$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2.07.42

3.3 อนุพันธ์ย่อย (Partial derivatives)

แนวคิด อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันหลายตัวแปรเทียบกับตัวแปรใดหมายถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งแปรเทียบกับตัวแปรนั้น โดยมองว่าตัวแปรอื่นเป็นค่าคงตัว

บทนิยาม 3.3.1 ให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของ x และ y

1) อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x ที่จุด (x, y) คือ ฟังก์ชัน

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \qquad (1)$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

2) อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y ที่จุด (x, y) คือ ฟังก์ชัน

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \qquad (2)$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 3.3.1 จะเห็นว่า

ถ้าต้องการหา $\frac{\partial f}{\partial x}$ เราจะให้ y เป็นค่าคงตัว และ

ถ้าต้องการหา $\frac{\partial f}{\partial y}$ เราจะให้ **x** เป็นค่าคงตัว

แล้ว จึงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันของตัวแปร 1 ตัว

ตัวอย่าง: จงหาค่าของ $\frac{\partial f}{\partial x}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}$ เมื่อ $f(x,y) = xy$

วิธีทำ

① $$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)y - xy}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{xy} + \Delta x y - \cancel{xy}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} y$$

$$= y$$

② $$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x(y+\Delta y) - xy}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x \Delta y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} x = x$$

$\blacksquare$

สำหรับ**อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันซึ่งมากกว่าสองตัวแปรขึ้นไป** เราก็ให้ตัวแปรหนึ่งเป็นตัวแปรอิสระ ส่วนตัวแปรที่เหลือเป็นค่าคงตัว เช่น อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน n ตัวแปร $f(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)$ เทียบกับ x_k คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f(x_1,\ldots,x_k+\Delta x_k,\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)}{\Delta x_k}$$

จะเห็นว่า $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ เป็นอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x_k โดยที่ตัวแปร x_j เมื่อ j=1,2,...,n และ $j\neq k$ เป็นค่าคงตัว

ค่าของอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x และ y ที่จุด (x_0,y_0) เขียนแทนด้วย $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ หรือ $f_x(x_0,y_0)$

และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ หรือ $f_y(x_0,y_0)$ ตามลำดับ

มีความหมายดังนี้

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\, y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,\, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

ตัวอย่าง 3.3.1 (หน้า 155) กำหนดให้ $f(x,y)=2y^2-3xy$

จงใช้บทนิยาม 3.3.1 หาค่า $\frac{\partial f}{\partial x}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}$

วิธีทำ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2y^2 - 3(x+\Delta x)y] - [2y^2 - 3xy]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3y\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (-3y)$$

$$= (-3y)$$

และ

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[2(y+\Delta y)^2 - 3x(y+\Delta y)] - [2y^2 - 3xy]}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(4y-3x)\Delta y + (\Delta y)^2}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} (4y - 3x + \Delta y)$$

$$= 4y - 3x$$

ตัวอย่าง จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ เมื่อ $f(x,y) = \dfrac{x}{y} \cdot \sin(x^2y^3)$

วิธีทำ

① หา $\dfrac{\partial f}{\partial x}$

วิธีทำ : "ให้ y เป็นค่าคงตัวและหาอนุพันธ์เทียบ x"

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y} \cdot \sin(x^2y^3)\right)$$

$$= \frac{x}{y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin(x^2y^3)\right) + \left(\sin(x^2y^3)\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= \frac{x}{y}\left(\cos(x^2y^3)\right)\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3) + \left(\sin(x^2y^3)\right)\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$= \frac{x}{y}\left(\cos(x^2y^3)\right)(2xy^3) + \frac{1}{y}\sin(x^2y^3)$$

$$= 2x^2y^2\cos(x^2y^3) + \frac{1}{y}\sin(x^2y^3)$$

② $$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y} \cdot \sin(x^2y^3)\right)$$

$$= \frac{x}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\sin(x^2y^3)\right) + \sin(x^2y^3)\frac{\partial}{\partial y}(xy^{-1})$$

$$= \frac{x}{y}\left(\cos\left(x^2y^3\right)\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y^3\right) + \sin\left(x^2y^3\right)\left(\frac{-x}{y^2}\right)$$

$$= \frac{x}{y}\left(\cos\left(x^2y^3\right)\right)\left(3x^2y^2\right) - \frac{x}{y^2}\sin\left(x^2y^3\right)$$

$$= 3x^3y\cos\left(x^2y^3\right) - \frac{x}{y^2}\sin\left(x^2y^3\right)$$

<u>ฝาก</u>! หา f_x และ f_y ที่ $f(x,y) = \dfrac{2y}{y+\cos x}$

ตัวอย่าง จงหา f_x และ f_y เมื่อ $f(x,y) = xye^{-x^2}$

วิธีทำ

① $f_y = \frac{\partial}{\partial y}(xye^{-x^2}) = xe^{-x^2}\frac{\partial y}{\partial y} = xe^{-x^2}$

② $f_x = \frac{\partial}{\partial x}(xye^{-x^2}) = y\frac{\partial}{\partial x}(xe^{-x^2})$

$= y\left(x\frac{\partial}{\partial x}e^{-x^2} + e^{-x^2}\frac{\partial x}{\partial x}\right)$

$= y\left(xe^{-x^2}\frac{\partial}{\partial x}(-x^2) + e^{-x^2}\right)$

$= y\left(xe^{-x^2}(-2x) + e^{-x^2}\right)$

$= ye^{-x^2}(1-2x^2)$

∎

ตัวอย่าง กำหนด $f(x,y) = (1 + x^2 + y^5)^{\frac{4}{3}}$

จงหา $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ที่จุด (3, 1)

วิธีทำ

① $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left((1+x^2+y^5)^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$= \frac{4}{3}(1+x^2+y^5)^{\frac{1}{3}}\frac{\partial}{\partial x}(1+x^2+y^5)$$

$$= \frac{4}{3}(1+x^2+y^5)^{\frac{1}{3}}(0+2x+0) = \frac{8x}{3}(1+x^2+y^5)^{\frac{1}{3}}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(3,1)} = \frac{8\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}}(1+3^2+1^5)^{\frac{1}{3}} = 8(1+9+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 8\sqrt[3]{11}$$

② $$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left((1+x^2+y^5)^{\frac{4}{3}}\right)$$

$$= \frac{4}{3}(1+x^2+y^5)^{\frac{1}{3}}\frac{\partial}{\partial y}(1+x^2+y^5)$$

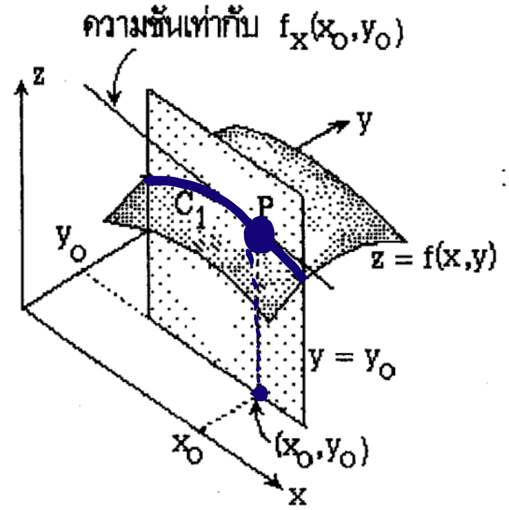
$$= \frac{4}{3}(1+x^2+y^5)^{\frac{1}{3}}(5y^4) = \frac{20}{3}y^4(1+x^2+y^5)^{\frac{1}{3}}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(3,1)} = \frac{20}{3}(1)^4(1+3^2+1^5)^{\frac{1}{3}} = \frac{20}{3}\sqrt[3]{11}$$

$\blacksquare$

ความหมายทางเรขาคณิตของ $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ของ $z = f(x,y)$

ให้ P เป็นจุดบนพื้นผิวที่มีสมการคือ $z = f(x,y)$



ถ้า **ให้ y คงที่**โดย $y = y_0$ และ **ให้ x แปรค่า**

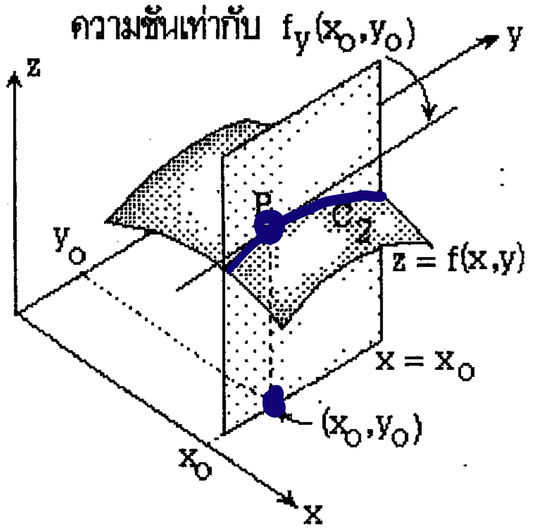
แล้ว P จะเป็นจุดที่เคลื่อนไปตามเส้นโค้ง C_1 ที่เกิดจากการตัดพื้นผิว $z = f(x,y)$ กับระนาบ $y = y_0$

ดังนั้น $f_x(x_0,y_0)$ คือ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C_1 ที่จุด (x_0,y_0) (ซึ่งก็คือ การเปลี่ยนแปลงในค่า z เมื่อ x เพิ่มขึ้นหนึ่งหน่วย)

นั่นคือ $$f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

ความหมายทางเรขาคณิตของ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ของ $z = f(x,y)$



ถ้า **ให้ x คงที่**โดย $x = x_0$ และ**ให้ y แปรค่า**

แล้ว P จะเป็นจุดที่เคลื่อนไปตามเส้นโค้ง C_2 ที่เกิดจากการตัดพื้นผิว $z = f(x,y)$ กับระนาบ $x = x_0$

ดังนั้น $f_y(x_0,y_0)$ คือ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C_2 ที่จุด (x_0,y_0) (ซึ่งก็คือ การเปลี่ยนแปลงในค่า z เมื่อ y เพิ่มขึ้นหนึ่งหน่วย)

นั่นคือ $$f_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

ตัวอย่าง 3.3.5 (หน้า 157) จุด Q เคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งซึ่งเป็นรอยตัดของทรงกลม $x^2+y^2+z^2=1$ กับระนาบ $x=2/3$ ที่จุด $P\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ z เทียบกับ y มีค่าเท่าไร

วิธีทำ เนื่องจากพิกัด z ของจุด P มีค่าเป็นบวก จะได้ว่าจุดนี้อยู่บนพื้นผิวของครึ่งทรงกลมส่วนบนซึ่งมีสมการ $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ z เทียบกับ y ที่จุดนี้ (เสมือนกับจุด Q เคลื่อนที่ไปตามวงกลมของรอยตัด) คือ $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y)$$

$$=-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

เพราะฉะนั้น $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)}=-\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}}=-\frac{1}{2}$

วิธีที่ 2 หา $\frac{\partial z}{\partial y}$ จากฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดยปริยายของทรงกลม $x^2+y^2+z^2=1$เทียบกับ y และ**พิจารณา z เป็นฟังก์ชันของ x และ y** จะได้

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x^2+y^2+z^2\right]=\frac{\partial}{\partial y}(1)$$

$$2y+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$$

แทนค่าพิกัด y และ z ของจุด $P\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ จะได้

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}=-\frac{(1/3)}{(2/3)}=-\frac{1}{2}$$

ตัวอย่าง 3.3.7 (หน้า 159) เส้นทแยงมุม D ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า กำหนดโดย $D = \sqrt{x^2 + y^2}$ เมื่อ x และ y เป็นความยาวของด้านประกอบมุมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

(a) จงหาสูตรสำหรับหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ D เทียบกับ x ถ้า x เปลี่ยนแปลงไปขณะที่ y คงที่

(b) สมมุติ y=4 เซนติเมตร จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ D เทียบกับ x ขณะที่ด้าน x ยาว 3 เซนติเมตร

วิธีทำ

(a) $$\frac{\partial D}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(b) $$\left.\frac{\partial D}{\partial x}\right|_{(3,4)} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}$$

อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง (Higher-Order Partial Derivatives)

อนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งของ $z = f(x,y)$ $[f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)]$ ยังคงเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ y

สามารถหาอนุพันธ์ย่อยของ f_x และ f_y เทียบกับ x และเทียบกับ y ได้ เรียกว่า**อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของ f** ซึ่งมีวิธีหาดังนี้

1) การหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x สองครั้ง

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$(f_x)_x = f_{xx}$

$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

2) การหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x ก่อนแล้วจึงเทียบกับ y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$= (f_x)_y = f_{xy}$

$= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

3) การหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y ก่อนแล้วจึงเทียบกับ x

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

4) การหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y สองครั้ง

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

หมายเหตุ อนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ หรือ f_{xy} และ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ หรือ f_{yx} เรียกว่า <u>อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองแบบผสม</u> ซึ่งอาจมีค่าเท่ากันหรือต่างกันก็ได้

Clairaut's Theorem.

ทฤษฎีบท 3.3.1 ให้ f(x, y) เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ย่อยได้ และ $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ และ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ต่างเป็นฟังก์ชันที่มีความ**ต่อเนื่อง**บนบริเวณ R แล้ว $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ทุก ๆ จุด R

โดยการหาอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องกันไปเรื่อย ๆ เราสามารถหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสามหรือสูงกว่าไปเรื่อย ๆ ได้ ตัวอย่างเช่น

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}\right)$$

อนุพันธ์ย่อยอันดับสูงกว่าอันดับหนึ่ง เราสามารถแทนด้วยสัญลักษณ์ที่รัดกุมกว่าด้วยดัชนี (Subscript) ดังนี้

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(f_x) = (f_x)_y \text{ (เขียน } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}\text{)}$$

ข้อสังเกต ในการเขียนสัญลักษณ์ “∂” เราจะหาอนุพันธ์ย่อยเรียงลำดับจากขวาไปซ้าย แต่ในสัญลักษณ์แบบดัชนีล่างเรียงจากซ้ายไปขวา ตัวอย่างเช่น

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f_{yyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, f_{xxyy} = \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}$$