สมการเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์ขั้นแนะนำ

Introduction to differential equations and their applications

นิมิต นิมานะ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

สมการเชิงอนุพันธ์

หากเรายังจำได้! ในวิชาแคลคูลัส ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน $y = f(x)$ แล้วเราจะได้ว่าอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

คือฟังก์ชันของตัวแปร x ที่ได้จากการคำนวณโดยใช้บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เหมาะสมกับฟังก์ชัน f นั้น ๆ ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน

$$y = e^{x^2}$$

เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $(-\infty, +\infty)$ และโดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}$$

สมการเชิงอนุพันธ์

หากเรายังจำได้! ในวิชาแคลคูลัส ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน $y=f(x)$ แล้วเราจะได้ว่าอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

คือฟังก์ชันของตัวแปร x ที่ได้จากการคำนวณโดยใช้บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เหมาะสมกับฟังก์ชัน f นั้น ๆ ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน

$$y=e^{x^2}$$

เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $(-\infty,+\infty)$ และโดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx}=2xe^{x^2}$$

สมการเชิงอนุพันธ์

หากเรายังจำได้! ในวิชาแคลคูลัส ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน $y = f(x)$ แล้วเราจะได้ว่าอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

คือฟังก์ชันของตัวแปร x ที่ได้จากการคำนวณโดยใช้บทนิยามหรือทฤษฎีบทที่เหมาะสมกับฟังก์ชัน f นั้น ๆ ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน

$$y = e^{x^2}$$

เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $(-\infty, +\infty)$ และโดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}$$

สมการเชิงอนุพันธ์

ซึ่งหากเราแทนค่าตัวแปร y ในสมการด้วย e^{x^2} จะได้ว่า อนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

ทีนี้ลองพิจารณาในทางกลับกันว่า ถ้าเรากำลังสนทนากับเพื่อนคนหนึ่ง และเพื่อนคนดังกล่าวนี้ให้เราหาผลเฉลย (solution) ของสมการนี้
แน่นอนว่าเราจะต้อง “งง” แล้วถามเพื่อนคนนั้นกลับไปว่า “ฟังก์ชัน y คืออะไร?”

ทำใจนะ! เราจะพบกับคำถามนี้ตลอดทั้งรายวิชาสมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์

ซึ่งหากเราแทนค่าตัวแปร y ในสมการด้วย e^{x^2} จะได้ว่า อนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

ทีนี้ลองพิจารณาในทางกลับกันว่า ถ้าเรากำลังสนทนากับเพื่อนคนหนึ่ง และเพื่อนคนดังกล่าวนี้ให้เราหาผลเฉลย (solution) ของสมการนี้
แน่นอนว่าเราจะต้อง “งง” แล้วถามเพื่อนคนนั้นกลับไปว่า “ฟังก์ชัน y คืออะไร?”

ทำใจนะ! เราจะพบกับคำถามนี้ตลอดทั้งรายวิชาสมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์

ซึ่งหากเราแทนค่าตัวแปร y ในสมการด้วย e^{x^2} จะได้ว่า อนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

ทีนี้ลองพิจารณาในทางกลับกันว่า ถ้าเรากำลังสนทนากับเพื่อนคนหนึ่ง และเพื่อนคนดังกล่าวนี้ให้เราหาผลเฉลย (solution) ของสมการนี้

แน่นอนว่าเราจะต้อง "งง" แล้วถามเพื่อนคนนั้นกลับไปว่า "ฟังก์ชัน y คืออะไร?"

ทำใจนะ! เราจะพบกับคำถามนี้ตลอดทั้งรายวิชาสมการเชิงอนุพันธ์

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

สมมติว่า ณ ขณะเวลาหนึ่งมีแบคทีเรียจำนวน P_0 ตัว หลังจากนั้น ณ เวลา $t = 1$ ชั่วโมง พบว่ามีแบคทีเรียอยู่จำนวน $\frac{3}{2}P_0$ ถ้าอัตราการเพิ่มขึ้นของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนแบคทีเรีย $P(t)$ ณ เวลา t ใด ๆ จงหาเวลา t ที่ทำให้จำนวนของแบคทีเรียเพิ่มขึ้นเป็นสามเท่าของจำนวนเดิม

"ทำอย่างไรดี ?"

ในวิชาชีววิทยา อัตราการเพิ่มขึ้นของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก เช่น แบคทีเรีย ในช่วงเวลาหนึ่ง ๆ จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับประชากรของสิ่งมีชีวิตนั้น ๆ ณ เวลา t ทั้งนี้ หากเราทราบจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก ณ เวลา t_0 ว่ามีจำนวน P_0 แล้ว เราสามารถพิจารณาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อคำนวณหาจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิตในอนาคตได้

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

สมมติว่า ณ ขณะเวลาหนึ่งมีแบคทีเรียจำนวน P_0 ตัว หลังจากนั้น ณ เวลา $t = 1$ ชั่วโมง พบว่ามีแบคทีเรียอยู่จำนวน $\frac{3}{2}P_0$ ถ้าอัตราการเพิ่มขึ้นของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนแบคทีเรีย $P(t)$ ณ เวลา t ใด ๆ จงหาเวลา t ที่ทำให้จำนวนของแบคทีเรียเพิ่มขึ้นเป็นสามเท่าของจำนวนเดิม

"ทำอย่างไรดี ?"

ในวิชาชีววิทยา อัตราการเพิ่มขึ้นของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก เช่น แบคทีเรีย ในช่วงเวลาหนึ่ง ๆ จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับประชากรของสิ่งมีชีวิตนั้น ๆ ณ เวลา t ทั้งนี้ หากเราทราบจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก ณ เวลา t_0 ว่ามีจำนวน P_0 แล้ว เราสามารถพิจารณาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อคำนวณหาจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิตในอนาคตได้

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

สมมติว่า ณ ขณะเวลาหนึ่งมีแบคทีเรียจำนวน P_0 ตัว หลังจากนั้น ณ เวลา $t = 1$ ชั่วโมง พบว่ามีแบคทีเรียอยู่จำนวน $\frac{3}{2}P_0$ ถ้าอัตราการเพิ่มขึ้นของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนแบคทีเรีย $P(t)$ ณ เวลา t ใด ๆ จงหาเวลา t ที่ทำให้จำนวนของแบคทีเรียเพิ่มขึ้นเป็นสามเท่าของจำนวนเดิม

"ทำอย่างไรดี ?"

ในวิชาชีววิทยา อัตราการเพิ่มขึ้นของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก เช่น แบคทีเรีย ในช่วงเวลาหนึ่ง ๆ จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับประชากรของสิ่งมีชีวิตนั้น ๆ ณ เวลา t ทั้งนี้ หากเราทราบจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก ณ เวลา t_0 ว่ามีจำนวน P_0 แล้ว เราสามารถพิจารณาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อคำนวณหาจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิตในอนาคตได้

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

สมมติว่า ณ ขณะเวลาหนึ่งมีแบคทีเรียจำนวน P_0 ตัว หลังจากนั้น ณ เวลา $t = 1$ ชั่วโมง พบว่ามีแบคทีเรียอยู่จำนวน $\frac{3}{2}P_0$ ถ้าอัตราการเพิ่มขึ้นของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนแบคทีเรีย $P(t)$ ณ เวลา t ใด ๆ จงหาเวลา t ที่ทำให้จำนวนของแบคทีเรียเพิ่มขึ้นเป็นสามเท่าของจำนวนเดิม

"ทำอย่างไรดี ?"

ในวิชาชีววิทยา อัตราการเพิ่มขึ้นของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก เช่น แบคทีเรีย ในช่วงเวลาหนึ่ง ๆ จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับประชากรของสิ่งมีชีวิตนั้น ๆ ณ เวลา t ทั้งนี้ หากเราทราบจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก ณ เวลา t_0 ว่ามีจำนวน P_0 แล้ว เราสามารถพิจารณาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อคำนวณหาจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิตในอนาคตได้

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

พิจารณาปรากฏการณ์การเพิ่มและการสลายด้วยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad P(t_0) = P_0$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการเป็นสัดส่วนโดยตรง

ความสัมพันธ์ของจำนวนแบคทีเรียกับเวลา t ใด ๆ คือ

$$P(t) = P_0 e^{0.4055t}$$

และคำตอบ คือ

$$t \approx 2.71 \text{ชั่วโมง}$$

“หือ อะไรนะ...”

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

พิจารณาปรากฏการณ์การเพิ่มและการสลายด้วยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad P(t_0) = P_0$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการเป็นสัดส่วนโดยตรง

ความสัมพันธ์ของจำนวนแบคทีเรียกับเวลา t ใด ๆ คือ

$$P(t) = P_0 e^{0.4055t}$$

และคำตอบ คือ

$$t \approx 2.71 \text{ชั่วโมง}$$

"หึ๊ะ อะไรนะ..."

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

พิจารณาปรากฏการณ์การเพิ่มและการสลายด้วยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad P(t_0) = P_0$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการเป็นสัดส่วนโดยตรง

ความสัมพันธ์ของจำนวนแบคทีเรียกับเวลา t ใด ๆ คือ

$$P(t) = P_0 e^{0.4055t}$$

และคำตอบ คือ

$$t \approx 2.71 \text{ชั่วโมง}$$

"ห๊ะ อะไรนะ..."

สมการเชิงอนุพันธ์

ก่อนที่จะนิยาม “สมการเชิงอนุพันธ์” เราจำเป็นต้องรู้จักศัพท์เฉพาะดังนี้

ถ้าเรามีสมการที่มีอนุพันธ์ของตัวแปรหนึ่งเทียบกับอีกตัวแปรหนึ่ง แล้วเราจะเรียกตัวแปรแรกว่า ตัวแปรตาม (dependent variable) และเรียกอีกตัวแปรว่า ตัวแปรต้น หรือ ตัวแปรอิสระ (independent variable) ตัวอย่างเช่น สมการ

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+x=0$$

มีตัวแปร x เป็นตัวแปรต้น และตัวแปร y เป็นตัวแปรตาม

สมการเชิงอนุพันธ์

เราเรียกสมการที่มีอนุพันธ์ของตัวแปรตามอย่างน้อยหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรต้นอย่างน้อยหนึ่งตัวว่า สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation, DE)

สมการเชิงอนุพันธ์

ก่อนที่จะนิยาม "สมการเชิงอนุพันธ์" เราจำเป็นต้องรู้จักศัพท์เฉพาะดังนี้

ถ้าเรามีสมการที่มีอนุพันธ์ของตัวแปรหนึ่งเทียบกับอีกตัวแปรหนึ่ง แล้วเราจะเรียกตัวแปรแรกว่า ตัวแปรตาม (dependent variable) และเรียกอีกตัวแปรว่า ตัวแปรต้น หรือ ตัวแปรอิสระ (independent variable) ตัวอย่างเช่น สมการ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + x = 0$$

มีตัวแปร x เป็นตัวแปรต้น และตัวแปร y เป็นตัวแปรตาม

สมการเชิงอนุพันธ์

เราเรียกสมการที่มีอนุพันธ์ของตัวแปรตามอย่างน้อยหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรต้นอย่างน้อยหนึ่งตัวว่า สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation, DE)

สมการเชิงอนุพันธ์

ก่อนที่จะนิยาม “สมการเชิงอนุพันธ์” เราจำเป็นต้องรู้จักศัพท์เฉพาะดังนี้

ถ้าเรามีสมการที่มีอนุพันธ์ของตัวแปรหนึ่งเทียบกับอีกตัวแปรหนึ่ง แล้วเราจะเรียกตัวแปรแรกว่า ตัวแปรตาม (dependent variable) และเรียกอีกตัวแปรว่า ตัวแปรต้น หรือ ตัวแปรอิสระ (independent variable) ตัวอย่างเช่น สมการ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + x = 0$$

มีตัวแปร x เป็นตัวแปรต้น และตัวแปร y เป็นตัวแปรตาม

สมการเชิงอนุพันธ์

เราเรียกสมการที่มีอนุพันธ์ของตัวแปรตามอย่างน้อยหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรต้นอย่างน้อยหนึ่งตัวว่า สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation, DE)

สมการเชิงอนุพันธ์

เราสามารถจำแนกสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

1) จำแนกโดยชนิด (type)
2) จำแนกโดยอันดับ (order)
3) จำแนกโดยความเป็นเชิงเส้น (linearity)

จำแนกโดยชนิด (type) : เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรอย่างน้อยหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรต้นเพียงหนึ่งตัวว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation, ODE) ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} + y &= e^x \\
\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - y &= 0 \\
\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} &= t
\end{aligned}$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Why?)

สมการเชิงอนุพันธ์

เราสามารถจำแนกสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

1) จำแนกโดยชนิด (type)
2) จำแนกโดยอันดับ (order)
3) จำแนกโดยความเป็นเชิงเส้น (linearity)

<u>จำแนกโดยชนิด (type)</u> : เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรอย่างน้อยหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรต้นเพียงหนึ่งตัวว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation, ODE) ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} + y &= e^x \\
\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - y &= 0 \\
\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} &= t
\end{aligned}
$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Why?)

สมการเชิงอนุพันธ์

เราสามารถจำแนกสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

1) จำแนกโดยชนิด (type)
2) จำแนกโดยอันดับ (order)
3) จำแนกโดยความเป็นเชิงเส้น (linearity)

จำแนกโดยชนิด (type) : เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรอย่างน้อยหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรต้นเพียงหนึ่งตัวว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation, ODE) ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + y &= e^x \\ \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - y &= 0 \\ \frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} &= t \end{aligned}$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Why?)

สมการเชิงอนุพันธ์

และเราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรอย่างน้อยหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรต้นอย่างน้อยสองตัวว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation, PDE) ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial t} &= -\frac{\partial x}{\partial s} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\
a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2k\frac{\partial u}{\partial t}
\end{aligned}
$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Why?) [1]

---

[1] ในที่นี้ เราใช้สัญลักษณ์แบบไลบ์นิทซ์ (Leibniz notation) เช่น $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$ ควบคู่ไปกับสัญลักษณ์แบบไพร์ม (prime notation) เช่น $y', y'', y''', \ldots$ แทนอนุพันธ์สามัญ และในกรณีทั่วไป เราใช้สัญลักษณ์ $\frac{d^ny}{dx^n}$ และ $y^{(n)}$ แทนอนุพันธ์สามัญอันดับ n และในรายวิชานี้เราจะศึกษาเฉพาะสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเท่านั้น และจากนี้ไปจะเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ใด ๆ ในรายวิชานี้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์

และเราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยอนุพันธ์ของตัวแปรอย่างน้อยหนึ่งตัวเทียบกับตัวแปรต้นอย่างน้อยสองตัวว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation, PDE) ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial t} &= -\frac{\partial x}{\partial s} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\
a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2k \frac{\partial u}{\partial t}
\end{aligned}
$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Why?) [1]

[1]ในที่นี้ เราใช้สัญลักษณ์แบบไลบ์นิทซ์ (Leibniz notation) เช่น $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$ ควบคู่ไปกับสัญลักษณ์แบบไพร์ม (prime notation) เช่น $y', y'', y''', \ldots$ แทนอนุพันธ์สามัญ และในกรณีทั่วไป เราใช้สัญลักษณ์ $\frac{d^ny}{dx^n}$ และ $y^{(n)}$ แทนอนุพันธ์สามัญอันดับ n และในรายวิชานี้เราจะศึกษาเฉพาะสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเท่านั้น และจากนี้ไปจะเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ใด ๆ ในรายวิชานี้ ว่า สมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์

จำแนกโดยอันดับ (order) เราเรียกอันดับสูงสุดของอนุพันธ์ในสมการเชิงอนุพันธ์ว่า อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ (order of a differential equation) ตัวอย่างเช่น

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง (Why?) ในบางครั้งสมการเชิงอนุพันธ์จะเขียนอยู่ในรูป

$$x^2 dy + y dx = 0$$

ซึ่งสามารถจัดรูปใหม่ได้

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

หรือ

$$x^2 y' + y = 0$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

สมการเชิงอนุพันธ์

จำแนกโดยอันดับ (order) เราเรียกอันดับสูงสุดของอนุพันธ์ในสมการเชิงอนุพันธ์ว่า อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ (order of a differential equation) ตัวอย่างเช่น

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง (Why?) ในบางครั้งสมการเชิงอนุพันธ์จะเขียนอยู่ในรูป

$$x^2dy + ydx = 0$$

ซึ่งสามารถจัดรูปใหม่ได้

$$x^2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

หรือ

$$x^2y' + y = 0$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

สมการเชิงอนุพันธ์

จำแนกโดยอันดับ (order) เราเรียกอันดับสูงสุดของอนุพันธ์ในสมการเชิงอนุพันธ์ว่า อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ (order of a differential equation) ตัวอย่างเช่น

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง (Why?) ในบางครั้งสมการเชิงอนุพันธ์จะเขียนอยู่ในรูป

$$x^2dy + ydx = 0$$

ซึ่งสามารถจัดรูปใหม่ได้

$$x^2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

หรือ

$$x^2y' + y = 0$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

สมการเชิงอนุพันธ์

จำแนกโดยความเป็นเชิงเส้น (linearity) เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

โดยที่ $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x ว่า สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (linear differential equation) สังเกตว่า สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นมีลักษณะสำคัญดังนี้

- ตัวแปรตาม y และอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ มีเลขชี้กำลัง (degree) เท่ากับ 1
- สัมประสิทธิ์ $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x)$ และ $a_0(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรต้น x

สมการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned} (y-x)dx+4xdy &= 0 \\ y''-2y'+y &= 0 \\ x^3y^{(3)}-y''+3xy'+5y &= e^{3x} \end{aligned}$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (Why?) และเราจะเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นว่า สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น (nonlinear differential equation) ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned} (1-y)y'+2y &= \ln x \\ y''+\sin y &= 0 \\ (y'')^2+y^2 &= 0 \end{aligned}$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น (Why?)

สมการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned} (y-x)dx+4xdy &= 0 \\ y''-2y'+y &= 0 \\ x^3y^{(3)}-y''+3xy'+5y &= e^{3x} \end{aligned}$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (Why?) และเราจะเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นว่า สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น (nonlinear differential equation) ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned} (1-y)y'+2y &= \ln x \\ y''+\sin y &= 0 \\ (y'')^2+y^2 &= 0 \end{aligned}$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น (Why?)

สมการเชิงอนุพันธ์

จงระบุตัวแปรต้น ตัวแปรตาม และอันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(1-x)y''' - 4xy + 5y = \cos x$
2. $x\frac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$
3. $yy' + 2y + 1 = x^2$
4. $x^2dy + (y - xy - xe^x)dx = 0$
5. $x^3y^{(4)} - x^2y'' + 4xy' - 3y = 0$
6. $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \sin y$
7. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$
8. $\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{k}{R^2}$
9. $(\sin x)y''' - (\cos x)y' = 2$
10. $(1-y^2)dx + xdy = 0$

จงระบุว่าสมการเชิงอนุพันธ์แต่ละข้อเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นหรือไม่

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

โดยทั่วไปแล้ว เราจะเขียนสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ของตัวแปรต้น x และตัวแปรตาม y ในรูป

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \tag{1}$$

โดยที่ F เป็นฟังก์ชันของตัวแปร $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$ และเราสามารถนิยามผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (1) ได้ดังนี้

ผลเฉลยชัดแจ้ง

ให้ I เป็นช่วงของจำนวนจริงใด ๆ และกำหนดให้สมการเชิงอนุพันธ์ (1) นิยามบนช่วง I เราจะกล่าวว่า ฟังก์ชัน $\phi(x)$ ที่นิยามบนช่วง I เป็น ผลเฉลยชัดแจ้ง (explicit solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ (1) บนช่วง I ถ้า $\phi(x)$ สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ (1) สำหรับทุกจำนวนจริง $x \in I$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่าง

จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\phi(x) = \frac{x^4}{16}$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = 0$$

บนช่วง $(-\infty, +\infty)$

กำหนดให้ $x \in (-\infty, +\infty)$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ เนื่องจาก $\frac{d}{dx}\phi(x) = \frac{x^3}{4}$ ซึ่งแทนค่าในสมการเชิงอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\phi(x) - x \cdot (\phi(x))^{1/2} &= \frac{x^3}{4} - x \cdot \left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} \\ &= \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} = 0 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง

จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\phi(x) = \frac{x^4}{16}$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = 0$$

บนช่วง $(-\infty, +\infty)$

กำหนดให้ $x \in (-\infty, +\infty)$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ เนื่องจาก $\frac{d}{dx}\phi(x) = \frac{x^3}{4}$ ซึ่งแทนค่าในสมการเชิงอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\phi(x) - x \cdot (\phi(x))^{1/2} &= \frac{x^3}{4} - x \cdot \left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} \\ &= \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} = 0 \end{aligned}$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่าง

จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\phi(x) = \frac{x^4}{16}$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = 0$$

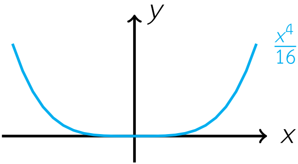
บนช่วง $(-\infty, +\infty)$

กำหนดให้ $x \in (-\infty, +\infty)$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ เนื่องจาก $\frac{d}{dx}\phi(x) = \frac{x^3}{4}$ ซึ่งแทนค่าในสมการเชิงอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\phi(x) - x \cdot (\phi(x))^{1/2} &= \frac{x^3}{4} - x \cdot \left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} \\ &= \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} = 0\end{aligned}$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

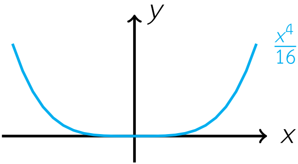
เนื่องจาก x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ในช่วง $(-\infty, +\infty)$ เพราะฉะนั้น ฟังก์ชัน $\phi(x) = \frac{x^4}{16}$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้บนช่วง $(-\infty, +\infty)$ ซึ่งลักษณะของเส้นโค้งผลเฉลย (solution curve) แสดงในรูปต่อไปนี้



สังเกตว่า ฟังก์ชัน $\phi(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in (-\infty, +\infty)$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ด้วย (Why?) ซึ่งเราเรียกผลเฉลย $\phi(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in I$ ว่า ผลเฉลยชัด (trivial solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

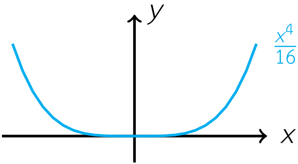
เนื่องจาก x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ในช่วง $(-\infty, +\infty)$ เพราะฉะนั้น ฟังก์ชัน $\phi(x) = \frac{x^4}{16}$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้บนช่วง $(-\infty, +\infty)$ ซึ่งลักษณะของเส้นโค้งผลเฉลย (solution curve) แสดงในรูปต่อไปนี้



สังเกตว่า ฟังก์ชัน $\phi(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in (-\infty, +\infty)$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ด้วย (Why?) ซึ่งเราเรียกผลเฉลย $\phi(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in I$ ว่า ผลเฉลยชัด (trivial solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

เนื่องจาก x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ในช่วง $(-\infty, +\infty)$ เพราะฉะนั้น ฟังก์ชัน $\phi(x) = \frac{x^4}{16}$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้บนช่วง $(-\infty, +\infty)$ ซึ่งลักษณะของเส้นโค้งผลเฉลย (solution curve) แสดงในรูปต่อไปนี้



สังเกตว่า ฟังก์ชัน $\phi(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in (-\infty, +\infty)$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ด้วย (Why?) ซึ่งเราเรียกผลเฉลย $\phi(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in I$ ว่า **ผลเฉลยชัด** (trivial solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่าง

จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\phi(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x^2}y = 0$$

บนช่วง $(-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$ และจงแสดงว่าฟังก์ชัน $\varphi(x) = x^3$ ไม่เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้บนช่วง $(-\infty, +\infty)$

กำหนดให้ $x \in (-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ เนื่องจาก $\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$ ซึ่งแทนค่าในสมการเชิงอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) - \frac{2}{x^2} \cdot \phi(x) = \left(2 - \frac{2}{x^3}\right) - \frac{2}{x^2} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) = 0$$

ตัวอย่าง

จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\phi(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x^2}y = 0$$

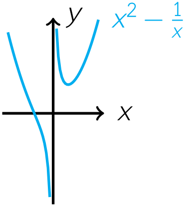
บนช่วง $(-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$ และจงแสดงว่าฟังก์ชัน $\varphi(x) = x^3$ ไม่เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์นี้บนช่วง $(-\infty, +\infty)$

กำหนดให้ $x \in (-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ เนื่องจาก $\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$ ซึ่งแทนค่าในสมการเชิงอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) - \frac{2}{x^2} \cdot \phi(x) = \left(2 - \frac{2}{x^3}\right) - \frac{2}{x^2} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) = 0$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

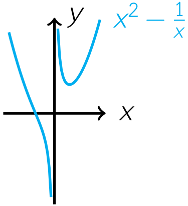
เนื่องจาก x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ในช่วง $(-\infty,+\infty)\setminus\{0\}$ เพราะฉะนั้น ฟังก์ชัน $\phi(x)=x^2-\frac{1}{x}$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์บนช่วง $(-\infty,+\infty)$ โดยลักษณะของเส้นโค้งผลเฉลยแสดงในรูปต่อไปนี้



อย่างไรก็ตาม สำหรับแต่ละ $x\in(-\infty,+\infty)\setminus\{0\}$ เราทราบว่า $\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)=6x$ ซึ่งแทนค่าในสมการเชิงอนุพันธ์ ทำให้ได้ว่า $\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)-\frac{2}{x^2}\cdot\varphi(x)=6x-\frac{2}{x^2}\cdot x^3=4x\neq 0$ นั่นคือ ฟังก์ชัน $\varphi(x)=x^3$ ไม่เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์บนช่วง $(-\infty,+\infty)$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

เนื่องจาก x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ในช่วง $(-\infty,+\infty)\setminus\{0\}$ เพราะฉะนั้น ฟังก์ชัน $\phi(x)=x^2-\frac{1}{x}$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์บนช่วง $(-\infty,+\infty)$ โดยลักษณะของเส้นโค้งผลเฉลยแสดงในรูปต่อไปนี้



อย่างไรก็ตาม สำหรับแต่ละ $x\in(-\infty,+\infty)\setminus\{0\}$ เราทราบว่า $\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)=6x$ ซึ่งแทนค่าในสมการเชิงอนุพันธ์ ทำให้ได้ว่า
$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)-\frac{2}{x^2}\cdot\varphi(x)=6x-\frac{2}{x^2}\cdot x^3=4x\neq 0$ นั่นคือ ฟังก์ชัน $\varphi(x)=x^3$ ไม่เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์บนช่วง $(-\infty,+\infty)$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

ผลเฉลยโดยปริยาย

ให้ I เป็นช่วงของจำนวนจริงใด ๆ และกำหนดให้สมการเชิงอนุพันธ์ (1) นิยามบนช่วง I เราจะกล่าวว่า ความสัมพันธ์ $\Phi(x,y)=0$ เป็น ผลเฉลยโดยปริยาย (implicit solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ (1) บนช่วง I ถ้ามีฟังก์ชัน $y=\phi(x)$ อย่างน้อยหนึ่งตัวที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ $\Phi(x,y)=0$ และเป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ (1) บนช่วง I

ตัวอย่าง

จงแสดงว่าความสัมพันธ์ $x^2+y^2=9$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

บนช่วงเปิด $(-3,3)$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

ผลเฉลยโดยปริยาย

ให้ I เป็นช่วงของจำนวนจริงใด ๆ และกำหนดให้สมการเชิงอนุพันธ์ (1) นิยามบนช่วง I เราจะกล่าวว่า ความสัมพันธ์ $\Phi(x,y)=0$ เป็น ผลเฉลยโดยปริยาย (implicit solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ (1) บนช่วง I ถ้ามีฟังก์ชัน $y=\phi(x)$ อย่างน้อยหนึ่งตัวที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ $\Phi(x,y)=0$ และเป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ (1) บนช่วง I

ตัวอย่าง

จงแสดงว่าความสัมพันธ์ $x^2+y^2=9$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

บนช่วงเปิด $(-3,3)$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

กำหนดให้ $x \in (-3,3)$ พิจารณาความสัมพันธ์ $x^2 + y^2 = 9$ เมื่อจัดตัวแปร y ให้อยู่ในรูปของตัวแปรต้น x จะได้ $y_1 = \sqrt{9-x^2}$ และ $y_2 = -\sqrt{9-x^2}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เมื่อ $x \in (-3,3)$ เนื่องจาก y_1 และ y_2 เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ (Why?) โดยมีลักษณะของเส้นโค้งผลเฉลยชัดแจ้งดังรูป (ก) และ (ข) จึงสรุปได้ว่า ความสัมพันธ์ $x^2 + y^2 = 9$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ ซึ่งลักษณะของเส้นโค้งผลเฉลยโดยปริยายแสดงในรูป (ค)

(ก) เส้นโค้งผลเฉลยชัดแจ้ง $y_1 = \sqrt{9-x^2}$

(ข) เส้นโค้งผลเฉลยชัดแจ้ง $y_2 = -\sqrt{9-x^2}$

(ค) เส้นโค้งผลเฉลยโดยปริยาย $x^2 + y^2 = 9$

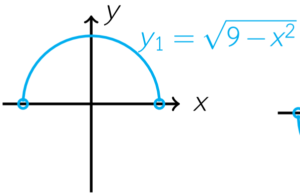
ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

กำหนดให้ $x \in (-3,3)$ พิจารณาความสัมพันธ์ $x^2+y^2=9$ เมื่อจัดตัวแปร y ให้อยู่ในรูปของตัวแปรต้น x จะได้ $y_1=\sqrt{9-x^2}$ และ $y_2=-\sqrt{9-x^2}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เมื่อ $x \in (-3,3)$ เนื่องจาก y_1 และ y_2 เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ (Why?) โดยมีลักษณะของเส้นโค้งผลเฉลยชัดแจ้งดังรูป (ก) และ (ข) จึงสรุปได้ว่า ความสัมพันธ์ $x^2+y^2=9$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ ซึ่งลักษณะของเส้นโค้งผลเฉลยโดยปริยายแสดงในรูป (ค)

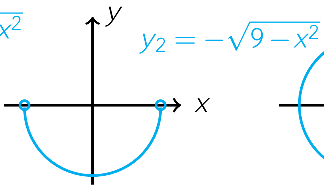
(ก) เส้นโค้งผลเฉลยชัดแจ้ง $y_1=\sqrt{9-x^2}$ (ข) เส้นโค้งผลเฉลยชัดแจ้ง $y_2=-\sqrt{9-x^2}$ (ค) เส้นโค้งผลเฉลยโดยปริยาย $x^2+y^2=9$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

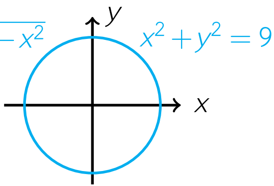
กำหนดให้ $x \in (-3,3)$ พิจารณาความสัมพันธ์ $x^2+y^2=9$ เมื่อจัดตัวแปร y ให้อยู่ในรูปของตัวแปรต้น x จะได้ $y_1=\sqrt{9-x^2}$ และ $y_2=-\sqrt{9-x^2}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เมื่อ $x \in (-3,3)$ เนื่องจาก y_1 และ y_2 เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ (Why?) โดยมีลักษณะของเส้นโค้งผลเฉลยชัดแจ้งดังรูป (ก) และ (ข) จึงสรุปได้ว่า ความสัมพันธ์ $x^2+y^2=9$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ ซึ่งลักษณะของเส้นโค้งผลเฉลยโดยปริยายแสดงในรูป (ค)



(ก) เส้นโค้งผลเฉลยชัดแจ้ง $y_1=\sqrt{9-x^2}$



(ข) เส้นโค้งผลเฉลยชัดแจ้ง $y_2=-\sqrt{9-x^2}$



(ค) เส้นโค้งผลเฉลยโดยปริยาย $x^2+y^2=9$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ในข้อต่อไปนี้เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ในข้อนั้น ๆ หรือไม่

- $x = 2\cos t - 3\sin t, \quad x'' + x = 0$
- $y = \sin x + x^2, \quad y'' + y = x^2 + 2$
- $x = \cos 2t, \quad x' + tx = \sin 2t$
- $\theta = 2e^{3t} - e^{2t}, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} - \theta\frac{d\theta}{dt} + 3\theta = -2e^{2t}$
- $y = 3\sin 2x + e^{-x}, \quad y'' + 4y = 5e^{-x}$

จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ในข้อต่อไปนี้เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ในข้อนั้น ๆ หรือไม่ (บนช่วงที่ความสัมพันธ์นิยามได้)

- $y - \ln y = x^2 + 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y-1}$
- $x^2 + y^2 = 4, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$
- $e^{xy} + y = x - 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^{-xy} - y}{e^{-xy} + x}$
- $x^2 - \sin(x+y) = 1, \quad y' = 2x\sec(x+y) - 1$
- $\sin y + xy - x^3 = 2, \quad y'' = \frac{6xy' + (y')^3\sin y - 2(y')^2}{3x^2 - y}$

ปัญหาค่าเริ่มต้น

กำหนดให้สมการเชิงอนุพันธ์ (1) นิยามบนช่วง I และ $x_0 \in I$ เราจะเรียกการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (1) บนช่วง I ที่ผลเฉลยดังกล่าวสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition)

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ \frac{d}{dx}y(x_0) &= y_1, \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}y(x_0) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

โดยที่ $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ เป็นค่าคงตัว ว่า ปัญหาค่าเริ่มต้น (initial value problem)

ปัญหาค่าเริ่มต้น

ในกรณีของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ปัญหาค่าเริ่มต้นจะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(x_0) = y_0$$

และในกรณีของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง เงื่อนไขเริ่มต้นจะอยู่ในรูป

$$y(x_0) = y_0, \frac{d}{dx}y(x_0) = y_1$$

เงื่อนไขเริ่มต้นที่มาจากวิชาฟิสิกส์ เช่น เมื่อให้เวลา t เป็นตัวแปรต้น จะพบว่าเงื่อนไข $y(t_0) = y_0$ และ $y'(t_0) = y_1$ หมายถึง ตำแหน่ง และความเร็วของวัตถุ ณ บางจุดเริ่มต้น ขณะเวลา t_0 ตามลำดับนั่นเอง

ปัญหาค่าเริ่มต้น

ในกรณีของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ปัญหาค่าเริ่มต้นจะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(x_0) = y_0$$

และในกรณีของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง เงื่อนไขเริ่มต้นจะอยู่ในรูป

$$y(x_0) = y_0, \frac{d}{dx}y(x_0) = y_1$$

เงื่อนไขเริ่มต้นที่มาจากวิชาฟิสิกส์ เช่น เมื่อให้เวลา t เป็นตัวแปรต้น จะพบว่าเงื่อนไข $y(t_0) = y_0$ และ $y'(t_0) = y_1$ หมายถึง ตำแหน่ง และความเร็วของวัตถุ ณ บางจุดเริ่มต้น ขณะเวลา t_0 ตามลำดับนั่นเอง

ปัญหาค่าเริ่มต้น

ในกรณีของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ปัญหาค่าเริ่มต้นจะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(x_0) = y_0$$

และในกรณีของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง เงื่อนไขเริ่มต้นจะอยู่ในรูป

$$y(x_0) = y_0, \frac{d}{dx}y(x_0) = y_1$$

เงื่อนไขเริ่มต้นที่มาจากวิชาฟิสิกส์ เช่น เมื่อให้เวลา t เป็นตัวแปรต้น จะพบว่าเงื่อนไข $y(t_0) = y_0$ และ $y'(t_0) = y_1$ หมายถึง ตำแหน่ง และความเร็วของวัตถุ ณ บางจุดเริ่มต้น ขณะเวลา t_0 ตามลำดับนั่นเอง

ปัญหาค่าเริ่มต้น

ตัวอย่าง

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} - y = 0; y(0) = 3$$

กำหนดให้พารามิเตอร์ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ และให้ $x \in (-\infty, +\infty)$ พิจารณา $\phi(x) = ce^x$ จะได้ $\phi'(x) = ce^x$ จึงได้ว่า $\phi'(x) - \phi'(x) = ce^x - ce^x = 0$ เพราะฉะนั้น วงศ์ของฟังก์ชัน $\phi(x) = ce^x$ เป็นวงศ์ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ พิจารณาเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 3$ (แทนค่า $x = 0$ และ $y = 3$) ในวงศ์ของผลเฉลยดังกล่าว จะได้ $3 = ce^0 = c$ นั่นคือ ฟังก์ชัน $y = 3e^x$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} - y = 0; y(0) = 3$$

ปัญหาค่าเริ่มต้น

ตัวอย่าง

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} - y = 0; y(0) = 3$$

กำหนดให้พารามิเตอร์ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ และให้ $x \in (-\infty, +\infty)$ พิจารณา $\phi(x) = ce^x$ จะได้ $\phi'(x) = ce^x$ จึงได้ว่า $\phi'(x) - \phi'(x) = ce^x - ce^x = 0$ เพราะฉะนั้น วงศ์ของฟังก์ชัน $\phi(x) = ce^x$ เป็นวงศ์ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้

พิจารณาเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 3$ (แทนค่า $x = 0$ และ $y = 3$) ในวงศ์ของผลเฉลยดังกล่าว จะได้ $3 = ce^0 = c$ นั่นคือ ฟังก์ชัน $y = 3e^x$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} - y = 0; y(0) = 3$$

ปัญหาค่าเริ่มต้น

ตัวอย่าง

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} - y = 0; y(0) = 3$$

กำหนดให้พารามิเตอร์ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ และให้ $x \in (-\infty, +\infty)$ พิจารณา $\phi(x) = ce^x$ จะได้ $\phi'(x) = ce^x$ จึงได้ว่า $\phi'(x) - \phi'(x) = ce^x - ce^x = 0$ เพราะฉะนั้น วงศ์ของฟังก์ชัน $\phi(x) = ce^x$ เป็นวงศ์ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ พิจารณาเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 3$ (แทนค่า $x = 0$ และ $y = 3$) ในวงศ์ของผลเฉลยดังกล่าว จะได้ $3 = ce^0 = c$ นั่นคือ ฟังก์ชัน $y = 3e^x$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

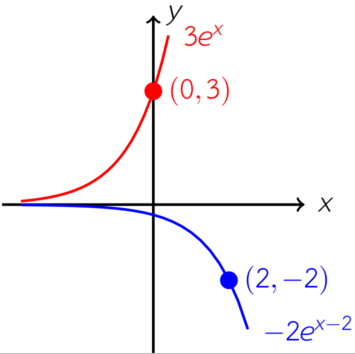
$$\frac{dy}{dx} - y = 0; y(0) = 3$$

ปัญหาค่าเริ่มต้น

พิจารณาเงื่อนไขเริ่มต้นอื่น เช่น $y(2) = -2$ จะได้ว่า $-2 = ce^2$ นั่นคือ $c = -2e^{-2}$ ซึ่งทำให้ได้ว่า ฟังก์ชัน $y = -2e^{x-2}$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} - y = 0; y(2) = -2$$

ซึ่งเส้นโค้งผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นทั้งสองนี้แสดงในรูปต่อไปนี้



ปัญหาค่าเริ่มต้น

การมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยบนบางช่วง

พิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้น

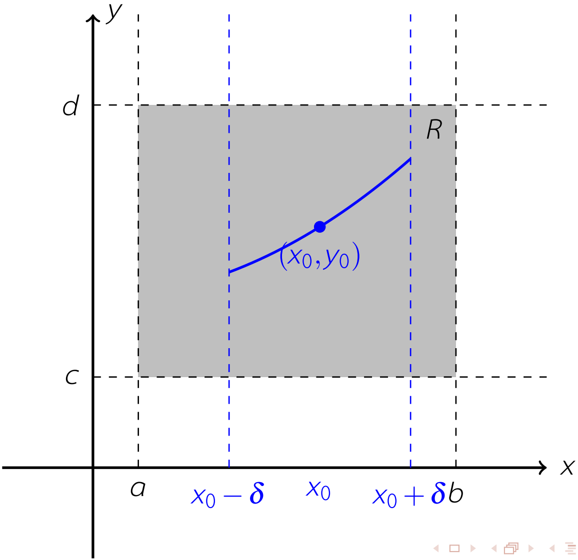
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y); \quad y(x_0) = y_0$$

ถ้า f และ $\frac{\partial f}{\partial y}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก (rectangle)

$$R := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a < x < b, c < y < d\}$$

ที่บรรจุจุด (x_0, y_0) แล้ว ปัญหาค่าเริ่มต้นจะมีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวบนช่วง $I_0 := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$ ที่ผลเฉลยนี้นิยามได้ สำหรับบางค่าคงตัว δ ที่มีค่าเป็นบวก

ปัญหาค่าเริ่มต้น



ปัญหาค่าเริ่มต้น

ตัวอย่าง

จงใช้ทฤษฎีบทการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยบนบางช่วง แสดงว่ามีช่วง I_0 ที่ทำให้ฟังก์ชัน $\phi(x) = 3e^x$ เป็นผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} - y = 0; y(0) = 3$$

บนช่วง I_0 ดังกล่าว

เราทราบว่าฟังก์ชัน $\phi(x) = 3e^x$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นนี้ และเนื่องจาก $f(x,y) = y$ และ $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = 1$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนระนาบ xy เพราะฉะนั้น โดยใช้ทฤษฎีบทการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยบนบางช่วง จะได้ว่า มีช่วง I_0 ที่ทำให้ฟังก์ชัน $\phi(x) = 3e^x$ เป็นผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวของปัญหาค่าเริ่มต้นที่กำหนดให้

ปัญหาค่าเริ่มต้น

ตัวอย่าง

จงใช้ทฤษฎีบทการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยบนบางช่วง แสดงว่ามีช่วง I_0 ที่ทำให้ฟังก์ชัน $\phi(x) = 3e^x$ เป็นผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dy}{dx} - y = 0; y(0) = 3$$

บนช่วง I_0 ดังกล่าว

เราทราบว่าฟังก์ชัน $\phi(x) = 3e^x$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นนี้ และเนื่องจาก $f(x,y) = y$ และ $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 1$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนระนาบ xy เพราะฉะนั้น โดยใช้ทฤษฎีบทการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยบนบางช่วง จะได้ว่า มีช่วง I_0 ที่ทำให้ฟังก์ชัน $\phi(x) = 3e^x$ เป็นผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวของปัญหาค่าเริ่มต้นที่กำหนดให้

ปัญหาค่าเริ่มต้น

ตัวอย่าง

จงใช้ทฤษฎีบท 25 ตรวจสอบว่ามีช่วง I_0 ที่ทำให้ปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้ จงใช้ทฤษฎีบท 25 ตรวจสอบว่ามีช่วง I_0 ที่ทำให้ปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวบนช่วง I_0 ดังกล่าวหรือไม่

- $\frac{dy}{dx} = y^4 - x^4; \quad y(0) = 7$
- $\frac{dy}{dt} - ty = \sin^2 t; \quad y(\pi) = 5$
- $y\frac{dy}{dx} = x; \quad y(1) = 0$
- $3x\frac{dy}{dx} + 4t = 0; \quad y(2) = -\pi$
- $\frac{dy}{dt} - \cos t = \sin t; \quad y(\pi) = 0$

มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวบนช่วง I_0 ดังกล่าวหรือไม่

ให้เป็นแบบฝึกหัดในห้องเรียน

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

- เคยสังเกตไหม! เวลากระหายน้ำ และเราหยิบขวดน้ำดื่มออกมาจากตู้เย็น แต่ลืมนำขวดน้ำกลับใส่เข้าไปในตู้เย็นอย่างเดิม เราจะพบว่าอุณหภูมิของน้ำจะเพิ่มขึ้นจนใกล้เคียงกับอุณหภูมิห้อง ซึ่งปรากฏการณ์นี้สามารถอธิบายได้ในวิชาฟิสิกส์
- การเพิ่มขึ้นของประชากรในเขตชุมชนหนึ่ง ๆ ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ทางสังคมศาสตร์
- การคำนวณดอกเบี้ยเงินฝากของธนาคาร ซึ่งเกี่ยวข้องกับวิชาเศรษฐศาสตร์
- ปรากฏการณ์เหล่านี้มักจะถูกอธิบายในนิพจน์เชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งจะเรียกการอธิบายระบบของปรากฏการณ์เหล่านี้ว่า ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model)
- แน่นอนว่าสิ่งที่ควรสงสัยคือ เราจะสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายระบบของปรากฏการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างไร?

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

- เคยสังเกตไหม! เวลากระหายน้ำ และเราหยิบขวดน้ำดื่มออกมาจากตู้เย็น แต่ลืมนำขวดน้ำกลับใส่เข้าไปในตู้เย็นอย่างเดิม เราจะพบว่าอุณหภูมิของน้ำจะเพิ่มขึ้นจนใกล้เคียงกับอุณหภูมิห้อง ซึ่งปรากฏการณ์นี้สามารถอธิบายได้ในวิชาฟิสิกส์
- การเพิ่มขึ้นของประชากรในเขตชุมชนหนึ่ง ๆ ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ทางสังคมศาสตร์
- การคำนวณดอกเบี้ยเงินฝากของธนาคาร ซึ่งเกี่ยวข้องกับวิชาเศรษฐศาสตร์
- ปรากฏการณ์เหล่านี้มักจะถูกอธิบายในนิพจน์เชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งจะเรียกการอธิบายระบบของปรากฏการณ์เหล่านี้ว่า ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model)
- แน่นอนว่าสิ่งที่ควรสงสัยคือ เราจะสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายระบบของปรากฏการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างไร?

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

- เคยสังเกตไหม! เวลากระหายน้ำ และเราหยิบขวดน้ำดื่มออกมาจากตู้เย็น แต่ลืมนำขวดน้ำกลับใส่เข้าไปในตู้เย็นอย่างเดิม เราจะพบว่าอุณหภูมิของน้ำจะเพิ่มขึ้นจนใกล้เคียงกับอุณหภูมิห้อง ซึ่งปรากฏการณ์นี้สามารถอธิบายได้ในวิชาฟิสิกส์
- การเพิ่มขึ้นของประชากรในเขตชุมชนหนึ่ง ๆ ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ทางสังคมศาสตร์
- การคำนวณดอกเบี้ยเงินฝากของธนาคาร ซึ่งเกี่ยวข้องกับวิชาเศรษฐศาสตร์
- ปรากฏการณ์เหล่านี้มักจะถูกอธิบายในนิพจน์เชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งจะเรียกการอธิบายระบบของปรากฏการณ์เหล่านี้ว่า ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model)
- แน่นอนว่าสิ่งที่ควรสงสัยคือ เราจะสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายระบบของปรากฏการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างไร?

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

- เคยสังเกตไหม! เวลากระหายน้ำ และเราหยิบขวดน้ำดื่มออกมาจากตู้เย็น แต่ลืมนำขวดน้ำกลับใส่เข้าไปในตู้เย็นอย่างเดิม เราจะพบว่าอุณหภูมิของน้ำจะเพิ่มขึ้นจนใกล้เคียงกับอุณหภูมิห้อง ซึ่งปรากฏการณ์นี้สามารถอธิบายได้ในวิชาฟิสิกส์
- การเพิ่มขึ้นของประชากรในเขตชุมชนหนึ่ง ๆ ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ทางสังคมศาสตร์
- การคำนวณดอกเบี้ยเงินฝากของธนาคาร ซึ่งเกี่ยวข้องกับวิชาเศรษฐศาสตร์
- ปรากฏการณ์เหล่านี้มักจะถูกอธิบายในนิพจน์เชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งจะเรียกการอธิบายระบบของปรากฏการณ์เหล่านี้ว่า ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model)
- แน่นอนว่าสิ่งที่ควรสงสัยคือ เราจะสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายระบบของปรากฏการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างไร?

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

- เคยสังเกตไหม! เวลากระหายน้ำ และเราหยิบขวดน้ำดื่มออกมาจากตู้เย็น แต่ลืมนำขวดน้ำกลับใส่เข้าไปในตู้เย็นอย่างเดิม เราจะพบว่าอุณหภูมิของน้ำจะเพิ่มขึ้นจนใกล้เคียงกับอุณหภูมิห้อง ซึ่งปรากฏการณ์นี้สามารถอธิบายได้ในวิชาฟิสิกส์
- การเพิ่มขึ้นของประชากรในเขตชุมชนหนึ่ง ๆ ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ทางสังคมศาสตร์
- การคำนวณดอกเบี้ยเงินฝากของธนาคาร ซึ่งเกี่ยวข้องกับวิชาเศรษฐศาสตร์
- ปรากฏการณ์เหล่านี้มักจะถูกอธิบายในนิพจน์เชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งจะเรียกการอธิบายระบบของปรากฏการณ์เหล่านี้ว่า ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model)
- แน่นอนว่าสิ่งที่ควรสงสัยคือ เราจะสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายระบบของปรากฏการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างไร?

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

- การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มีหลักการคร่าว ๆ คือ เราจะต้องระบุตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงของระบบให้ได้
- จากนั้นให้พิจารณาสมมติฐานที่เกี่ยวข้องกับระบบที่ต้องการจะศึกษา ซึ่งสมมติฐานเหล่านี้ควรสอดคล้องกับข้อมูลเชิงประจักษ์ที่เกี่ยวข้องกับระบบนั้น ๆ
- ในบางสถานการณ์เราไม่จำเป็นต้องสร้างตัวแบบที่มีความละเอียดสูง โดยพิจารณาเพียงตัวแปรที่จำเป็นในระบบเท่านั้นก็ได้
- ตัวอย่างเช่น หากเรายังจำได้ตอนที่เริ่มเรียนวิชาฟิสิกส์ ในการศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวดิ่งสู่พื้นโลก เราจะไม่คำนึงถึงแรงต้านทานอากาศ อย่างไรก็ตาม หากได้ศึกษาในวิชาฟิสิกส์ระดับสูง จะพบว่าแรงต้านทานอากาศนั้นมีผลต่อการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งและไม่สามารถละเลยได้
- หากพิจารณาอย่างถี่ถ้วนมากขึ้น จะพบว่าปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในระบบหนึ่ง ๆ มักจะเกี่ยวข้องกับ อัตราการเปลี่ยนแปลง (rate of change) ของตัวแปรในระบบ ซึ่งทำให้การอธิบายปรากฏการณ์เหล่านี้ในทางคณิตศาสตร์มักจะเกี่ยวข้องกับ อนุพันธ์ (derivative)

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

- การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มีหลักการคร่าว ๆ คือ เราจะต้องระบุตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงของระบบให้ได้
- จากนั้นให้พิจารณาสมมติฐานที่เกี่ยวข้องกับระบบที่ต้องการจะศึกษา ซึ่งสมมติฐานเหล่านี้ควรสอดคล้องกับข้อมูลเชิงประจักษ์ที่เกี่ยวข้องกับระบบนั้น ๆ
- ในบางสถานการณ์เราไม่จำเป็นต้องสร้างตัวแบบที่มีความละเอียดสูง โดยพิจารณาเพียงตัวแปรที่จำเป็นในระบบเท่านั้นก็ได้
- ตัวอย่างเช่น หากเรายังจำได้ตอนที่เริ่มเรียนวิชาฟิสิกส์ ในการศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวดิ่งสู่พื้นโลก เราจะไม่คำนึงถึงแรงต้านทานอากาศ อย่างไรก็ตาม หากได้ศึกษาในวิชาฟิสิกส์ระดับสูง จะพบว่าแรงต้านทานอากาศนั้นมีผลต่อการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งและไม่สามารถละเลยได้
- หากพิจารณาอย่างถี่ถ้วนมากขึ้น จะพบว่าปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในระบบหนึ่ง ๆ มักจะเกี่ยวข้องกับ อัตราการเปลี่ยนแปลง (rate of change) ของตัวแปรในระบบ ซึ่งทำให้การอธิบายปรากฏการณ์เหล่านี้ในทางคณิตศาสตร์มักจะเกี่ยวข้องกับ อนุพันธ์ (derivative)

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

- การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มีหลักการคร่าว ๆ คือ เราจะต้องระบุตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงของระบบให้ได้
- จากนั้นให้พิจารณาสมมติฐานที่เกี่ยวข้องกับระบบที่ต้องการจะศึกษา ซึ่งสมมติฐานเหล่านี้ควรสอดคล้องกับข้อมูลเชิงประจักษ์ที่เกี่ยวข้องกับระบบนั้น ๆ
- ในบางสถานการณ์เราไม่จำเป็นต้องสร้างตัวแบบที่มีความละเอียดสูง โดยพิจารณาเพียงตัวแปรที่จำเป็นในระบบเท่านั้นก็ได้
- ตัวอย่างเช่น หากเรายังจำได้ตอนที่เริ่มเรียนวิชาฟิสิกส์ ในการศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวดิ่งสู่พื้นโลก เราจะไม่คำนึงถึงแรงต้านทานอากาศ อย่างไรก็ตาม หากได้ศึกษาในวิชาฟิสิกส์ระดับสูง จะพบว่าแรงต้านทานอากาศนั้นมีผลต่อการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งและไม่สามารถละเลยได้
- หากพิจารณาอย่างถี่ถ้วนมากขึ้น จะพบว่าปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในระบบหนึ่ง ๆ มักจะเกี่ยวข้องกับ อัตราการเปลี่ยนแปลง (rate of change) ของตัวแปรในระบบ ซึ่งทำให้การอธิบายปรากฏการณ์เหล่านี้ในทางคณิตศาสตร์มักจะเกี่ยวข้องกับ อนุพันธ์ (derivative)

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

- การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มีหลักการคร่าว ๆ คือ เราจะต้องระบุตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงของระบบให้ได้
- จากนั้นให้พิจารณาสมมติฐานที่เกี่ยวข้องกับระบบที่ต้องการจะศึกษา ซึ่งสมมติฐานเหล่านี้ควรสอดคล้องกับข้อมูลเชิงประจักษ์ที่เกี่ยวข้องกับระบบนั้น ๆ
- ในบางสถานการณ์เราไม่จำเป็นต้องสร้างตัวแบบที่มีความละเอียดสูง โดยพิจารณาเพียงตัวแปรที่จำเป็นในระบบเท่านั้นก็ได้
- ตัวอย่างเช่น หากเรายังจำได้ตอนที่เริ่มเรียนวิชาฟิสิกส์ ในการศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวดิ่งสู่พื้นโลก เราจะไม่คำนึงถึงแรงต้านทานอากาศ อย่างไรก็ตาม หากได้ศึกษาในวิชาฟิสิกส์ระดับสูง จะพบว่าแรงต้านทานอากาศนั้นมีผลต่อการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งและไม่สามารถละเลยได้
- หากพิจารณาอย่างถี่ถ้วนมากขึ้น จะพบว่าปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในระบบหนึ่ง ๆ มักจะเกี่ยวข้องกับ อัตราการเปลี่ยนแปลง (rate of change) ของตัวแปรในระบบ ซึ่งทำให้การอธิบายปรากฏการณ์เหล่านี้ในทางคณิตศาสตร์มักจะเกี่ยวข้องกับ อนุพันธ์ (derivative)

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

- การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มีหลักการคร่าว ๆ คือ เราจะต้องระบุตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงของระบบให้ได้
- จากนั้นให้พิจารณาสมมติฐานที่เกี่ยวข้องกับระบบที่ต้องการจะศึกษา ซึ่งสมมติฐานเหล่านี้ควรสอดคล้องกับข้อมูลเชิงประจักษ์ที่เกี่ยวข้องกับระบบนั้น ๆ
- ในบางสถานการณ์เราไม่จำเป็นต้องสร้างตัวแบบที่มีความละเอียดสูง โดยพิจารณาเพียงตัวแปรที่จำเป็นในระบบเท่านั้นก็ได้
- ตัวอย่างเช่น หากเรายังจำได้ตอนที่เริ่มเรียนวิชาฟิสิกส์ ในการศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวดิ่งสู่พื้นโลก เราจะไม่คำนึงถึงแรงต้านทานอากาศ อย่างไรก็ตาม หากได้ศึกษาในวิชาฟิสิกส์ระดับสูง จะพบว่าแรงต้านทานอากาศนั้นมีผลต่อการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งและไม่สามารถละเลยได้
- หากพิจารณาอย่างถี่ถ้วนมากขึ้น จะพบว่าปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในระบบหนึ่ง ๆ มักจะเกี่ยวข้องกับ อัตราการเปลี่ยนแปลง (rate of change) ของตัวแปรในระบบ ซึ่งทำให้การอธิบายปรากฏการณ์เหล่านี้ในทางคณิตศาสตร์มักจะเกี่ยวข้องกับ อนุพันธ์ (derivative)

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

- ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว ตัวแบบในวิชาฟิสิกส์มักจะเกี่ยวข้องกับตัวแปรเวลา (t) ซึ่งหากทราบผลเฉลยของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แล้ว เราจะอธิบายสถานะของระบบ (state of the system) ณ เวลาใด ๆ ได้ นั่นคือ ค่าของตัวแปรตาม (dependent variable) ณ เวลา t จะอธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในระบบ ณ เวลา t นั้น ๆ นั่นเอง
- หลังจากที่สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ได้แล้ว คำถามที่ตามมาคือ เราจะแก้ปัญหาหรือหาผลเฉลยของปัญหานั้น ๆ ได้อย่างไร?
- ทั้งนี้ ถ้าสามารถแก้ปัญหานั้น ๆ ได้ เราจะตรวจสอบได้ว่าตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นนั้นมีความถูกต้องและมีประสิทธิภาพ เมื่อเทียบกับข้อมูลเชิงประจักษ์หรือข้อมูลที่เกิดจากการทดลองหรือไม่นั่นเอง
- อนึ่ง หากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นยังไม่มีประสิทธิภาพเท่าที่ควร เราอาจเพิ่มความละเอียดของตัวแบบโดยพิจารณาตัวแปรที่เกี่ยวข้องเพิ่มมากขึ้น
- แน่นอนว่า การเพิ่มความละเอียดของตัวแบบจะทำให้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มีความซับซ้อนมากขึ้น และในบางครั้งอาจจะไม่สามารถหาผลเฉลยได้โดยง่าย

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

- ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว ตัวแบบในวิชาฟิสิกส์มักจะเกี่ยวข้องกับตัวแปรเวลา (t) ซึ่งหากทราบผลเฉลยของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แล้ว เราจะอธิบายสถานะของระบบ (state of the system) ณ เวลาใด ๆ ได้ นั่นคือ ค่าของตัวแปรตาม (dependent variable) ณ เวลา t จะอธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในระบบ ณ เวลา t นั้น ๆ นั่นเอง
- หลังจากที่สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ได้แล้ว คำถามที่ตามมาคือ เราจะแก้ปัญหาหรือหาผลเฉลยของปัญหานั้น ๆ ได้อย่างไร?
- ทั้งนี้ ถ้าสามารถแก้ปัญหานั้น ๆ ได้ เราจะตรวจสอบได้ว่าตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นนั้นมีความถูกต้องและมีประสิทธิภาพ เมื่อเทียบกับข้อมูลเชิงประจักษ์หรือข้อมูลที่เกิดจากการทดลองหรือไม่นั่นเอง
- อนึ่ง หากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นยังไม่มีประสิทธิภาพเท่าที่ควร เราอาจเพิ่มความละเอียดของตัวแบบโดยพิจารณาตัวแปรที่เกี่ยวข้องเพิ่มมากขึ้น
- แน่นอนว่า การเพิ่มความละเอียดของตัวแบบจะทำให้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มีความซับซ้อนมากขึ้น และในบางครั้งอาจจะไม่สามารถหาผลเฉลยได้โดยง่าย

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

- ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว ตัวแบบในวิชาฟิสิกส์มักจะเกี่ยวข้องกับตัวแปรเวลา (t) ซึ่งหากทราบผลเฉลยของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แล้ว เราจะอธิบายสถานะของระบบ (state of the system) ณ เวลาใด ๆ ได้ นั่นคือ ค่าของตัวแปรตาม (dependent variable) ณ เวลา t จะอธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในระบบ ณ เวลา t นั้น ๆ นั่นเอง
- หลังจากที่สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ได้แล้ว คำถามที่ตามมาคือ เราจะแก้ปัญหาหรือหาผลเฉลยของปัญหานั้น ๆ ได้อย่างไร?
- ทั้งนี้ ถ้าสามารถแก้ปัญหานั้น ๆ ได้ เราจะตรวจสอบได้ว่าตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นนั้นมีความถูกต้องและมีประสิทธิภาพ เมื่อเทียบกับข้อมูลเชิงประจักษ์หรือข้อมูลที่เกิดจากการทดลองหรือไม่นั่นเอง
- อนึ่ง หากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นยังไม่มีประสิทธิภาพเท่าที่ควร เราอาจเพิ่มความละเอียดของตัวแบบโดยพิจารณาตัวแปรที่เกี่ยวข้องเพิ่มมากขึ้น
- แน่นอนว่า การเพิ่มความละเอียดของตัวแบบจะทำให้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มีความซับซ้อนมากขึ้น และในบางครั้งอาจจะไม่สามารถหาผลเฉลยได้โดยง่าย

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

- ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว ตัวแบบในวิชาฟิสิกส์มักจะเกี่ยวข้องกับตัวแปรเวลา (t) ซึ่งหากทราบผลเฉลยของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แล้ว เราจะอธิบายสถานะของระบบ (state of the system) ณ เวลาใด ๆ ได้ นั่นคือ ค่าของตัวแปรตาม (dependent variable) ณ เวลา t จะอธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในระบบ ณ เวลา t นั้น ๆ นั่นเอง
- หลังจากที่สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ได้แล้ว คำถามที่ตามมาคือ เราจะแก้ปัญหาหรือหาผลเฉลยของปัญหานั้น ๆ ได้อย่างไร?
- ทั้งนี้ ถ้าสามารถแก้ปัญหานั้น ๆ ได้ เราจะตรวจสอบได้ว่าตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นนั้นมีความถูกต้องและมีประสิทธิภาพ เมื่อเทียบกับข้อมูลเชิงประจักษ์หรือข้อมูลที่เกิดจากการทดลองหรือไม่นั่นเอง
- อนึ่ง หากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นยังไม่มีประสิทธิภาพเท่าที่ควร เราอาจเพิ่มความละเอียดของตัวแบบโดยพิจารณาตัวแปรที่เกี่ยวข้องเพิ่มมากขึ้น
- แน่นอนว่า การเพิ่มความละเอียดของตัวแบบจะทำให้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มีความซับซ้อนมากขึ้น และในบางครั้งอาจจะไม่สามารถหาผลเฉลยได้โดยง่าย

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

- ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว ตัวแบบในวิชาฟิสิกส์มักจะเกี่ยวข้องกับตัวแปรเวลา (t) ซึ่งหากทราบผลเฉลยของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แล้ว เราจะอธิบายสถานะของระบบ (state of the system) ณ เวลาใด ๆ ได้ นั่นคือ ค่าของตัวแปรตาม (dependent variable) ณ เวลา t จะอธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในระบบ ณ เวลา t นั้น ๆ นั่นเอง
- หลังจากที่สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ได้แล้ว คำถามที่ตามมาคือ เราจะแก้ปัญหาหรือหาผลเฉลยของปัญหานั้น ๆ ได้อย่างไร?
- ทั้งนี้ ถ้าสามารถแก้ปัญหานั้น ๆ ได้ เราจะตรวจสอบได้ว่าตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นนั้นมีความถูกต้องและมีประสิทธิภาพ เมื่อเทียบกับข้อมูลเชิงประจักษ์หรือข้อมูลที่เกิดจากการทดลองหรือไม่นั่นเอง
- อนึ่ง หากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นยังไม่มีประสิทธิภาพเท่าที่ควร เราอาจเพิ่มความละเอียดของตัวแบบโดยพิจารณาตัวแปรที่เกี่ยวข้องเพิ่มมากขึ้น
- แน่นอนว่า การเพิ่มความละเอียดของตัวแบบจะทำให้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มีความซับซ้อนมากขึ้น และในบางครั้งอาจจะไม่สามารถหาผลเฉลยได้โดยง่าย

การเพิ่มขึ้นและการสลาย

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แรกที่เกี่ยวข้องกับการเพิ่มขึ้น (growth) และการสลาย (decay) ถูกนำเสนอในปี ค.ศ. 1798 โดยทอมัส มาลธัส (Thomas Malthus) (ค.ศ. 1766 - 1834) นักเศรษฐศาสตร์ชาวอังกฤษ ซึ่งแนวคิดพื้นฐานของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของมาลธัสเกิดขึ้นบนสมมติฐานที่ว่า อัตราการเพิ่มขึ้นของประชากรในชุมชนหนึ่ง ณ ขณะเวลาหนึ่ง ๆ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนประชากรในชุมชนดังกล่าว ณ เวลานั้น ๆ[2] โดยอธิบายในบริบทของคณิตศาสตร์ได้ดังนี้ สมมติให้ $P(t)$ เป็นจำนวนประชากร ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ว่าสมมติฐานของมาลธัส คือ $\frac{dP}{dt} \propto P$ หรือ

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการเป็นสัดส่วนโดยตรง

---

[2] เราจะกล่าวว่าปริมาณ u และ v เป็นสัดส่วนโดยตรง (propotional) กัน ซึ่งเขียนแทนด้วย $u \propto v$ ถ้ามีค่าคงตัว k ที่ทำให้ $u = kv$

การเพิ่มขึ้นและการสลาย

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของมาลธัสถูกนำไปอธิบายการเติบโตของประชากรขนาดเล็กระหว่างช่วงเวลาสั้น ๆ ได้อย่างแม่นยำ เช่น การเจริญเติบโตของแบคทีเรียในจานแก้วเพาะเชื้อ แต่ทว่า ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์พื้นฐานนี้ยังไม่สามารถอธิบายปรากฏการณ์ของประชากรมนุษย์ที่ปัจจัยแวดล้อมมีความซับซ้อนได้ดีเท่าที่ควร

จากแนวคิดข้างต้น เราสามารถอธิบายปรากฏการณ์การเพิ่มและการสลายด้วยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad P(t_0) = P_0 \tag{2}$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการเป็นสัดส่วนโดยตรง

การเพิ่มขึ้นและการสลาย

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของมาลธัสถูกนำไปอธิบายการเติบโตของประชากรขนาดเล็กระหว่างช่วงเวลาสั้น ๆ ได้อย่างแม่นยำ เช่น การเจริญเติบโตของแบคทีเรียในจานแก้วเพาะเชื้อ แต่ทว่า ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์พื้นฐานนี้ยังไม่สามารถอธิบายปรากฏการณ์ของประชากรมนุษย์ที่ปัจจัยแวดล้อมมีความซับซ้อนได้ดีเท่าที่ควร

จากแนวคิดข้างต้น เราสามารถอธิบายปรากฏการณ์การเพิ่มและการสลายด้วยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาค่าเริ่มต้นต่อไปนี้

$$\frac{dP}{dt} = kP, \qquad P(t_0) = P_0 \tag{2}$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการเป็นสัดส่วนโดยตรง

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

ในวิชาชีววิทยา อัตราการเพิ่มขึ้นของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก เช่น แบคทีเรีย ในช่วงเวลาหนึ่ง ๆ จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับประชากรของสิ่งมีชีวิตนั้น ๆ ณ เวลา t ทั้งนี้ หากเราทราบจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก ณ เวลา t_0 ว่ามีจำนวน P_0 แล้ว เราสามารถใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (2) เพื่อคำนวณหาจำนวนประชากรของสิ่งมีชีวิตในอนาคตได้ ตัวอย่างต่อไปนี้

สมมติว่า ณ ขณะเวลาหนึ่งมีแบคทีเรียจำนวน P_0 ตัว หลังจากนั้น ณ เวลา $t = 1$ ชั่วโมง พบว่ามีแบคทีเรียอยู่จำนวน $\frac{3}{2}P_0$ ถ้าอัตราการเพิ่มขึ้นของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนแบคทีเรีย $P(t)$ ณ เวลา t ใด ๆ จงหาเวลา t ที่ทำให้จำนวนของแบคทีเรียเพิ่มขึ้นเป็นสามเท่าของจำนวนเดิม

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

การแก้ปัญหาข้อนี้ ขั้นแรกให้หาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

โดยใช้ค่าเริ่มต้น $P(0) = P_0$ จากนั้นใช้ข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า $P(1) = \frac{3}{2}P_0$ เพื่อคำนวณหาค่าคงตัว k ส่งผลให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน P ณ เวลา t ใด ๆ

สังเกตว่า สมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการเชิงเส้นในรูป

$$\frac{dP}{dt} - kP = 0$$

เราจึงพิจารณาการหาผลเฉลยได้ดังนี้ เนื่องจาก ตัวประกอบปริพันธ์ $e^{\int(-k)dt} = e^{-kt}$ ทำให้ได้ว่า $e^{-kt}\frac{dP}{dt} + e^{-kt}(-k)P = 0$ นั่นคือ $\frac{d}{dt}[e^{-kt}P] = 0$ การหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการทำให้ได้ว่า

$$P(t) = ce^{kt}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

การแก้ปัญหาข้อนี้ ขั้นแรกให้หาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

โดยใช้ค่าเริ่มต้น $P(0) = P_0$ จากนั้นใช้ข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า $P(1) = \frac{3}{2}P_0$ เพื่อคำนวณหาค่าคงตัว k ส่งผลให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน P ณ เวลา t ใด ๆ

สังเกตว่า สมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการเชิงเส้นในรูป

$$\frac{dP}{dt} - kP = 0$$

เราจึงพิจารณาการหาผลเฉลยได้ดังนี้ เนื่องจาก ตัวประกอบปริพันธ์ $e^{\int(-k)dt} = e^{-kt}$ ทำให้ได้ว่า $e^{-kt}\frac{dP}{dt} + e^{-kt}(-k)P = 0$ นั่นคือ $\frac{d}{dt}[e^{-kt}P] = 0$ การหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการทำให้ได้ว่า

$$P(t) = ce^{kt}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

การแก้ปัญหาข้อนี้ ขั้นแรกให้หาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

โดยใช้ค่าเริ่มต้น $P(0) = P_0$ จากนั้นใช้ข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า $P(1) = \frac{3}{2}P_0$ เพื่อคำนวณหาค่าคงตัว k ส่งผลให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน P ณ เวลา t ใด ๆ

สังเกตว่า สมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการเชิงเส้นในรูป

$$\frac{dP}{dt} - kP = 0$$

เราจึงพิจารณาการหาผลเฉลยได้ดังนี้ เนื่องจาก ตัวประกอบปริพันธ์ $e^{\int(-k)dt} = e^{-kt}$ ทำให้ได้ว่า $e^{-kt}\frac{dP}{dt} + e^{-kt}(-k)P = 0$ นั่นคือ $\frac{d}{dt}[e^{-kt}P] = 0$ การหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการทำให้ได้ว่า

$$P(t) = ce^{kt}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

การแก้ปัญหาข้อนี้ ขั้นแรกให้หาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

โดยใช้ค่าเริ่มต้น $P(0) = P_0$ จากนั้นใช้ข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า $P(1) = \frac{3}{2}P_0$ เพื่อคำนวณหาค่าคงตัว k ส่งผลให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน P ณ เวลา t ใด ๆ

สังเกตว่า สมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการเชิงเส้นในรูป

$$\frac{dP}{dt} - kP = 0$$

เราจึงพิจารณาการหาผลเฉลยได้ดังนี้ เนื่องจาก ตัวประกอบปริพันธ์ $e^{\int(-k)dt} = e^{-kt}$ ทำให้ได้ว่า $e^{-kt}\frac{dP}{dt} + e^{-kt}(-k)P = 0$ นั่นคือ $\frac{d}{dt}[e^{-kt}P] = 0$ การหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการทำให้ได้ว่า

$$P(t) = ce^{kt}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

การแก้ปัญหาข้อนี้ ขั้นแรกให้หาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

โดยใช้ค่าเริ่มต้น $P(0) = P_0$ จากนั้นใช้ข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า $P(1) = \frac{3}{2}P_0$ เพื่อคำนวณหาค่าคงตัว k ส่งผลให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน P ณ เวลา t ใด ๆ

สังเกตว่า สมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการเชิงเส้นในรูป

$$\frac{dP}{dt} - kP = 0$$

เราจึงพิจารณาการหาผลเฉลยได้ดังนี้ เนื่องจาก ตัวประกอบปริพันธ์ $e^{\int(-k)dt} = e^{-kt}$ ทำให้ได้ว่า $e^{-kt}\frac{dP}{dt} + e^{-kt}(-k)P = 0$ นั่นคือ $\frac{d}{dt}[e^{-kt}P] = 0$ การหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการทำให้ได้ว่า

$$P(t) = ce^{kt}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $P(0) = P_0$ จะได้ว่า $P_0 = P(0) = ce^{k(0)}$ ส่งผลให้ได้ว่า $c = P_0$
ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อเวลา $t = 1$ ชั่วโมง พบว่ามีแบคทีเรียอยู่จำนวน $\frac{3}{2}P_0$
นั่นคือ $P(1) = \frac{3}{2}P_0$ จึงได้ว่า

$$\frac{3}{2}P_0 = P(1) = P_0 e^{k(1)} = P_0 e^{k}$$

ดังนั้น

$$k = \ln\frac{3}{2} \approx 0.4055$$

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของจำนวนแบคทีเรียกับเวลา t ใด ๆ คือ

$$P(t) = P_0 e^{0.4055t}$$

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $P(0) = P_0$ จะได้ว่า $P_0 = P(0) = ce^{k(0)}$ ส่งผลให้ได้ว่า $c = P_0$ ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อเวลา $t = 1$ ชั่วโมง พบว่ามีแบคทีเรียอยู่จำนวน $\frac{3}{2}P_0$ นั่นคือ $P(1) = \frac{3}{2}P_0$ จึงได้ว่า

$$\frac{3}{2}P_0 = P(1) = P_0 e^{k(1)} = P_0 e^{k}$$

ดังนั้น

$$k = \ln\frac{3}{2} \approx 0.4055$$

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของจำนวนแบคทีเรียกับเวลา t ใด ๆ คือ

$$P(t) = P_0 e^{0.4055t}$$

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $P(0) = P_0$ จะได้ว่า $P_0 = P(0) = ce^{k(0)}$ ส่งผลให้ได้ว่า $c = P_0$ ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อเวลา $t = 1$ ชั่วโมง พบว่ามีแบคทีเรียอยู่จำนวน $\frac{3}{2}P_0$ นั่นคือ $P(1) = \frac{3}{2}P_0$ จึงได้ว่า

$$\frac{3}{2}P_0 = P(1) = P_0 e^{k(1)} = P_0 e^k$$

ดังนั้น

$$k = \ln \frac{3}{2} \approx 0.4055$$

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของจำนวนแบคทีเรียกับเวลา t ใด ๆ คือ

$$P(t) = P_0 e^{0.4055t}$$

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $P(0) = P_0$ จะได้ว่า $P_0 = P(0) = ce^{k(0)}$ ส่งผลให้ได้ว่า $c = P_0$ ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อเวลา $t = 1$ ชั่วโมง พบว่ามีแบคทีเรียอยู่จำนวน $\frac{3}{2}P_0$ นั่นคือ $P(1) = \frac{3}{2}P_0$ จึงได้ว่า

$$\frac{3}{2}P_0 = P(1) = P_0 e^{k(1)} = P_0 e^k$$

ดังนั้น

$$k = \ln\frac{3}{2} \approx 0.4055$$

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของจำนวนแบคทีเรียกับเวลา t ใด ๆ คือ

$$P(t) = P_0 e^{0.4055t}$$

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

พิจารณาเวลา t ที่ทำให้จำนวนของแบคทีเรียเพิ่มขึ้นเป็นสามเท่าของจำนวนเดิมดังนี้ เราทราบว่า

$$3P_0 = P_0 e^{0.4055t}$$

นั่นคือ

$$t = \frac{\ln 3}{0.4055} \approx 2.71 \text{ชั่วโมง}$$

โดยลักษณะของความสัมพันธ์แสดงได้ดังรูปต่อไปนี้

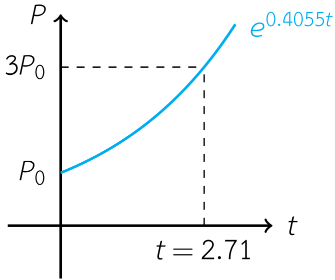
พิจารณาเวลา t ที่ทำให้จำนวนของแบคทีเรียเพิ่มขึ้นเป็นสามเท่าของจำนวนเดิมดังนี้ เราทราบว่า

$$3P_0 = P_0 e^{0.4055t}$$

นั่นคือ

$$t = \frac{\ln 3}{0.4055} \approx 2.71 \text{ ชั่วโมง}$$

โดยลักษณะของความสัมพันธ์แสดงได้ดังรูปต่อไปนี้



การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

- ในกรณีที่ค่าคงตัว $k \geq 0$ จะพบว่าค่าฟังก์ชันเลขชี้กำลัง e^{kt} จะเพิ่มขึ้นเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น
- และในอีกด้านหนึ่ง ถ้า $k < 0$ จะพบว่าค่าฟังก์ชันเลขชี้กำลังนี้จะลดลง เมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น
- นั่นคือ ปรากฏการณ์การเพิ่มขึ้น เช่น ประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก จะเกี่ยวข้องกับค่าคงตัว k ที่มีค่าเป็นบวก
- ในขณะที่ปรากฏการณ์การสลาย เช่น การสลายตัวของกัมมันตรังสี จะเกี่ยวข้องกับค่าคงตัว k ที่มีค่าเป็นลบ ซึ่งมีรายละเอียดในหัวข้อถัดไปนี้

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

- ในกรณีที่ค่าคงตัว $k \geq 0$ จะพบว่าค่าฟังก์ชันเลขชี้กำลัง e^{kt} จะเพิ่มขึ้นเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น
- และในอีกด้านหนึ่ง ถ้า $k < 0$ จะพบว่าค่าฟังก์ชันเลขชี้กำลังนี้จะลดลง เมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น
- นั่นคือ ปรากฏการณ์การเพิ่มขึ้น เช่น ประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก จะเกี่ยวข้องกับค่าคงตัว k ที่มีค่าเป็นบวก
- ในขณะที่ปรากฏการณ์การสลาย เช่น การสลายตัวของกัมมันตรังสี จะเกี่ยวข้องกับค่าคงตัว k ที่มีค่าเป็นลบ ซึ่งมีรายละเอียดในหัวข้อถัดไปนี้

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

- ในกรณีที่ค่าคงตัว $k \geq 0$ จะพบว่าค่าฟังก์ชันเลขชี้กำลัง e^{kt} จะเพิ่มขึ้นเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น
- และในอีกด้านหนึ่ง ถ้า $k < 0$ จะพบว่าค่าฟังก์ชันเลขชี้กำลังนี้จะลดลง เมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น
- นั่นคือ ปรากฏการณ์การเพิ่มขึ้น เช่น ประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก จะเกี่ยวข้องกับค่าคงตัว k ที่มีค่าเป็นบวก
- ในขณะที่ปรากฏการณ์การสลาย เช่น การสลายตัวของกัมมันตรังสี จะเกี่ยวข้องกับค่าคงตัว k ที่มีค่าเป็นลบ ซึ่งมีรายละเอียดในหัวข้อถัดไปนี้

การเพิ่มประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก

- ในกรณีที่ค่าคงตัว $k \geq 0$ จะพบว่าค่าฟังก์ชันเลขชี้กำลัง e^{kt} จะเพิ่มขึ้นเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น
- และในอีกด้านหนึ่ง ถ้า $k < 0$ จะพบว่าค่าฟังก์ชันเลขชี้กำลังนี้จะลดลง เมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น
- นั่นคือ ปรากฏการณ์การเพิ่มขึ้น เช่น ประชากรของสิ่งมีชีวิตขนาดเล็ก จะเกี่ยวข้องกับค่าคงตัว k ที่มีค่าเป็นบวก
- ในขณะที่ปรากฏการณ์การสลาย เช่น การสลายตัวของกัมมันตรังสี จะเกี่ยวข้องกับค่าคงตัว k ที่มีค่าเป็นลบ ซึ่งมีรายละเอียดในหัวข้อถัดไปนี้

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

- ในวิชาฟิสิกส์ ค่าครึ่งชีวิต (half-life) เป็นตัววัดเสถียรภาพ (stability) ของสสารกัมมันตรังสี
- กล่าวคือ ค่าครึ่งชีวิตเป็นเวลาที่อะตอมที่มีปริมาณตั้งต้นเป็น A_0 สลายตัวหรือเปลี่ยนสภาพไปเป็นสสารอื่นจนเหลือปริมาณครึ่งหนึ่งของปริมาณตั้งต้น
- สังเกตว่า ค่าครึ่งชีวิตยิ่งมาก เสถียรภาพของสสารกัมมันตรังสีนั้น ๆ ยิ่งมีมากตามไปด้วย
- ตัวอย่างเช่น ค่าครึ่งชีวิตของเรเดียม (radium) Ra-226 มีค่าประมาณ 1,700 ปี
- นั่นคือ ถ้ามีเรเดียม Ra-226 จำนวนหนึ่ง หลังจากนั้น 1,700 ปีผ่านไป ครึ่งหนึ่งของเรเดียม Ra-226 จำนวนนั้นจะเปลี่ยนสภาพเป็นเรดอน (radon) Ra-222
- นอกจากนี้ยังมีสสารกัมมันตรังสีที่เรารู้จักกันดีคือ ยูเรเนียม (uranium) U-238 ซึ่งมีค่าครึ่งชีวิตประมาณ 4,500,000,000 ปี นั่นคือ ถ้ามียูเรเนียม U-238 จำนวนหนึ่ง หลังจากนั้น 4.5 พันล้านปีผ่านไป ครึ่งหนึ่งของยูเรเนียม U-238 จำนวนนั้นจะเปลี่ยนสภาพเป็นตะกั่ว (lead) Pb-206 นั่นเอง

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

- ในวิชาฟิสิกส์ ค่าครึ่งชีวิต (half-life) เป็นตัววัดเสถียรภาพ (stability) ของสสารกัมมันตรังสี
- กล่าวคือ ค่าครึ่งชีวิตเป็นเวลาที่อะตอมที่มีปริมาณตั้งต้นเป็น A_0 สลายตัวหรือเปลี่ยนสภาพไปเป็นสสารอื่นจนเหลือปริมาณครึ่งหนึ่งของปริมาณตั้งต้น
- สังเกตว่า ค่าครึ่งชีวิตยิ่งมาก เสถียรภาพของสสารกัมมันตรังสีนั้น ๆ ยิ่งมีมากตามไปด้วย
- ตัวอย่างเช่น ค่าครึ่งชีวิตของเรเดียม (radium) Ra-226 มีค่าประมาณ 1,700 ปี
- นั่นคือ ถ้ามีเรเดียม Ra-226 จำนวนหนึ่ง หลังจากนั้น 1,700 ปีผ่านไป ครึ่งหนึ่งของเรเดียม Ra-226 จำนวนนั้นจะเปลี่ยนสภาพเป็นเรดอน (radon) Ra-222
- นอกจากนี้ยังมีสสารกัมมันตรังสีที่เรารู้จักกันดีคือ ยูเรเนียม (uranium) U-238 ซึ่งมีค่าครึ่งชีวิตประมาณ 4,500,000,000 ปี นั่นคือ ถ้ามียูเรเนียม U-238 จำนวนหนึ่ง หลังจากนั้น 4.5 พันล้านปีผ่านไป ครึ่งหนึ่งของยูเรเนียม U-238 จำนวนนั้นจะเปลี่ยนสภาพเป็นตะกั่ว (lead) Pb-206 นั่นเอง

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

- ในวิชาฟิสิกส์ ค่าครึ่งชีวิต (half-life) เป็นตัววัดเสถียรภาพ (stability) ของสสารกัมมันตรังสี
- กล่าวคือ ค่าครึ่งชีวิตเป็นเวลาที่อะตอมที่มีปริมาณตั้งต้นเป็น A_0 สลายตัวหรือเปลี่ยนสภาพไปเป็นสสารอื่นจนเหลือปริมาณครึ่งหนึ่งของปริมาณตั้งต้น
- สังเกตว่า ค่าครึ่งชีวิตยิ่งมาก เสถียรภาพของสสารกัมมันตรังสีนั้น ๆ ยิ่งมีมากตามไปด้วย
- ตัวอย่างเช่น ค่าครึ่งชีวิตของเรเดียม (radium) Ra-226 มีค่าประมาณ 1,700 ปี
- นั่นคือ ถ้ามีเรเดียม Ra-226 จำนวนหนึ่ง หลังจากนั้น 1,700 ปีผ่านไป ครึ่งหนึ่งของเรเดียม Ra-226 จำนวนนั้นจะเปลี่ยนสภาพเป็นเรดอน (radon) Ra-222
- นอกจากนี้ยังมีสสารกัมมันตรังสีที่เรารู้จักกันดีคือ ยูเรเนียม (uranium) U-238 ซึ่งมีค่าครึ่งชีวิตประมาณ 4,500,000,000 ปี นั่นคือ ถ้ามียูเรเนียม U-238 จำนวนหนึ่ง หลังจากนั้น 4.5 พันล้านปีผ่านไป ครึ่งหนึ่งของยูเรเนียม U-238 จำนวนนั้นจะเปลี่ยนสภาพเป็นตะกั่ว (lead) Pb-206 นั่นเอง

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

- ในวิชาฟิสิกส์ ค่าครึ่งชีวิต (half-life) เป็นตัววัดเสถียรภาพ (stability) ของสสารกัมมันตรังสี
- กล่าวคือ ค่าครึ่งชีวิตเป็นเวลาที่อะตอมที่มีปริมาณตั้งต้นเป็น A_0 สลายตัวหรือเปลี่ยนสภาพไปเป็นสสารอื่นจนเหลือปริมาณครึ่งหนึ่งของปริมาณตั้งต้น
- สังเกตว่า ค่าครึ่งชีวิตยิ่งมาก เสถียรภาพของสสารกัมมันตรังสีนั้น ๆ ยิ่งมีมากตามไปด้วย
- ตัวอย่างเช่น ค่าครึ่งชีวิตของเรเดียม (radium) Ra-226 มีค่าประมาณ 1,700 ปี
- นั่นคือ ถ้ามีเรเดียม Ra-226 จำนวนหนึ่ง หลังจากนั้น 1,700 ปีผ่านไป ครึ่งหนึ่งของเรเดียม Ra-226 จำนวนนั้นจะเปลี่ยนสภาพเป็นเรดอน (radon) Ra-222
- นอกจากนี้ยังมีสสารกัมมันตรังสีที่เรารู้จักกันดีคือ ยูเรเนียม (uranium) U-238 ซึ่งมีค่าครึ่งชีวิตประมาณ 4,500,000,000 ปี นั่นคือ ถ้ามียูเรเนียม U-238 จำนวนหนึ่ง หลังจากนั้น 4.5 พันล้านปีผ่านไป ครึ่งหนึ่งของยูเรเนียม U-238 จำนวนนั้นจะเปลี่ยนสภาพเป็นตะกั่ว (lead) Pb-206 นั่นเอง

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

- ในวิชาฟิสิกส์ ค่าครึ่งชีวิต (half-life) เป็นตัววัดเสถียรภาพ (stability) ของสสารกัมมันตรังสี
- กล่าวคือ ค่าครึ่งชีวิตเป็นเวลาที่อะตอมที่มีปริมาณตั้งต้นเป็น A_0 สลายตัวหรือเปลี่ยนสภาพไปเป็นสสารอื่นจนเหลือปริมาณครึ่งหนึ่งของปริมาณตั้งต้น
- สังเกตว่า ค่าครึ่งชีวิตยิ่งมาก เสถียรภาพของสสารกัมมันตรังสีนั้น ๆ ยิ่งมีมากตามไปด้วย
- ตัวอย่างเช่น ค่าครึ่งชีวิตของเรเดียม (radium) Ra-226 มีค่าประมาณ 1,700 ปี
- นั่นคือ ถ้ามีเรเดียม Ra-226 จำนวนหนึ่ง หลังจากนั้น 1,700 ปีผ่านไป ครึ่งหนึ่งของเรเดียม Ra-226 จำนวนนั้นจะเปลี่ยนสภาพเป็นเรดอน (radon) Ra-222
- นอกจากนี้ยังมีสสารกัมมันตรังสีที่เรารู้จักกันดีคือ ยูเรเนียม (uranium) U-238 ซึ่งมีค่าครึ่งชีวิตประมาณ 4,500,000,000 ปี นั่นคือ ถ้ามียูเรเนียม U-238 จำนวนหนึ่ง หลังจากนั้น 4.5 พันล้านปีผ่านไป ครึ่งหนึ่งของยูเรเนียม U-238 จำนวนนั้นจะเปลี่ยนสภาพเป็นตะกั่ว (lead) Pb-206 นั่นเอง

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

- ในวิชาฟิสิกส์ ค่าครึ่งชีวิต (half-life) เป็นตัววัดเสถียรภาพ (stability) ของสสารกัมมันตรังสี
- กล่าวคือ ค่าครึ่งชีวิตเป็นเวลาที่อะตอมที่มีปริมาณตั้งต้นเป็น A_0 สลายตัวหรือเปลี่ยนสภาพไปเป็นสสารอื่นจนเหลือปริมาณครึ่งหนึ่งของปริมาณตั้งต้น
- สังเกตว่า ค่าครึ่งชีวิตยิ่งมาก เสถียรภาพของสสารกัมมันตรังสีนั้น ๆ ยิ่งมีมากตามไปด้วย
- ตัวอย่างเช่น ค่าครึ่งชีวิตของเรเดียม (radium) Ra-226 มีค่าประมาณ 1,700 ปี
- นั่นคือ ถ้ามีเรเดียม Ra-226 จำนวนหนึ่ง หลังจากนั้น 1,700 ปีผ่านไป ครึ่งหนึ่งของเรเดียม Ra-226 จำนวนนั้นจะเปลี่ยนสภาพเป็นเรดอน (radon) Ra-222
- นอกจากนี้ยังมีสสารกัมมันตรังสีที่เรารู้จักกันดีคือ ยูเรเนียม (uranium) U-238 ซึ่งมีค่าครึ่งชีวิตประมาณ 4,500,000,000 ปี นั่นคือ ถ้ามียูเรเนียม U-238 จำนวนหนึ่ง หลังจากนั้น 4.5 พันล้านปีผ่านไป ครึ่งหนึ่งของยูเรเนียม U-238 จำนวนนั้นจะเปลี่ยนสภาพเป็นตะกั่ว (lead) Pb-206 นั่นเอง

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

ถ้าการสลายตัวของสสารกัมมันตรังสีเป็นสัดส่วนโดยตรงกับปริมาณของสสารกัมมันตรังสีที่เหลืออยู่จำนวน $A(t)$ ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ สมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dA}{dt} \propto A$ หรือ

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการเป็นสัดส่วนโดยตรงที่มีค่าเป็นลบ (Why?)

เราสามารถคำนวณค่าครึ่งชีวิตของสสารกัมมันตรังสีได้จากการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นร่วมกับข้อมูลเชิงประจักษ์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

เตาปฏิกรณ์นิวเคลียร์จะเปลี่ยนสภาพยูเรเนียม U-238 เป็นไอโซโทปของพลูโตเนียม (plutonium) Pu-239 สมมติให้ปริมาณตั้งต้นของพลูโตเนียมเป็น A_0 จากนั้น 15 ปีผ่านไปพบว่า 0.043% ของปริมาณพลูโตเนียมตั้งต้นสลายตัวไป จงหาค่าครึ่งชีวิตของไอโซโทปนี้โดยที่อัตราการสลายตัวเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนสสารที่เหลืออยู่

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

ถ้าการสลายตัวของสสารกัมมันตรังสีเป็นสัดส่วนโดยตรงกับปริมาณของสสารกัมมันตรังสีที่เหลืออยู่จำนวน $A(t)$ ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ สมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dA}{dt} \propto A$ หรือ

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการเป็นสัดส่วนโดยตรงที่มีค่าเป็นลบ (Why?) เราสามารถคำนวณค่าครึ่งชีวิตของสสารกัมมันตรังสีได้จากการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นร่วมกับข้อมูลเชิงประจักษ์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

เตาปฏิกรณ์นิวเคลียร์จะเปลี่ยนสภาพยูเรเนียม U-238 เป็นไอโซโทปของพลูโตเนียม (plutonium) Pu-239 สมมติให้ปริมาณตั้งต้นของพลูโตเนียมเป็น A_0 จากนั้น 15 ปี ผ่านไปพบว่า 0.043% ของปริมาณพลูโตเนียมตั้งต้นสลายตัวไป จงหาค่าครึ่งชีวิตของไอโซโทปนี้โดยที่อัตราการสลายตัวเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนสสารที่เหลืออยู่

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

กำหนดให้ $A(t)$ เป็นจำนวนไอโซโทปของพลูโตเนียมที่เหลืออยู่ ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

โดยมีค่าเริ่มต้น $A(0) = A_0$ ซึ่งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นเดียวกับตัวอย่างก่อนหน้า จึงได้ว่าผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อ 15 ปีผ่านไปพบว่า 0.043% ของปริมาณพลูโตเนียมตั้งต้นสลายตัวไป ซึ่งหมายความว่า มีพลูโตเนียมตั้งต้นจำนวน 99.957% เหลืออยู่ นั่นคือ $A(15) = 0.99957A_0$ จึงได้ว่า

$$0.99957A_0 = A_0 e^{k(15)}$$

ดังนั้น

$$k = \frac{\ln 0.99957}{15} \approx -0.00002867$$

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

กำหนดให้ $A(t)$ เป็นจำนวนไอโซโทปของพลูโตเนียมที่เหลืออยู่ ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

โดยมีค่าเริ่มต้น $A(0) = A_0$ ซึ่งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นเดียวกับตัวอย่างก่อนหน้า จึงได้ว่าผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อ 15 ปีผ่านไปพบว่า 0.043% ของปริมาณพลูโตเนียมตั้งต้นสลายตัวไป ซึ่งหมายความว่า มีพลูโตเนียมตั้งต้นจำนวน 99.957% เหลืออยู่ นั่นคือ $A(15) = 0.99957A_0$ จึงได้ว่า

$$0.99957A_0 = A_0 e^{k(15)}$$

ดังนั้น

$$k = \frac{\ln 0.99957}{15} \approx -0.00002867$$

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

กำหนดให้ $A(t)$ เป็นจำนวนไอโซโทปของพลูโตเนียมที่เหลืออยู่ ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

โดยมีค่าเริ่มต้น $A(0) = A_0$ ซึ่งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นเดียวกับตัวอย่างก่อนหน้า จึงได้ว่าผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อ 15 ปีผ่านไปพบว่า 0.043% ของปริมาณพลูโตเนียมตั้งต้นสลายตัวไป ซึ่งหมายความว่า มีพลูโตเนียมตั้งต้นจำนวน 99.957% เหลืออยู่ นั่นคือ $A(15) = 0.99957A_0$ จึงได้ว่า

$$0.99957A_0 = A_0 e^{k(15)}$$

ดังนั้น

$$k = \frac{\ln 0.99957}{15} \approx -0.00002867$$

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

กำหนดให้ $A(t)$ เป็นจำนวนไอโซโทปของพลูโตเนียมที่เหลืออยู่ ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

โดยมีค่าเริ่มต้น $A(0) = A_0$ ซึ่งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นเดียวกับตัวอย่างก่อนหน้า จึงได้ว่าผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อ 15 ปีผ่านไปพบว่า 0.043% ของปริมาณพลูโตเนียมตั้งต้นสลายตัวไป ซึ่งหมายความว่า มีพลูโตเนียมตั้งต้นจำนวน 99.957% เหลืออยู่ นั่นคือ $A(15) = 0.99957A_0$ จึงได้ว่า

$$0.99957A_0 = A_0 e^{k(15)}$$

ดังนั้น

$$k = \frac{\ln 0.99957}{15} \approx -0.00002867$$

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

กำหนดให้ $A(t)$ เป็นจำนวนไอโซโทปของพลูโตเนียมที่เหลืออยู่ ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

โดยมีค่าเริ่มต้น $A(0) = A_0$ ซึ่งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นเดียวกับตัวอย่างก่อนหน้า จึงได้ว่าผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อ 15 ปีผ่านไปพบว่า 0.043% ของปริมาณพลูโตเนียมตั้งต้นสลายตัวไป ซึ่งหมายความว่า มีพลูโตเนียมตั้งต้นจำนวน 99.957% เหลืออยู่ นั่นคือ $A(15) = 0.99957A_0$จึงได้ว่า

$$0.99957A_0 = A_0 e^{k(15)}$$

ดังนั้น

$$k = \frac{\ln 0.99957}{15} \approx -0.00002867$$

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

กำหนดให้ $A(t)$ เป็นจำนวนไอโซโทปของพลูโตเนียมที่เหลืออยู่ ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

โดยมีค่าเริ่มต้น $A(0) = A_0$ ซึ่งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นเดียวกับตัวอย่างก่อนหน้า จึงได้ว่าผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อ 15 ปีผ่านไปพบว่า 0.043% ของปริมาณพลูโตเนียมตั้งต้นสลายตัวไป ซึ่งหมายความว่า มีพลูโตเนียมตั้งต้นจำนวน 99.957% เหลืออยู่ นั่นคือ $A(15) = 0.99957A_0$จึงได้ว่า

$$0.99957A_0 = A_0 e^{k(15)}$$

ดังนั้น

$$k = \frac{\ln 0.99957}{15} \approx -0.00002867$$

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของปริมาณไอโซโทปของพลูโตเนียมที่เหลืออยู่กับเวลา t ใด ๆ คือ

$$A(t) = A_0 e^{-0.00002867t}$$

พิจารณาค่าครึ่งชีวิตของไอโซโทปพลูโตเนียมดังนี้ เราทราบว่า

$$\frac{1}{2}A_0 = A_0 e^{-0.00002867t}$$

นั่นคือ

$$t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-0.00002867} \approx 24,180\text{ปี}$$

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของปริมาณไอโซโทปของพลูโตเนียมที่เหลืออยู่กับเวลา t ใด ๆ คือ

$$A(t) = A_0 e^{-0.00002867t}$$

พิจารณาค่าครึ่งชีวิตของไอโซโทปพลูโตเนียมดังนี้ เราทราบว่า

$$\frac{1}{2}A_0 = A_0 e^{-0.00002867t}$$

นั่นคือ

$$t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-0.00002867} \approx 24,180 \text{ปี}$$

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของปริมาณไอโซโทปของพลูโตเนียมที่เหลืออยู่กับเวลา t ใด ๆ คือ

$$A(t) = A_0 e^{-0.00002867t}$$

พิจารณาค่าครึ่งชีวิตของไอโซโทปพลูโตเนียมดังนี้ เราทราบว่า

$$\frac{1}{2}A_0 = A_0 e^{-0.00002867t}$$

นั่นคือ

$$t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-0.00002867} \approx 24,180 \text{ปี}$$

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

- ในช่วง ค.ศ. 1950 วิลลาร์ด ลิบบี้ (Willard Libby) (ค.ศ. 1908 - 1980) นักเคมีฟิสิกส์ชาวอเมริกันได้นำเสนอวิธีประมาณอายุของซากดึกดำบรรพ์ (fossil) โดยใช้คาร์บอนกัมมันตรังสี
- หลักการของการคำนวณอายุซากดึกดำบรรพ์ด้วยคาร์บอนกัมมันตรังสีนี้เกิดจากความจริงที่ว่า ไอโซโทปของคาร์บอนกัมมันตรังสี (carbon) C-14 เกิดขึ้นจากการที่รังสีคอสมิก (cosmic) เข้าทำปฏิกิริยากับไนโตรเจน (nitrogen) ในบรรยากาศ

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

- ในช่วง ค.ศ. 1950 วิลลาร์ด ลิบบี้ (Willard Libby) (ค.ศ. 1908 - 1980) นักเคมีฟิสิกส์ชาวอเมริกันได้นำเสนอวิธีประมาณอายุของซากดึกดำบรรพ์ (fossil) โดยใช้คาร์บอนกัมมันตรังสี
- หลักการของการคำนวณอายุซากดึกดำบรรพ์ด้วยคาร์บอนกัมมันตรังสีนี้เกิดจากความจริงที่ว่า ไอโซโทปของคาร์บอนกัมมันตรังสี (carbon) C-14 เกิดขึ้นจากการที่รังสีคอสมิก (cosmic) เข้าทำปฏิกิริยากับไนโตรเจน (nitrogen) ในบรรยากาศ

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

- ในช่วง ค.ศ. 1950 วิลลาร์ด ลิบบี้ (Willard Libby) (ค.ศ. 1908 - 1980) นักเคมีฟิสิกส์ชาวอเมริกันได้นำเสนอวิธีประมาณอายุของซากดึกดำบรรพ์ (fossil) โดยใช้คาร์บอนกัมมันตรังสี
- หลักการของการคำนวณอายุซากดึกดำบรรพ์ด้วยคาร์บอนกัมมันตรังสีนี้เกิดจากความจริงที่ว่า ไอโซโทปของคาร์บอนกัมมันตรังสี (carbon) C-14 เกิดขึ้นจากการที่รังสีคอสมิก (cosmic) เข้าทำปฏิกิริยากับไนโตรเจน (nitrogen) ในบรรยากาศ

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

- โดยปกติแล้วอัตราส่วนของคาร์บอน C-14 ต่อคาร์บอนปกติ C-12 ในบรรยากาศและในองค์ประกอบของสิ่งมีชีวิตทั้งหลาย ณ ช่วงเวลาหนึ่ง ๆ จะมีค่าค่อนข้างคงที่
- กล่าวคือ แม้ว่าคาร์บอน C-14 จะมีการสลายตัวอยู่เสมอ แต่ก็จะมีการทดแทนใหม่ด้วยคาร์บอน C-14 ใหม่ในอัตราคงที่เช่นกัน
- ทว่าเมื่อสิ่งมีชีวิตตายลง การหายใจและการได้รับอาหารที่มีคาร์บอน C-14 เป็นองค์ประกอบจึงหยุดลง แต่คาร์บอน C-14 ที่มีอยู่ในร่างกายยังคงสลายตัวเป็นไนโตรเจนเสมอ ในขณะที่ปริมาณคาร์บอน C-12 ยังคงมีอยู่ปริมาณเท่าเดิม
- ดังนั้นการเปรียบเทียบปริมาณคาร์บอน C-14 ที่เหลืออยู่ในซากดึกดำบรรพ์กับปริมาณคาร์บอน C-14 ในบรรยากาศจะช่วยให้ทราบอายุโดยประมาณของซากดึกดำบรรพ์ได้ ทั้งนี้วิธีการนี้อยู่บนพื้นฐานความจริงที่ว่าครึ่งชีวิตของคาร์บอน C-14 มีค่าประมาณ 5,730 ปี
- จากการนำเสนอวิธีนี้ ในปี ค.ศ. 1960 ลิบบี้จึงได้รับรางวัลโนเบลในสาขาเคมี

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

- โดยปกติแล้วอัตราส่วนของคาร์บอน C-14 ต่อคาร์บอนปกติ C-12 ในบรรยากาศและในองค์ประกอบของสิ่งมีชีวิตทั้งหลาย ณ ช่วงเวลาหนึ่ง ๆ จะมีค่าค่อนข้างคงที่
- กล่าวคือ แม้ว่าคาร์บอน C-14 จะมีการสลายตัวอยู่เสมอ แต่ก็จะมีการทดแทนใหม่ด้วยคาร์บอน C-14 ใหม่ในอัตราคงที่เช่นกัน
- ทว่าเมื่อสิ่งมีชีวิตตายลง การหายใจและการได้รับอาหารที่มีคาร์บอน C-14 เป็นองค์ประกอบจึงหยุดลง แต่คาร์บอน C-14 ที่มีอยู่ในร่างกายยังคงสลายตัวเป็นไนโตรเจนเสมอ ในขณะที่ปริมาณคาร์บอน C-12 ยังคงมีอยู่ปริมาณเท่าเดิม
- ดังนั้นการเปรียบเทียบปริมาณคาร์บอน C-14 ที่เหลืออยู่ในซากดึกดำบรรพ์กับปริมาณคาร์บอน C-14
- ในบรรยากาศจะช่วยให้ทราบอายุโดยประมาณของซากดึกดำบรรพ์ได้ ทั้งนี้วิธีการนี้อยู่บนพื้นฐานความจริงที่ว่าครึ่งชีวิตของคาร์บอน C-14 มีค่าประมาณ 5,730 ปี
- จากการนำเสนอวิธีนี้ ในปี ค.ศ. 1960 ลิบบี้จึงได้รับรางวัลโนเบลในสาขาเคมี

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

- โดยปกติแล้วอัตราส่วนของคาร์บอน C-14 ต่อคาร์บอนปกติ C-12 ในบรรยากาศและในองค์ประกอบของสิ่งมีชีวิตทั้งหลาย ณ ช่วงเวลาหนึ่ง ๆ จะมีค่าค่อนข้างคงที่
- กล่าวคือ แม้ว่าคาร์บอน C-14 จะมีการสลายตัวอยู่เสมอ แต่ก็จะมีการทดแทนใหม่ด้วยคาร์บอน C-14 ใหม่ในอัตราคงที่เช่นกัน
- ทว่าเมื่อสิ่งมีชีวิตตายลง การหายใจและการได้รับอาหารที่มีคาร์บอน C-14 เป็นองค์ประกอบจึงหยุดลง แต่คาร์บอน C-14 ที่มีอยู่ในร่างกายยังคงสลายตัวเป็นไนโตรเจนเสมอ ในขณะที่ปริมาณคาร์บอน C-12 ยังคงมีอยู่ปริมาณเท่าเดิม
- ดังนั้นการเปรียบเทียบปริมาณคาร์บอน C-14 ที่เหลืออยู่ในซากดึกดำบรรพ์กับปริมาณคาร์บอน C-14
- ในบรรยากาศจะช่วยให้ทราบอายุโดยประมาณของซากดึกดำบรรพ์ได้ ทั้งนี้วิธีการนี้อยู่บนพื้นฐานความจริงที่ว่าครึ่งชีวิตของคาร์บอน C-14 มีค่าประมาณ 5,730 ปี
- จากการนำเสนอวิธีนี้ ในปี ค.ศ. 1960 ลิบบี้จึงได้รับรางวัลโนเบลในสาขาเคมี

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

- โดยปกติแล้วอัตราส่วนของคาร์บอน C-14 ต่อคาร์บอนปกติ C-12 ในบรรยากาศและในองค์ประกอบของสิ่งมีชีวิตทั้งหลาย ณ ช่วงเวลาหนึ่ง ๆ จะมีค่าค่อนข้างคงที่
- กล่าวคือ แม้ว่าคาร์บอน C-14 จะมีการสลายตัวอยู่เสมอ แต่ก็จะมีการทดแทนใหม่ด้วยคาร์บอน C-14 ใหม่ในอัตราคงที่เช่นกัน
- ทว่าเมื่อสิ่งมีชีวิตตายลง การหายใจและการได้รับอาหารที่มีคาร์บอน C-14 เป็นองค์ประกอบจึงหยุดลง แต่คาร์บอน C-14 ที่มีอยู่ในร่างกายยังคงสลายตัวเป็นไนโตรเจนเสมอ ในขณะที่ปริมาณคาร์บอน C-12 ยังคงมีอยู่ปริมาณเท่าเดิม
- ดังนั้นการเปรียบเทียบปริมาณคาร์บอน C-14 ที่เหลืออยู่ในซากดึกดำบรรพ์กับปริมาณคาร์บอน C-14
- ในบรรยากาศจะช่วยให้ทราบอายุโดยประมาณของซากดึกดำบรรพ์ได้ ทั้งนี้วิธีการนี้อยู่บนพื้นฐานความจริงที่ว่าครึ่งชีวิตของคาร์บอน C-14 มีค่าประมาณ 5, 730 ปี
- จากการนำเสนอวิธีนี้ ในปี ค.ศ. 1960 ลิบบี้จึงได้รับรางวัลโนเบลในสาขาเคมี

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

- โดยปกติแล้วอัตราส่วนของคาร์บอน C-14 ต่อคาร์บอนปกติ C-12 ในบรรยากาศและในองค์ประกอบของสิ่งมีชีวิตทั้งหลาย ณ ช่วงเวลาหนึ่ง ๆ จะมีค่าค่อนข้างคงที่
- กล่าวคือ แม้ว่าคาร์บอน C-14 จะมีการสลายตัวอยู่เสมอ แต่ก็จะมีการทดแทนใหม่ด้วยคาร์บอน C-14 ใหม่ในอัตราคงที่เช่นกัน
- ทว่าเมื่อสิ่งมีชีวิตตายลง การหายใจและการได้รับอาหารที่มีคาร์บอน C-14 เป็นองค์ประกอบจึงหยุดลง แต่คาร์บอน C-14 ที่มีอยู่ในร่างกายยังคงสลายตัวเป็นไนโตรเจนเสมอ ในขณะที่ปริมาณคาร์บอน C-12 ยังคงมีอยู่ปริมาณเท่าเดิม
- ดังนั้นการเปรียบเทียบปริมาณคาร์บอน C-14 ที่เหลืออยู่ในซากดึกดำบรรพ์กับปริมาณคาร์บอน C-14
- ในบรรยากาศจะช่วยให้ทราบอายุโดยประมาณของซากดึกดำบรรพ์ได้ ทั้งนี้วิธีการนี้อยู่บนพื้นฐานความจริงที่ว่าครึ่งชีวิตของคาร์บอน C-14 มีค่าประมาณ 5,730 ปี
- จากการนำเสนอวิธีนี้ ในปี ค.ศ. 1960 ลิบบี้จึงได้รับรางวัลโนเบลในสาขาเคมี

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

- โดยปกติแล้วอัตราส่วนของคาร์บอน C-14 ต่อคาร์บอนปกติ C-12 ในบรรยากาศและในองค์ประกอบของสิ่งมีชีวิตทั้งหลาย ณ ช่วงเวลาหนึ่ง ๆ จะมีค่าค่อนข้างคงที่
- กล่าวคือ แม้ว่าคาร์บอน C-14 จะมีการสลายตัวอยู่เสมอ แต่ก็จะมีการทดแทนใหม่ด้วยคาร์บอน C-14 ใหม่ในอัตราคงที่เช่นกัน
- ทว่าเมื่อสิ่งมีชีวิตตายลง การหายใจและการได้รับอาหารที่มีคาร์บอน C-14 เป็นองค์ประกอบจึงหยุดลง แต่คาร์บอน C-14 ที่มีอยู่ในร่างกายยังคงสลายตัวเป็นไนโตรเจนเสมอ ในขณะที่ปริมาณคาร์บอน C-12 ยังคงมีอยู่ปริมาณเท่าเดิม
- ดังนั้นการเปรียบเทียบปริมาณคาร์บอน C-14 ที่เหลืออยู่ในซากดึกดำบรรพ์กับปริมาณคาร์บอน C-14
- ในบรรยากาศจะช่วยให้ทราบอายุโดยประมาณของซากดึกดำบรรพ์ได้ ทั้งนี้วิธีการนี้อยู่บนพื้นฐานความจริงที่ว่าครึ่งชีวิตของคาร์บอน C-14 มีค่าประมาณ 5,730 ปี
- จากการนำเสนอวิธีนี้ ในปี ค.ศ. 1960 ลิบบี้จึงได้รับรางวัลโนเบลในสาขาเคมี

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

การสลายตัวของคาร์บอน C-14 ยังคงเกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

โดยที่ $A(0) = A_0$ เป็นค่าเริ่มต้น และการใช้ข้อมูลเชิงประจักษ์เพื่อคำนวณหาค่าคงตัว k ซึ่งจะส่งผลให้สามารถคำนวณอายุของซากดึกดำบรรพ์ได้ตามลำดับ

ซากดึกดำบรรพ์ของสิ่งมีชีวิตชนิดหนึ่งมีปริมาณคาร์บอน C-14 อยู่จำนวน $1/1000$ ของปริมาณคาร์บอน C-14 ในสิ่งมีชีวิตทั่วไป จงคำนวณหาอายุของซากดึกดำบรรพ์นี้ โดยที่ครึ่งชีวิตของคาร์บอน C-14 มีค่าประมาณ 5,730 ปี

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

การสลายตัวของคาร์บอน C-14 ยังคงเกี่ยวข้องกับการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

โดยที่ $A(0) = A_0$ เป็นค่าเริ่มต้น และการใช้ข้อมูลเชิงประจักษ์เพื่อคำนวณหาค่าคงตัว k ซึ่งจะส่งผลให้สามารถคำนวณอายุของซากดึกดำบรรพ์ได้ตามลำดับ

ซากดึกดำบรรพ์ของสิ่งมีชีวิตชนิดหนึ่งมีปริมาณคาร์บอน C-14 อยู่จำนวน $1/1000$ ของปริมาณคาร์บอน C-14 ในสิ่งมีชีวิตทั่วไป จงคำนวณหาอายุของซากดึกดำบรรพ์นี้ โดยที่ครึ่งชีวิตของคาร์บอน C-14 มีค่าประมาณ $5,730$ ปี

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

กำหนดให้ $A(t)$ เป็นจำนวนไอโซโทปของคาร์บอน C-14 ที่เหลืออยู่ ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dA}{dt} = kA, A(0) = A_0$$

ซึ่งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นเดียวกับตัวอย่างก่อนหน้านี้ จึงได้ว่า ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า ครึ่งชีวิตของคาร์บอน C-14 มีค่าประมาณ 5,730 ปี นั่นคือ $A(5730) = \frac{A_0}{2}$ จึงได้ว่า

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{k(5730)}$$

ดังนั้น

$$k = \frac{\ln \frac{1}{2}}{5730} \approx -0.000121$$

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

กำหนดให้ $A(t)$ เป็นจำนวนไอโซโทปของคาร์บอน C-14 ที่เหลืออยู่ ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dA}{dt} = kA, A(0) = A_0$$

ซึ่งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นเดียวกับตัวอย่างก่อนหน้านี้ จึงได้ว่า ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า ครึ่งชีวิตของคาร์บอน C-14 มีค่าประมาณ 5,730 ปี นั่นคือ $A(5730) = \frac{A_0}{2}$ จึงได้ว่า

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{k(5730)}$$

ดังนั้น

$$k = \frac{\ln \frac{1}{2}}{5730} \approx -0.000121$$

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

กำหนดให้ $A(t)$ เป็นจำนวนไอโซโทปของคาร์บอน C-14 ที่เหลืออยู่ ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dA}{dt} = kA, A(0) = A_0$$

ซึ่งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นเดียวกับตัวอย่างก่อนหน้านี้ จึงได้ว่า ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า ครึ่งชีวิตของคาร์บอน C-14 มีค่าประมาณ 5,730 ปี นั่นคือ $A(5730) = \frac{A_0}{2}$ จึงได้ว่า

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{k(5730)}$$

ดังนั้น

$$k = \frac{\ln \frac{1}{2}}{5730} \approx -0.000121$$

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

กำหนดให้ $A(t)$ เป็นจำนวนไอโซโทปของคาร์บอน C-14 ที่เหลืออยู่ ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dA}{dt} = kA, A(0) = A_0$$

ซึ่งเป็นปัญหาค่าเริ่มต้นเดียวกับตัวอย่างก่อนหน้านี้ จึงได้ว่า ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า ครึ่งชีวิตของคาร์บอน C-14 มีค่าประมาณ $5,730$ ปี นั่นคือ $A(5730) = \frac{A_0}{2}$ จึงได้ว่า

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{k(5730)}$$

ดังนั้น

$$k = \frac{\ln \frac{1}{2}}{5730} \approx -0.000121$$

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของปริมาณไอโซโทปของคาร์บอน C-14 ที่เหลืออยู่กับเวลา t ใด ๆ คือ

$$A(t) = A_0 e^{-0.000121t}$$

พิจารณาซากดึกดำบรรพ์ของสิ่งมีชีวิตชนิดหนึ่งมีปริมาณคาร์บอน C-14 อยู่จำนวน 1/1000 ของปริมาณคาร์บอน C-14 ในสิ่งมีชีวิตทั่วไปดังนี้ เราทราบว่า

$$\frac{1}{1000} A_0 = A_0 e^{-0.000121t}$$

นั่นคือ

$$t = \frac{\ln \frac{1}{1000}}{-0.000121} \approx 57,089 \text{ปี}$$

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของปริมาณไอโซโทปของคาร์บอน C-14 ที่เหลืออยู่กับเวลา t ใด ๆ คือ

$$A(t) = A_0 e^{-0.000121t}$$

พิจารณาซากดึกดำบรรพ์ของสิ่งมีชีวิตชนิดหนึ่งมีปริมาณคาร์บอน C-14 อยู่จำนวน $1/1000$ ของปริมาณคาร์บอน C-14 ในสิ่งมีชีวิตทั่วไปดังนี้ เราทราบว่า

$$\frac{1}{1000} A_0 = A_0 e^{-0.000121t}$$

นั่นคือ

$$t = \frac{\ln \frac{1}{1000}}{-0.000121} \approx 57{,}089 \text{ปี}$$

การสลายตัวของสสารกัมมันตรังสี

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของปริมาณไอโซโทปของคาร์บอน C-14 ที่เหลืออยู่กับเวลา t ใด ๆ คือ

$$A(t) = A_0 e^{-0.000121t}$$

พิจารณาซากดึกดำบรรพ์ของสิ่งมีชีวิตชนิดหนึ่งมีปริมาณคาร์บอน C-14 อยู่จำนวน $1/1000$ ของปริมาณคาร์บอน C-14 ในสิ่งมีชีวิตทั่วไปดังนี้ เราทราบว่า

$$\frac{1}{1000} A_0 = A_0 e^{-0.000121t}$$

นั่นคือ

$$t = \frac{\ln \frac{1}{1000}}{-0.000121} \approx 57,089 \text{ปี}$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

ตามกฎการเย็นตัวของนิวตัน (Newton's law of cooling) เราทราบว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุเป็นสัดส่วนโดยตรงกับผลต่างระหว่างอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม (ambient temperature) และอุณหภูมิของวัตถุ กล่าวคือ ถ้าอุณหภูมิของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ เป็น $T(t)$ และอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมเป็น $T_m(t)$ จะได้ว่าความสัมพันธ์อยู่ในรูป

$$\frac{dT}{dt} \propto T_m - T$$

นั่นคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุเป็น

$$\frac{dT}{dt} = k(T_m - T), \qquad T(t_0) = T_0 \tag{3}$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการเป็นสัดส่วนโดยตรง

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

ตามกฎการเย็นตัวของนิวตัน (Newton's law of cooling) เราทราบว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุเป็นสัดส่วนโดยตรงกับผลต่างระหว่างอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม (ambient temperature) และอุณหภูมิของวัตถุ กล่าวคือ ถ้าอุณหภูมิของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ เป็น $T(t)$ และอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมเป็น $T_m(t)$ จะได้ว่าความสัมพันธ์อยู่ในรูป

$$\frac{dT}{dt} \propto T_m - T$$

นั่นคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุเป็น

$$\frac{dT}{dt} = k(T_m - T), \qquad T(t_0) = T_0 \tag{3}$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการเป็นสัดส่วนโดยตรง

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

- ในที่นี้ สมมติให้ T_m เป็นค่าคงตัว และไม่คำนึงถึงปัจจัยการเพิ่ม/ลดอุณหภูมิที่เกิดจากมนุษย์ แสงอาทิตย์ และเครื่องปรับอากาศ
- สังเกตว่า ค่าคงตัว k มีค่าเป็นบวกเสมอและไม่ขึ้นกับ T, T_m หรือ t
- นอกจากนี้ ถ้าอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมมากกว่าอุณหภูมิของวัตถุ นั่นคือ $T_m - T > 0$ จะพบว่าอุณหภูมิของวัตถุจะเพิ่มสูงขึ้นตามอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม
- ในทางกลับกัน ถ้าอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมน้อยกว่าอุณหภูมิของวัตถุ นั่นคือ $T_m - T < 0$ จะพบว่าอุณหภูมิของวัตถุจะลดลงตามอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม

ในขณะที่นำกระป๋องน้ำอัดลมออกจากตู้เย็นพบว่ามีอุณหภูมิ 2 °C หลังจากนั้น 4 นาทีพบว่าอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมดังกล่าวเป็น 5 °C จงหาอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมนี้เมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที ถ้าอุณหภูมิห้องมีค่าเป็น 25 °C

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

- ในที่นี้ สมมติให้ T_m เป็นค่าคงตัว และไม่คำนึงถึงปัจจัยการเพิ่ม/ลดอุณหภูมิที่เกิดจากมนุษย์ แสงอาทิตย์ และเครื่องปรับอากาศ
- สังเกตว่า ค่าคงตัว k มีค่าเป็นบวกเสมอและไม่ขึ้นกับ T, T_m หรือ t
- นอกจากนี้ ถ้าอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมมากกว่าอุณหภูมิของวัตถุ นั่นคือ $T_m - T > 0$ จะพบว่าอุณหภูมิของวัตถุจะเพิ่มสูงขึ้นตามอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม
- ในทางกลับกัน ถ้าอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมน้อยกว่าอุณหภูมิของวัตถุ นั่นคือ $T_m - T < 0$ จะพบว่าอุณหภูมิของวัตถุจะลดลงตามอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม

ในขณะที่นำกระป๋องน้ำอัดลมออกจากตู้เย็นพบว่ามีอุณหภูมิ 2 °C หลังจากนั้น 4 นาทีพบว่าอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมดังกล่าวเป็น 5 °C จงหาอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมนี้เมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที ถ้าอุณหภูมิห้องมีค่าเป็น 25 °C

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

- ในที่นี้ สมมติให้ T_m เป็นค่าคงตัว และไม่คำนึงถึงปัจจัยการเพิ่ม/ลดอุณหภูมิที่เกิดจากมนุษย์ แสงอาทิตย์ และเครื่องปรับอากาศ
- สังเกตว่า ค่าคงตัว k มีค่าเป็นบวกเสมอและไม่ขึ้นกับ T, T_m หรือ t
- นอกจากนี้ ถ้าอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมมากกว่าอุณหภูมิของวัตถุ นั่นคือ $T_m - T > 0$ จะพบว่าอุณหภูมิของวัตถุจะเพิ่มสูงขึ้นตามอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม
- ในทางกลับกัน ถ้าอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมน้อยกว่าอุณหภูมิของวัตถุ นั่นคือ $T_m - T < 0$ จะพบว่าอุณหภูมิของวัตถุจะลดลงตามอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม

ในขณะที่นำกระป๋องน้ำอัดลมออกจากตู้เย็นพบว่ามีอุณหภูมิ 2 °C หลังจากนั้น 4 นาทีพบว่าอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมดังกล่าวเป็น 5 °C จงหาอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมนี้เมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที ถ้าอุณหภูมิห้องมีค่าเป็น 25 °C

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

- ในที่นี้ สมมติให้ T_m เป็นค่าคงตัว และไม่คำนึงถึงปัจจัยการเพิ่ม/ลดอุณหภูมิที่เกิดจากมนุษย์ แสงอาทิตย์ และเครื่องปรับอากาศ
- สังเกตว่า ค่าคงตัว k มีค่าเป็นบวกเสมอและไม่ขึ้นกับ T, T_m หรือ t
- นอกจากนี้ ถ้าอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมมากกว่าอุณหภูมิของวัตถุ นั่นคือ $T_m - T > 0$ จะพบว่าอุณหภูมิของวัตถุจะเพิ่มสูงขึ้นตามอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม
- ในทางกลับกัน ถ้าอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมน้อยกว่าอุณหภูมิของวัตถุ นั่นคือ $T_m - T < 0$ จะพบว่าอุณหภูมิของวัตถุจะลดลงตามอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม

ในขณะที่นำกระป๋องน้ำอัดลมออกจากตู้เย็นพบว่ามีอุณหภูมิ 2 °C หลังจากนั้น 4 นาทีพบว่าอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมดังกล่าวเป็น 5 °C จงหาอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมนี้เมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที ถ้าอุณหภูมิห้องมีค่าเป็น 25 °C

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

- ในที่นี้ สมมติให้ T_m เป็นค่าคงตัว และไม่คำนึงถึงปัจจัยการเพิ่ม/ลดอุณหภูมิที่เกิดจากมนุษย์ แสงอาทิตย์ และเครื่องปรับอากาศ
- สังเกตว่า ค่าคงตัว k มีค่าเป็นบวกเสมอและไม่ขึ้นกับ T, T_m หรือ t
- นอกจากนี้ ถ้าอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมมากกว่าอุณหภูมิของวัตถุ นั่นคือ $T_m - T > 0$ จะพบว่าอุณหภูมิของวัตถุจะเพิ่มสูงขึ้นตามอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม
- ในทางกลับกัน ถ้าอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมน้อยกว่าอุณหภูมิของวัตถุ นั่นคือ $T_m - T < 0$ จะพบว่าอุณหภูมิของวัตถุจะลดลงตามอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม

ในขณะที่นำกระป๋องน้ำอัดลมออกจากตู้เย็นพบว่ามีอุณหภุมิ 2 $^\circ C$ หลังจากนั้น 4 นาทีพบว่าอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมดังกล่าวเป็น 5 $^\circ C$ จงหาอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมนี้เมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที ถ้าอุณหภูมิห้องมีค่าเป็น 25 $^\circ C$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

กำหนดให้ $T(t)$ เป็นอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลม ณ เวลา t ใด ๆ เนื่องจากอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมเป็น 25 $^\circ C$ และอุณหภูมิ ณ จุดเริ่มต้น $t = 0$ มีค่า $T_0 = 2$ $^\circ C$ จึงได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dT}{dt} = k(T_m - T), T(0) = T_0$$

หรือ

$$\frac{dT}{dt} = k(25 - T), T(0) = 2$$

สังเกตว่า สมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการเชิงเส้น เราจึงพิจารณาการหาผลเฉลยได้ดังนี้ เนื่องจาก ตัวประกอบปริพันธ์

$$e^{\int k dt} = e^{kt}$$

ทำให้ได้ว่า

$$e^{kt}\frac{dT}{dt} + e^{kt}kT = e^{kt}25k$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

กำหนดให้ $T(t)$ เป็นอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลม ณ เวลา t ใด ๆ เนื่องจากอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมเป็น 25 $^\circ C$ และอุณหภูมิ ณ จุดเริ่มต้น $t = 0$ มีค่า $T_0 = 2$ $^\circ C$ จึงได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dT}{dt} = k(T_m - T), T(0) = T_0$$

หรือ

$$\frac{dT}{dt} = k(25 - T), T(0) = 2$$

สังเกตว่า สมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการเชิงเส้น เราจึงพิจารณาการหาผลเฉลยได้ดังนี้ เนื่องจาก ตัวประกอบปริพันธ์

$$e^{\int k dt} = e^{kt}$$

ทำให้ได้ว่า

$$e^{kt}\frac{dT}{dt} + e^{kt}kT = e^{kt}25k$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

กำหนดให้ $T(t)$ เป็นอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลม ณ เวลา t ใด ๆ เนื่องจากอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมเป็น 25 $°C$ และอุณหภูมิ ณ จุดเริ่มต้น $t = 0$ มีค่า $T_0 = 2$ $°C$ จึงได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dT}{dt} = k(T_m - T), T(0) = T_0$$

หรือ

$$\frac{dT}{dt} = k(25 - T), T(0) = 2$$

สังเกตว่า สมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการเชิงเส้น เราจึงพิจารณาการหาผลเฉลยได้ดังนี้ เนื่องจาก ตัวประกอบปริพันธ์

$$e^{\int k dt} = e^{kt}$$

ทำให้ได้ว่า

$$e^{kt}\frac{dT}{dt} + e^{kt}kT = e^{kt}25k$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

นั่นคือ

$$\frac{d}{dt}[e^{kt}T] = e^{kt}25k$$

การหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการทำให้ได้ว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$T(t) = 25 + ce^{-kt}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ จากเงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 2$ จะได้ว่า

$$2 = T(0) = 25 + ce^{-k(0)}$$

ส่งผลให้ได้ว่า

$$c = -23$$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$T(t) = 25 - 23e^{-kt}$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

นั่นคือ

$$\frac{d}{dt}[e^{kt}T] = e^{kt}25k$$

การหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการทำให้ได้ว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$T(t) = 25 + ce^{-kt}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ จากเงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 2$ จะได้ว่า

$$2 = T(0) = 25 + ce^{-k(0)}$$

ส่งผลให้ได้ว่า

$$c = -23$$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$T(t) = 25 - 23e^{-kt}$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

นั่นคือ

$$\frac{d}{dt}[e^{kt}T] = e^{kt}25k$$

การหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการทำให้ได้ว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$T(t) = 25 + ce^{-kt}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ จากเงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 2$ จะได้ว่า

$$2 = T(0) = 25 + ce^{-k(0)}$$

ส่งผลให้ได้ว่า

$$c = -23$$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$T(t) = 25 - 23e^{-kt}$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

นั่นคือ

$$\frac{d}{dt}[e^{kt}T] = e^{kt}25k$$

การหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการทำให้ได้ว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$T(t) = 25 + ce^{-kt}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ จากเงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 2$ จะได้ว่า

$$2 = T(0) = 25 + ce^{-k(0)}$$

ส่งผลให้ได้ว่า

$$c = -23$$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$T(t) = 25 - 23e^{-kt}$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

นั่นคือ

$$\frac{d}{dt}[e^{kt}T] = e^{kt}25k$$

การหาปริพันธ์ทั้งสองฝั่งของสมการทำให้ได้ว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$T(t) = 25 + ce^{-kt}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ จากเงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 2$ จะได้ว่า

$$2 = T(0) = 25 + ce^{-k(0)}$$

ส่งผลให้ได้ว่า

$$c = -23$$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$T(t) = 25 - 23e^{-kt}$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อเวลาผ่านไป 4 นาทีพบว่าอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมดังกล่าวเป็น 5 $^\circ C$ นั่นคือ $T(4) = 5$ จึงได้ว่า

$$5 = T(4) = 25 - 23e^{k(4)}$$

ดังนั้น

$$k = -\frac{\ln \frac{20}{23}}{4} \approx 0.03494$$

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมกับเวลา t ใด ๆ คือ

$$T(t) = 25 - 23e^{-0.03494t}$$

พิจารณาอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมนี้เมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที ดังนี้

$$T(20) = 25 - 23e^{-0.03494(20)} \approx 13.56 \ ^\circ C$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อเวลาผ่านไป 4 นาทีพบว่าอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมดังกล่าวเป็น 5 $^\circ C$ นั่นคือ $T(4) = 5$ จึงได้ว่า

$$5 = T(4) = 25 - 23e^{k(4)}$$

ดังนั้น

$$k = -\frac{\ln \frac{20}{23}}{4} \approx 0.03494$$

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมกับเวลา t ใด ๆ คือ

$$T(t) = 25 - 23e^{-0.03494t}$$

พิจารณาอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมนี้เมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที ดังนี้

$$T(20) = 25 - 23e^{-0.03494(20)} \approx 13.56 \ ^\circ C$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อเวลาผ่านไป 4 นาทีพบว่าอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมดังกล่าวเป็น 5 $^\circ C$ นั่นคือ $T(4) = 5$ จึงได้ว่า

$$5 = T(4) = 25 - 23e^{k(4)}$$

ดังนั้น

$$k = -\frac{\ln \frac{20}{23}}{4} \approx 0.03494$$

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมกับเวลา t ใด ๆ คือ

$$T(t) = 25 - 23e^{-0.03494t}$$

พิจารณาอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมนี้เมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที ดังนี้

$$T(20) = 25 - 23e^{-0.03494(20)} \approx 13.56 \ ^\circ C$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อเวลาผ่านไป 4 นาทีพบว่าอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมดังกล่าวเป็น 5 $^\circ C$ นั่นคือ $T(4) = 5$ จึงได้ว่า

$$5 = T(4) = 25 - 23e^{k(4)}$$

ดังนั้น

$$k = -\frac{\ln \frac{20}{23}}{4} \approx 0.03494$$

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมกับเวลา t ใด ๆ คือ

$$T(t) = 25 - 23e^{-0.03494t}$$

พิจารณาอุณหภูมิของกระป๋องน้ำอัดลมนี้เมื่อเวลาผ่านไป 20 นาที ดังนี้

$$T(20) = 25 - 23e^{-0.03494(20)} \approx 13.56\ ^\circ C$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

ในขณะที่นำเค้กออกจากเตาอบพบว่าอุณหภูมิของเค้กเป็น 300 $^\circ F$ หลังจากนั้น 3 นาทีพบว่าอุณหภูมิของเค้กเป็น 200 $^\circ F$ จงหาเวลาที่ทำให้เค้กชิ้นนี้เย็นสนิทที่อุณหภูมิห้อง 77 $^\circ F$

กำหนดให้ $T(t)$ เป็นอุณหภูมิของเค้ก ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dT}{dt} = k(77 - T), T(0) = 300$$

ซึ่งได้ว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$T(t) = 77 + ce^{-kt}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ จากเงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 300$ จะได้ว่า

$$300 = T(0) = 77 + ce^{-k(0)}$$

ส่งผลให้ได้ว่า

$$c = 223$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

ในขณะที่นำเค้กออกจากเตาอบพบว่าอุณหภูมิของเค้กเป็น 300 $°F$ หลังจากนั้น 3 นาทีพบว่าอุณหภูมิของเค้กเป็น 200 $°F$ จงหาเวลาที่ทำให้เค้กชิ้นนี้เย็นสนิทที่อุณหภูมิห้อง 77 $°F$

กำหนดให้ $T(t)$ เป็นอุณหภูมิของเค้ก ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dT}{dt} = k(77 - T), T(0) = 300$$

ซึ่งได้ว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$T(t) = 77 + ce^{-kt}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ จากเงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 300$ จะได้ว่า

$$300 = T(0) = 77 + ce^{-k(0)}$$

ส่งผลให้ได้ว่า

$$c = 223$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

ในขณะที่นำเค้กออกจากเตาอบพบว่าอุณหภูมิของเค้กเป็น 300 $^\circ F$ หลังจากนั้น 3 นาทีพบว่าอุณหภูมิของเค้กเป็น 200 $^\circ F$ จงหาเวลาที่ทำให้เค้กชิ้นนี้เย็นสนิทที่อุณหภูมิห้อง 77 $^\circ F$

กำหนดให้ $T(t)$ เป็นอุณหภูมิของเค้ก ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dT}{dt} = k(77 - T), T(0) = 300$$

ซึ่งได้ว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$T(t) = 77 + ce^{-kt}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ จากเงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 300$ จะได้ว่า

$$300 = T(0) = 77 + ce^{-k(0)}$$

ส่งผลให้ได้ว่า

$$c = 223$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

ในขณะที่นำเค้กออกจากเตาอบพบว่าอุณหภูมิของเค้กเป็น 300 $^\circ F$ หลังจากนั้น 3 นาทีพบว่าอุณหภูมิของเค้กเป็น 200 $^\circ F$ จงหาเวลาที่ทำให้เค้กชิ้นนี้เย็นสนิทที่อุณหภูมิห้อง 77 $^\circ F$

กำหนดให้ $T(t)$ เป็นอุณหภูมิของเค้ก ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dT}{dt} = k(77 - T), T(0) = 300$$

ซึ่งได้ว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$T(t) = 77 + ce^{-kt}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ จากเงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 300$ จะได้ว่า

$$300 = T(0) = 77 + ce^{-k(0)}$$

ส่งผลให้ได้ว่า

$$c = 223$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

ในขณะที่นำเค้กออกจากเตาอบพบว่าอุณหภูมิของเค้กเป็น 300 $^\circ F$ หลังจากนั้น 3 นาทีพบว่าอุณหภูมิของเค้กเป็น 200 $^\circ F$ จงหาเวลาที่ทำให้เค้กชิ้นนี้เย็นสนิทที่อุณหภูมิห้อง 77 $^\circ F$

กำหนดให้ $T(t)$ เป็นอุณหภูมิของเค้ก ณ เวลา t ใด ๆ จะได้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$\frac{dT}{dt} = k(77 - T), T(0) = 300$$

ซึ่งได้ว่า ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$T(t) = 77 + ce^{-kt}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ จากเงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 300$ จะได้ว่า

$$300 = T(0) = 77 + ce^{-k(0)}$$

ส่งผลให้ได้ว่า

$$c = 223$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$T(t) = 77 + 223e^{-kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อเวลาผ่านไป 3 นาทีพบว่าอุณหภูมิของเค้กเป็น 200 $^\circ F$ นั่นคือ $T(3) = 200$ จึงได้ว่า

$$200 = T(3) = 77 + 223e^{-k(3)}$$

ดังนั้น

$$k = \frac{\ln \frac{200-77}{223}}{-3} \approx 0.1983$$

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของอุณหภูมิของเค้กกับเวลา t ใด ๆ คือ

$$T(t) = 77 + 223e^{-0.1983t}$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$T(t) = 77 + 223e^{-kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อเวลาผ่านไป 3 นาทีพบว่าอุณหภูมิของเค้กเป็น 200 $^\circ F$ นั่นคือ $T(3) = 200$ จึงได้ว่า

$$200 = T(3) = 77 + 223e^{-k(3)}$$

ดังนั้น

$$k = \frac{\ln \frac{200-77}{223}}{-3} \approx 0.1983$$

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของอุณหภูมิของเค้กกับเวลา t ใด ๆ คือ

$$T(t) = 77 + 223e^{-0.1983t}$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$T(t) = 77 + 223e^{-kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อเวลาผ่านไป 3 นาทีพบว่าอุณหภูมิของเค้กเป็น 200 $^\circ F$ นั่นคือ $T(3) = 200$ จึงได้ว่า

$$200 = T(3) = 77 + 223e^{-k(3)}$$

ดังนั้น

$$k = \frac{\ln \frac{200-77}{223}}{-3} \approx 0.1983$$

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของอุณหภูมิของเค้กกับเวลา t ใด ๆ คือ

$$T(t) = 77 + 223e^{-0.1983t}$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$T(t) = 77 + 223e^{-kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อเวลาผ่านไป 3 นาทีพบว่าอุณหภูมิของเค้กเป็น 200 $^\circ F$ นั่นคือ $T(3) = 200$ จึงได้ว่า

$$200 = T(3) = 77 + 223e^{-k(3)}$$

ดังนั้น

$$k = \frac{\ln \frac{200-77}{223}}{-3} \approx 0.1983$$

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของอุณหภูมิของเค้กกับเวลา t ใด ๆ คือ

$$T(t) = 77 + 223e^{-0.1983t}$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$T(t) = 77 + 223e^{-kt}$$

จากข้อมูลเชิงประจักษ์ที่ว่า เมื่อเวลาผ่านไป 3 นาทีพบว่าอุณหภูมิของเค้กเป็น 200 $^{\circ}F$ นั่นคือ $T(3) = 200$ จึงได้ว่า

$$200 = T(3) = 77 + 223e^{-k(3)}$$

ดังนั้น

$$k = \frac{\ln \frac{200-77}{223}}{-3} \approx 0.1983$$

เพราะฉะนั้น ความสัมพันธ์ของอุณหภูมิของเค้กกับเวลา t ใด ๆ คือ

$$T(t) = 77 + 223e^{-0.1983t}$$

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

พิจารณาเวลาที่ทำให้เค้กชิ้นนี้เย็นสนิทที่อุณหภูมิห้อง 77 $^\circ F$ ดังนี้

$$77 = T(t) = 77 + 223e^{-0.1983t}$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ที่จะมี t ที่ทำให้ $T(t) = 77$ เนื่องจาก

$$\lim_{t \to +\infty} 77 + 223e^{-0.1983t} = 77$$

จากข้อสังเกตนี้ ส่งผลให้ไม่สามารถระบุเวลาที่เค้กชิ้นนี้เย็นสนิทที่อุณหภูมิห้อง 77 $^\circ F$ ได้

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

พิจารณาเวลาที่ทำให้เค้กชิ้นนี้เย็นสนิทที่อุณหภูมิห้อง 77 $^\circ F$ ดังนี้

$$77 = T(t) = 77 + 223e^{-0.1983t}$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ที่จะมี t ที่ทำให้ $T(t) = 77$ เนื่องจาก

$$\lim_{t \to +\infty} 77 + 223e^{-0.1983t} = 77$$

จากข้อสังเกตนี้ ส่งผลให้ไม่สามารถระบุเวลาที่เค้กชิ้นนี้เย็นสนิทที่อุณหภูมิห้อง 77 $^\circ F$ ได้

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

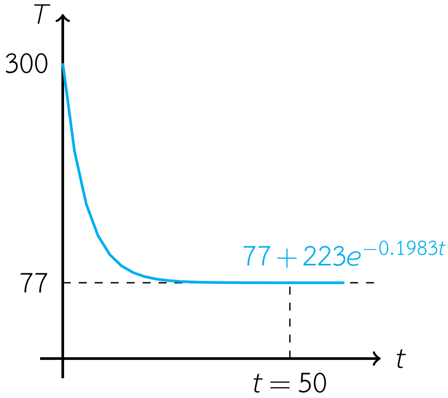
พิจารณาเวลาที่ทำให้เค้กชิ้นนี้เย็นสนิทที่อุณหภูมิห้อง 77 $^\circ F$ ดังนี้

$$77 = T(t) = 77 + 223e^{-0.1983t}$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ที่จะมี t ที่ทำให้ $T(t) = 77$ เนื่องจาก

$$\lim_{t \to +\infty} 77 + 223e^{-0.1983t} = 77$$

จากข้อสังเกตนี้ ส่งผลให้ไม่สามารถระบุเวลาที่เค้กชิ้นนี้เย็นสนิทที่อุณหภูมิห้อง 77 $^\circ F$ ได้

กฎการเย็นตัวของนิวตัน

อย่างไรก็ตาม จากความสัมพันธ์นี้ เราสามารถพิจารณาปรากฏการณ์ของความสัมพันธ์ของอุณหภูมิของเค้กกับเวลา t ใด ๆ ได้ดังรูปต่อไปนี้