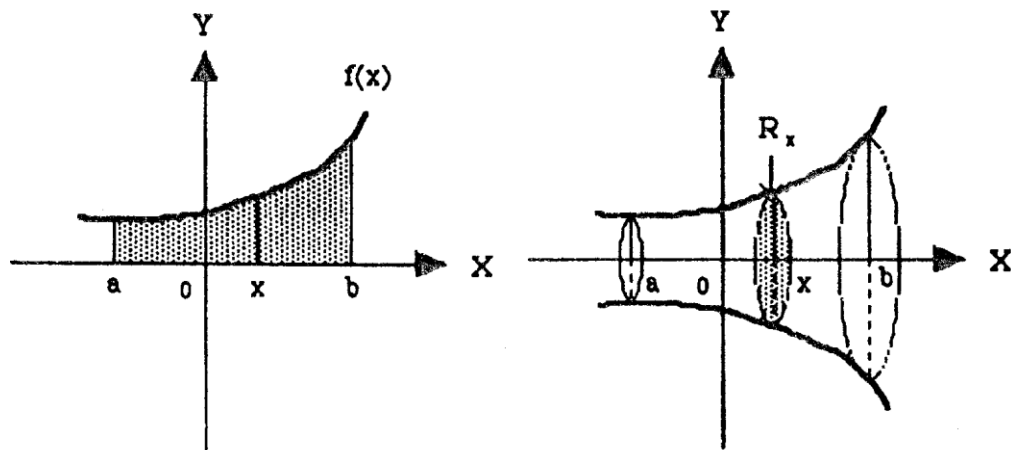
2.1.1 การหาปริมาตรทรงตันซึ่งเกิดจากการหมุนพื้นที่

โดยใช้วิธีแบบแผ่นกลม (หน้า 90)

กรณีที่ 1 พื้นที่หน้าตัดเรียงตัวอยู่บนช่วงปิด $[a, b]$ ตามแกน X
(หมุนรอบแกน X)

ขั้นที่ 1 หาพื้นที่บนระนาบ

ขั้นที่ 2 หมุนพื้นที่รอบแกน X ทำให้เกิดทรงตันขึ้นมา ดังรูป



จะเห็นว่าพื้นที่หน้าตัด $A(x)$ ของทรงตันมีลักษณะเป็นวงกลมซึ่งมีพื้นที่เท่ากับ

$$A(x) = \pi[R(x)]^2 \text{ เมื่อ } R(x) \text{ คือรัศมีของแผ่นกลม}$$

ขั้นที่ 3 ปริมาตรทรงตันจะหาได้จาก

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx$$

หมายเหตุ ในกรณีนี้ $R(x) = f(x)$

วิธีการหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่เช่นนี้ เรียกว่า

วิธีแบบแผ่นกลม เพราะว่าพื้นที่หน้าตัดมีลักษณะเป็นแผ่นกลม

ตัวอย่าง จงหาปริมาตร V ของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุน
บริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ และแกน X รอบแกน X
จาก $x = 0$ ถึง $x = 1$

วิธีทำ

กรณีที่หมุนพื้นที่รอบเส้นตรงที่ขนานกับแกน X (เส้นตรง $y = k$)
การหาปริมาตร V สามารถทำได้โดยวิธีเดียวกัน แต่เปลี่ยนรัศมีของ
แผ่นกลมที่เป็นภาคตัดขวางโดยวัดจากแกนหมุน (เส้นตรง $y = k$)

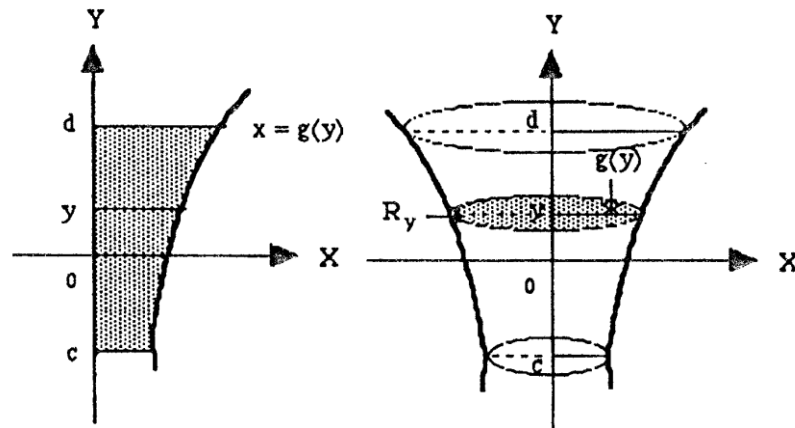
$$\text{นั่นคือ } V = \int_a^b \pi [f(x) - k]^2 dx$$

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ ซึ่งล้อมรอบด้วย
เส้นโค้ง $y = \sqrt{x} + 1$ และเส้นตรง $y=2$, $x=4$ รอบแกน $y=2$
วิธีทำ

กรณีที่ 2 พื้นที่หน้าตัดเรียงตัวอยู่บนช่วงปิด $[c, d]$ ตามแกน Y
(หมุนรอบแกน Y)

ขั้นที่ 1 หาพื้นที่บนระนาบ

ขั้นที่ 2 หมุนพื้นที่รอบแกน Y ทำให้เกิดทรงตันขึ้นมา ดังรูป



จะเห็นว่าพื้นที่หน้าตัด $A(y)$ ของทรงตันมีลักษณะเป็นวงกลมซึ่งมีพื้นที่เท่ากับ

$$A(y) = \pi[R(y)]^2 \text{ เมื่อ } R(y) \text{ คือรัศมีของแผ่นกลม}$$

ขั้นที่ 3 ปริมาตรทรงตันจะหาได้จาก

$$V = \int_c^d A(y) dy = \int_c^d \pi[R(y)]^2 dy$$

หมายเหตุ ในกรณีนี้ $R(y) = g(y)$

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ ซึ่งล้อมรอบด้วย

เส้นโค้ง $y = \frac{1}{x}$, $1 \leq y \leq 4$ และแกน Y รอบแกน Y

วิธีทำ

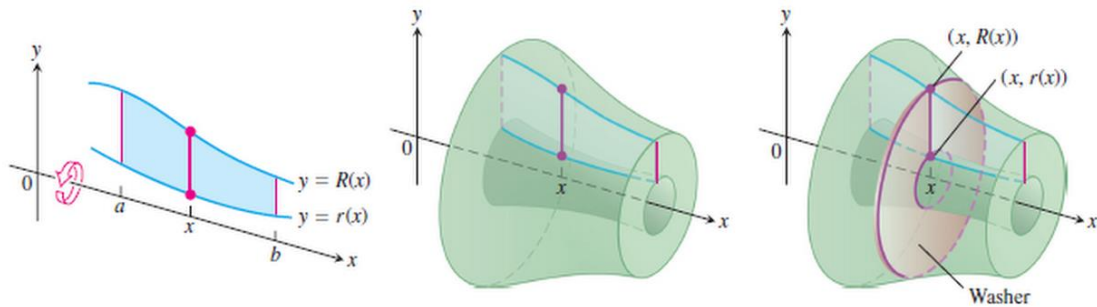
กรณีที่หมุนพื้นที่รอบเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y (เส้นตรง $x = h$)
การหาปริมาตร V สามารถทำได้โดยวิธีเดียวกัน แต่เปลี่ยนรัศมีของ
แผ่นกลมที่เป็นภาคตัดขวางโดยวัดจากแกนหมุน (เส้นตรง $x = h$)

นั่นคือ
$$V = \int_c^d \pi [g(y) - h]^2 dy$$

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่
ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และเส้นตรง $x = 3, y = 1$
รอบเส้นตรง $x = 3$

วิธีทำ

การหาปริมาตรทรงตันซึ่งเกิดจากการหมุนพื้นที่ โดยใช้วิธีวงแหวน



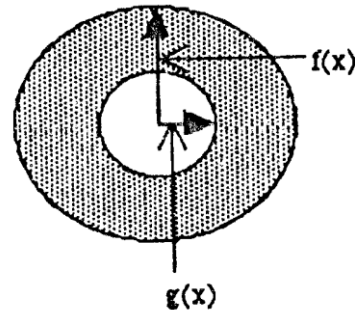
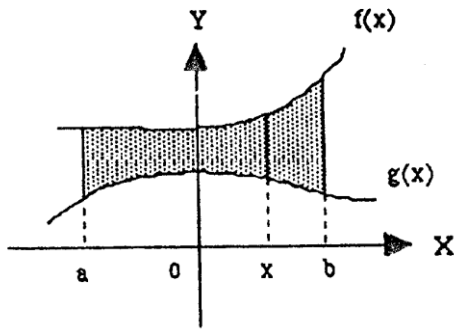
ถ้าพื้นที่ที่ทำการหมุนรอบแกน เป็นพื้นที่ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้น ปริมาตรทรงตันที่ได้จากการหมุนพื้นที่ดังกล่าว จะมีรูโหว่ตรงแกนกลาง และพื้นที่หน้าตัดจะมีลักษณะเป็นวงแหวน ซึ่งมีพื้นที่เท่ากับ $A(x) = \pi[(R(x))^2 - (r(x))^2]$ กรณีหมุนรอบแกน X หรือ $A(y) = \pi[(R(y))^2 - (r(y))^2]$ กรณีหมุนรอบแกน Y เมื่อ $R(x)$ [$R(y)$] และ $r(x)$ [$r(y)$] คือ รัศมีของวงกลมนอก และวงกลมในตามลำดับ ดังนั้น ปริมาตรทรงตันจะคำนวณได้จาก

$$\begin{aligned} \text{หมุนรอบแกน X} \Rightarrow V &= \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi[(R(x))^2 - (r(x))^2]dx \\ \text{หมุนรอบแกน Y} \Rightarrow V &= \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \pi[(R(y))^2 - (r(y))^2]dy \end{aligned}$$

วิธีนี้จะถูกเรียกว่าวิธีวงแหวน เนื่องจากพื้นที่หน้าตัดมีลักษณะเป็นวงแหวน

1. กรณิหมุมพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $f(x)$ และ $g(x)$ รอบแกน X

1.1 $f(x)$ และ $g(x)$ ไม่ตัดกันบน $[a, b]$



$$V = \int_a^b A(x)dx = \begin{cases} \int_a^b \pi[(f(x))^2 - (g(x))^2]dx & ; f(x) \geq g(x) \\ \int_a^b \pi[(g(x))^2 - (f(x))^2]dx & ; f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

$$= \left| \int_a^b \pi[(f(x))^2 - (g(x))^2]dx \right|$$

1.2 $f(x)$ และ $g(x)$ ตัดกันที่จุด $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in (a, b)$

และให้ $a = x_0, b = x_n$ และ

$$V_i = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \pi[(f(x))^2 - (g(x))^2]dx \right| \quad ; i = 1, 2, 3, \dots, n$$

แล้ว ปริมาตร $V = I_1 + I_2 + \dots + I_n$

2. กรณิหมุมพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $f(y)$ และ $g(y)$ รอบแกน Y

2.1 $f(y)$ และ $g(y)$ ไม่ตัดกันบน $[c, d]$

$$V = \left| \int_c^d \pi[(f(y))^2 - (g(y))^2] dy \right|$$

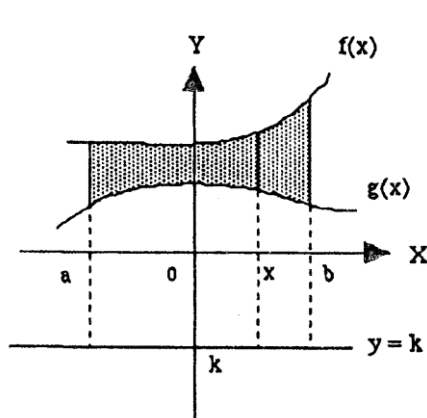
2.2 $f(y)$ และ $g(y)$ ตัดกันที่จุด $y_1, y_2, \dots, y_{n-1} \in (c, d)$

และให้ $c = y_0, d = y_n$ และ

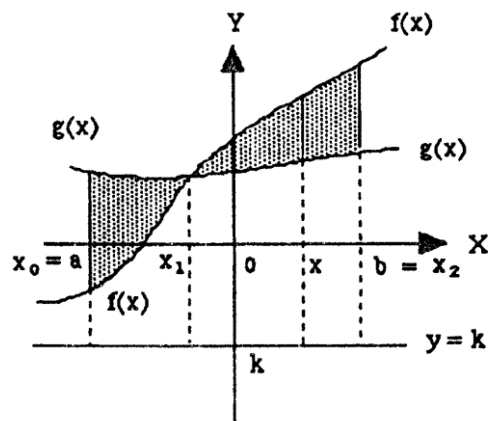
$$V_i = \left| \int_{y_{i-1}}^{y_i} \pi[(f(y))^2 - (g(y))^2] dy \right| \quad ; i = 1, 2, 3, \dots, n$$

แล้วปริมาตร $V = I_1 + I_2 + \dots + I_n$

3. หมุนพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $f(x)$ และ $g(x)$ รอบเส้นตรง $y = k$



กรณี 3.1



กรณี 3.2

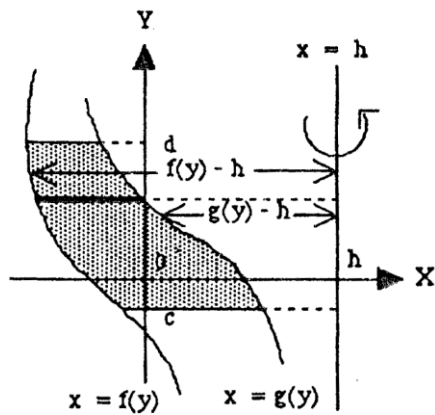
3.1) $f(x)$ และ $g(x)$ ไม่ตัดกันในช่วง $[a, b]$

แล้ว
$$V = \left| \int_a^b \pi [(f(x) - k)^2 - (g(x) - k)^2] dx \right|$$

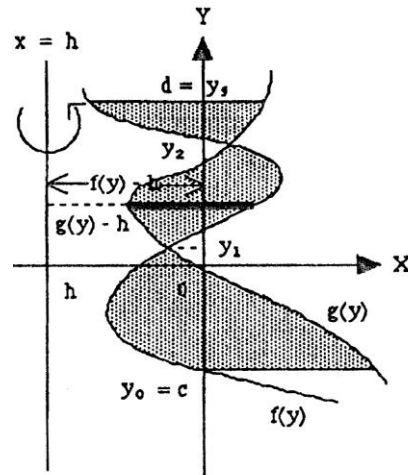
3.2) $f(x)$ ตัดกับ $g(x)$ ที่จุด $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in (a, b)$ และให้ $a = x_0, b = x_n$ แล้ว $V = I_1 + I_2 + \dots + I_n$ เมื่อ

$$V_i = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \pi [(f(x) - k)^2 - (g(x) - k)^2] dx \right| ; i = 1, 2, 3, \dots, n$$

4. หมุนพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $f(y)$ และ $g(y)$ รอบเส้นตรง $x = h$



กรณี 4.1



กรณี 4.2

4.1) $f(y)$ และ $g(y)$ ไม่ตัดกันในช่วง $[c, d]$

แล้ว
$$V = \left| \int_c^d \pi [(f(y) - h)^2 - (g(y) - h)^2] dy \right|$$

4.2) $f(y)$ และ $g(y)$ ตัดกันที่จุด $y_1, y_2, \dots, y_{n-1} \in (c, d)$

และให้ $c = y_0, d = y_n$ แล้ว $V = I_1 + I_2 + \dots + I_n$ เมื่อ

$$V_i = \left| \int_{y_{i-1}}^{y_i} \pi [(f(y) - h)^2 - (g(y) - h)^2] dy \right| ; i = 1, 2, 3, \dots, n$$

สรุป! วิธีผ่านกลม (วงแหวน):

ลากเส้นตั้งจากแกนหมุน หาค่ามีนอก/ใน

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติของการหมุนบริเวณซึ่งถูก
ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และเส้นตรง $y = 2x$

ก.) รอบแกน X

ข.) รอบแกน Y

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติของการหมุนรอบแกน X
ของบริเวณที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = x^2 + 2x + 2$ และเส้นตรง
 $y = x + 4$ เมื่อ $-4 \leq x \leq 2$
วิธีทำ

ตัวอย่าง (หมุนรอบ $y = k$) จงหาปริมาตรของทรงสามมิติของการ
หมุนบริเวณระหว่างเส้นโค้ง $y = \sin x$ และ $y = \cos x$

จาก $x = -\frac{\pi}{2}$ ถึง $x = \frac{\pi}{2}$ รอบเส้นตรง $y = 1$

วิธีทำ

ตัวอย่าง (หมุนรอบ $x = h$) จงหาปริมาตรของทรงสามมิติของการ

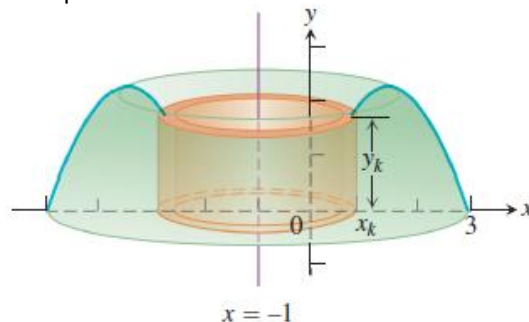
หมุนรอบเส้นตรง $x = -1$ ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

$y = x^2 + 1$ และเส้นตรง $y = 2x$, $y = 1$

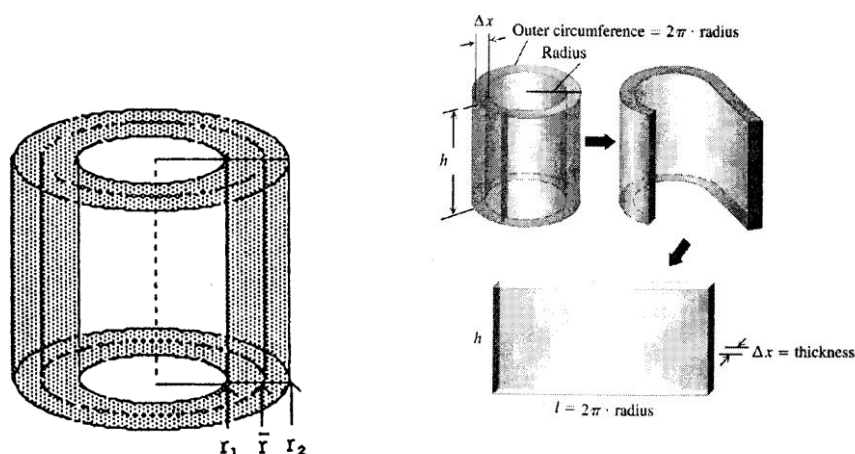
วิธีทำ

2.2 การหาปริมาตรทรงตันซึ่งเกิดจากการหมุนพื้นที่โดยวิธีเปลือกบาง (หน้า106)

ตัวอย่าง บริเวณซึ่งถูกล้อมรอบด้วยแกน X และพาราโบลา $y = 3x - x^2$ ถูกหมุนรอบแกน $x = -1$



แผ่นเปลือกบางถูกสกัดออกมาเป็นลักษณะทรงกระบอกกลาง



ปริมาตรย่อย คือปริมาตรของทรงกระบอกกลาง

$$\begin{aligned}\Delta V_k &= \text{ความยาว} \times \text{ความสูง} \times \text{ความหนา} \\ &= 2\pi (\text{รัศมีปากทรงกระบอก}) \times h \times \Delta x \\ &= 2\pi(1 + x_k)(3x_k - x_k^2)(\Delta x)\end{aligned}$$

ปริมาตรรวมของทรงตันเกิดจากการรวมกันของปริมาตรย่อย

$$V = \sum_{k=1}^n \Delta V_k = \sum_{k=1}^n 2\pi(x_k + 1)(3x_k - x_k^2)(\Delta x)$$

เนื่องจากทรงกระบอกอยู่ในช่วง $[0, 3]$ เมื่อกำหนดให้แผ่นสี่เหลี่ยม
บางมาก ๆ ($\Delta x \rightarrow 0$) ได้ปริมาตรทรงตัน คือ

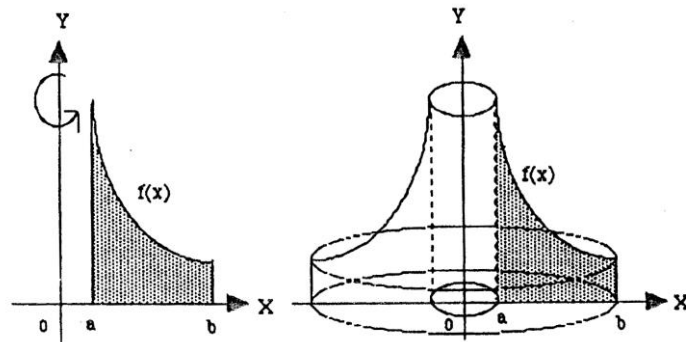
$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^3 2\pi(x+1)(3x-x^2)dx \\
 &= \int_0^3 2\pi(3x^2+3x-x^3-x^2)dx \\
 &= 2\pi \left[\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_{x=0}^{x=3} \\
 &= \frac{45\pi}{2} \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}
 \end{aligned}$$

สูตรการหาปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบเส้นตรง L
 ด้วยวิธีเปลือกบาง คือ

$$V = \int_a^b 2\pi (\text{รัศมีทรงกระบอก}) (\text{ความสูงทรงกระบอก}) dx$$

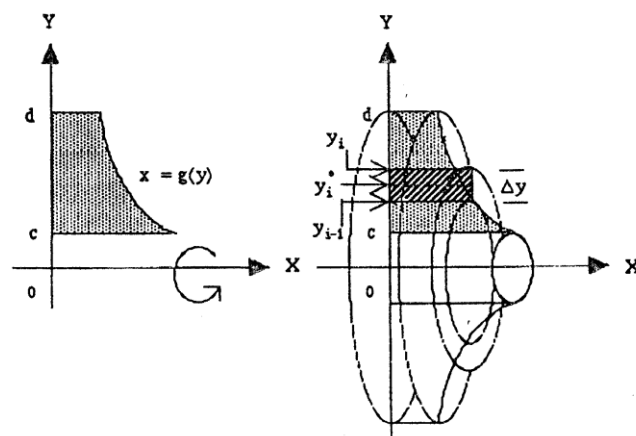
1. ความสูง คือ $y = f(x)$ และมีเส้นตรง $x = L$ เป็นแกนกลาง

และ $L \leq a \leq x \leq b$ ได้ว่า $V = \int_a^b 2\pi(x-L)f(x)dx$



2. ความสูง คือ $x = g(y)$ และมีเส้นตรง $y = L$ เป็นแกนกลาง

และ $L \leq c \leq y \leq d$ ได้ว่า $V = \int_c^d 2\pi(y-L)g(y)dy$



ตัวอย่าง จงหาปริมาตร (โดยวิธีเปลือกบาง) ของทรงสามมิติของการหมุนบริเวณที่ล้อมรอบด้วยแกน X เส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ และเส้นตรง $x = 4$

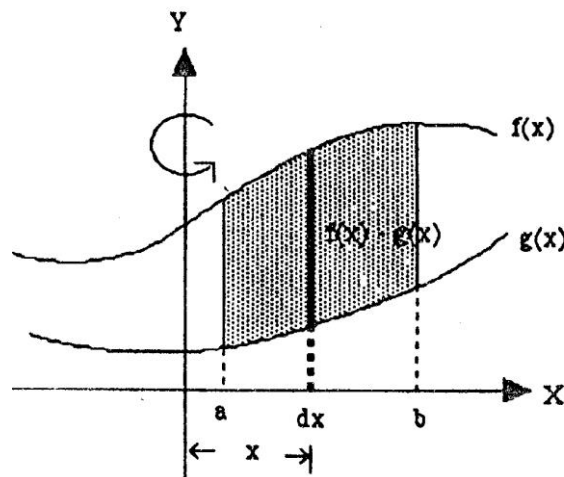
ก.) รอบแกน X

ข.) รอบแกน Y

วิธีทำ

การหาปริมาตรของทรงสามมิติของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

กรณีที่ 1 ถ้า R เป็นทรงสามมิติของการหมุนรอบแกน Y ของบริเวณระหว่างเส้นโค้งต่อเนื่อง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ เมื่อ $a \leq x \leq b$ โดยที่ $a \geq 0$ หรือ $b \leq 0$ อย่างใดอย่างหนึ่ง



1.1) ถ้า $f(x)$ ไม่ตัดกับ $g(x)$ ในช่วง (a, b)

แล้ว ปริมาตร V ของ R คือ

$$V = \left| \int_a^b 2\pi x [f(x) - g(x)] dx \right|$$

1.2) ถ้า $f(x)$ ตัดกับ $g(x)$ บน (a, b) ที่จุด

$x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in (a, b)$ และให้ $a = x_0, b = x_n$

แล้ว $V = I_1 + I_2 + \dots + I_n$

$$\text{เมื่อ } I_i = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} 2\pi x [f(x) - g(x)] dx \right| ; i = 1, 2, 3, \dots, n$$

กรณีที 2 ถ้า R เป็นทรงสามมิติของการหมุนรอบแกน X ของบริเวณระหว่างเส้นโค้งต่อเนื่อง $x = f(y)$ และ $x = g(y)$ เมื่อ $c \leq y \leq d$ โดยที่ $c \geq 0$ หรือ $d \leq 0$ อย่างไม่อย่างหนึ่ง

2.1) ถ้า $f(y)$ ไม่ตัดกับ $g(y)$ ในช่วง (c, d)

แล้ว ปริมาตร V ของ R คือ

$$V = \left| \int_c^d 2\pi y [f(y) - g(y)] dy \right|$$

2.2) ถ้า $f(y)$ ตัดกับ $g(y)$ บน (c, d) ที่จุด

$y_1, y_2, \dots, y_{n-1} \in (c, d)$ และให้ $c = y_0, d = y_n$

แล้ว $V = I_1 + I_2 + \dots + I_n$

เมื่อ $I_i = \left| \int_{y_{i-1}}^{y_i} 2\pi y [f(y) - g(y)] dy \right| ; i = 1, 2, 3, \dots, n$

หมายเหตุ ให้ R เป็นทรงสามมิติของการหมุนบริเวณในระนาบรอบเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y (เส้นตรง $x = h$) หรือรอบเส้นตรงที่ขนานกับแกน X (เส้นตรง $y = k$)

การหาปริมาตร V ของ R สามารถทำได้ทำนองเดียวกันแต่เปลี่ยนรัศมีของเปลือกทรงกระบอกใหม่

จาก x เป็น $x - h$

และ จาก y เป็น $y - k$

โดยมีเงื่อนไขเพิ่มเติมว่า

1. สำหรับกรณีหมุนรอบเส้นตรง $x = h$ แล้วบริเวณที่หมุนจะต้องอยู่ทางขวาหรือทางซ้ายของเส้นตรง $x = h$ ใดอย่างหนึ่งเท่านั้น (นั่นคือ $h \leq a < b$ หรือ $a < b \leq h$ ใดอย่างหนึ่ง) และ

2. กรณีหมุนรอบเส้นตรง $y = k$ แล้วบริเวณที่หมุนต้องอยู่เหนือหรือใต้เส้นตรง $y = k$ ใดอย่างหนึ่งเท่านั้น (นั่นคือ $k \leq c < d$ หรือ $c < d \leq k$ ใดอย่างหนึ่ง)

สรุป! วิธีเลือกกระบอกบาง:

ลากเส้นขนานแกนหมุน หาค่ามีและสูง

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติของการหมุนบริเวณที่ล้อมรอบด้วยแกน X เส้นโค้ง $y = x^2$ และเส้นตรง $x = -2$

(ก) รอบเส้นตรง $x = -3$

(ข) รอบเส้นตรง $y = -1$

วิธีทำ

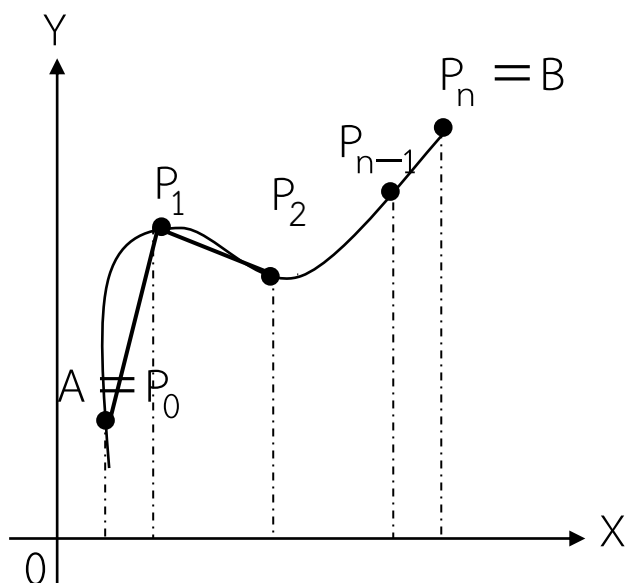
ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติของการหมุนบริเวณที่ล้อมรอบ
ด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 1$ และเส้นตรง $y = x - 1$ จาก $x = 0$ ถึง
 $x = 2$ รอบเส้นตรง $x = 3$

วิธีทำ

2.3 ความยาวเส้นโค้งบนระนาบ

ให้ AB เป็นส่วนส่วนของเส้นโค้ง

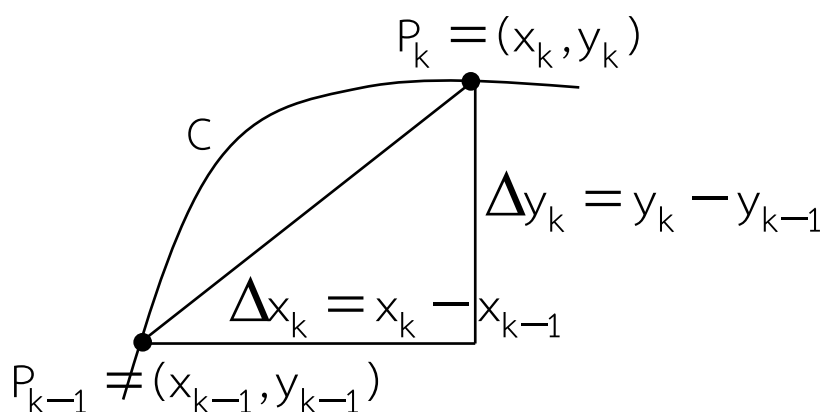
และ L เป็นความยาวของส่วนของเส้นโค้ง AB



หาค่า L โดยแบ่ง AB ออกเป็นเส้นโค้งย่อยเล็ก ๆ n เส้นโค้ง ได้ว่า

$$A = P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n = B$$

เมื่อ P_k แทนจุด (x_k, y_k) บนเส้นโค้ง AB ($k = 0, 1, \dots, n$)



ค่าประมาณของ L คือ $L \approx \sum_{k=1}^n L_k$ โดยที่

$$\begin{aligned} L_k &= |P_{k-1}P_k| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \end{aligned}$$

กรณีที่ 1 เส้นโค้ง C กำหนดโดยสมการ

$$x = f(t) \text{ และ } y = g(t) \text{ เมื่อ } a \leq t \leq b$$

$$\begin{aligned} L_k &= \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2} \\ &\approx \sqrt{[f'(t)\Delta t_k]^2 + [g'(t)\Delta t_k]^2} \quad \text{เมื่อ } \Delta t_k \rightarrow 0 \\ &\approx \sqrt{[f'(t_k)]^2 + [g'(t_k)]^2} \Delta t_k \end{aligned}$$

จะได้ เมื่อ $\Delta t_k \rightarrow 0$ แล้ว

$$L \approx \sum_{k=1}^n L_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{[f'(t_k)]^2 + [g'(t_k)]^2} \Delta t_k$$

แปลงเป็นปริพันธ์จำกัดเขต ได้

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t_k)]^2 + [g'(t_k)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

ตัวอย่าง จงหาความยาวของส่วนโค้งที่กำหนดโดยสมการ

$$x = 2t^3 \text{ และ } y = 3t^2 \text{ จาก } t = 0 \text{ ถึง } t = 4$$

วิธีทำ

กรณีที่ 2 เส้นโค้ง C กำหนดโดยสมการ $y = f(x)$

เมื่อ $y = f(x)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้บน $[a, b]$

กำหนดให้ $x = t$ ได้สมการเส้นโค้ง C คือ

$$x = t, y = f(t), a \leq t \leq b$$

ซึ่ง $\frac{dx}{dt} = 1$ และ $\frac{dy}{dt} = f'(t)$

เนื่องจาก $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = f'(t)$

ดังนั้น

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1 + [f'(t)]^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + [f'(x)]^2$$

ดังนั้น ความยาวของเส้นโค้ง $y = f(x)$ กำหนดโดย

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

ตัวอย่าง จงหาความยาวของเส้นโค้ง $y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$

จาก $x = 0$ ถึง $x = 2$

วิธีทำ

กรณีที่ 3 เส้นโค้ง C กำหนดโดยสมการ $x = g(y)$
เมื่อ $x = g(y)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้บน $[c, d]$

ทำนองเดียวกับกรณีที่ 2 ได้ว่า

ความยาวของเส้นโค้ง $x = g(y)$ กำหนดโดย

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy$$

ตัวอย่าง จงหาความยาวของเส้นโค้ง $x = 3y^{\frac{3}{2}} - 1$

จาก $y = 0$ ถึง $y = 4$

วิธีทำ