4.6 อนุกรมกำลัง (Power Series)

บทนิยาม 4.6.1 อนุกรมกำลังที่มีจุดศูนย์กลางที่ c (power series centered at c) หรือ **อนุกรมกำลัง** (power series) คืออนุกรมที่อยู่ในรูป

สัมประสิทธิ์

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

จุดศูนย์กลาง

เมื่อ $c, a_0, a_1, a_2, \ldots$ เป็นค่าคงตัว และ x เป็นตัวแปร

อนุกรมกำลังที่พบบ่อยครั้งคือ กรณี $c = 0$ จะอยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

ตัวอย่าง 4.6.1 (หน้า 256) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^n$ คือ อนุกรมกำลังที่มี $c = 3$ และ $a_n = 1$ ทุก $n \geq 0$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ คือ อนุกรมกำลังที่มี $c = 0$ และ $a_n = \frac{1}{n!}$ ทุก $n \geq 0$

- เมื่อต้องการหาค่า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ ที่ $x = x_0$
- เราจะแทนค่า x_0 ในผลรวม ทำให้เกิดเป็นอนุกรมอนันต์

  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x_0 - c)^n$ ซึ่งอนุกรมนี้อาจจะลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้

  $c = 0$, $a_n = 1$

  เช่น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$

- กรณี $x = 1$ ได้อนุกรม $1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$ ซึ่งลู่ออก
- กรณี $x = -1$ ได้อนุกรม $1 - 1 + 1 + \cdots + (-1)^n + \cdots$ ซึ่งลู่ออก
- กรณี $x = \frac{1}{2}$ ได้อนุกรม $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$ ซึ่งลู่เข้าสู่ 2

วัตถุประสงค์ คือ หาจำนวนจริงที่เมื่อแทนค่าเข้าไปในอนุกรมกำลัง
แล้วได้อนุกรมลู่เข้า

4.6.1 ช่วงลู่เข้าและรัศมีการลู่เข้า

- อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 - c)^n$ มีค่า x อย่างน้อยหนึ่งค่า คือ x=c ที่แทนเข้าไป แล้วได้อนุกรมลู่เข้า
- ในการหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้อนุกรมกำลังลู่เข้า สามารถทำได้ โดยการทดสอบการลู่เข้าดังที่เคยศึกษามา

ตัวอย่าง 4.6.2 (หน้า 256) จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้อนุกรมกำลัง

จุดศูนย์กลาง = 0 →

สัมประสิทธิ์ : $\frac{1}{3^{2n}}$ →

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{2n}} \quad \text{ลู่เข้า}$$

วิธีทำ ใช้การทดสอบแบบอัตราส่วน โดยพิจารณา

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/3^{2(n+1)}}{x^n/3^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}|x|\cdot\frac{3^{2n}}{3^{2n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{9} = \frac{|x|}{9}$$

ค่าลิมิตขึ้นอยู่กับ x

โดยการทดสอบแบบอัตราส่วน ได้ว่า

$|x| < 9$ $(-9,9)$

$|x| > 9$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{2n}} \ \textbf{ลู่เข้าเมื่อ}\ \frac{|x|}{9} < 1 \quad \text{และ} \quad \textbf{ลู่ออกเมื่อ}\ \frac{|x|}{9} > 1$$

เหลือการพิจารณาอนุกรมกำลังนี้เมื่อ $\frac{|x|}{9} = 1$ ซึ่งก็คือ $x = \pm 9$

$\Downarrow$

$|x| = 9$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{3^{2n}}$$

- ถ้า $x = 9$ อนุกรมที่พิจารณาคือ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{3^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$ ซึ่งลู่ออก
- ถ้า $x = -9$ อนุกรมที่พิจารณาคือ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-9)^n}{3^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ ซึ่งลู่ออก

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 9^n}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n}}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่าอนุกรมกำลังนี้ลู่เข้าก็ต่อเมื่อ $\dfrac{|x|}{9} < 1$

ซึ่งก็คือค่าของจำนวนจริงทั้งหมดในช่วง $(-9,9)$ นั่นเอง

สังเกตว่าสามารถใช้การทดสอบโดยการถอดรากที่ n ได้เช่นกัน ในกรณีนี้ เราจะได้สิ่งที่ตรวจสอบเป็น

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{3^{2n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{3^2} = \frac{|x|}{9}$$

ซึ่งการพิจารณาการทดสอบโดยการถอดรากที่ n จะเป็นในทำนองเดียวกับการทดสอบแบบอัตราส่วน ทำให้ได้ผลสรุปเดียวกัน

ตัวอย่าง จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้อนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้า

① $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

วิธีทำ พิจารณา $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$ และ $a_{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{n+1}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1}$$

เนื่องจากสำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$

ตัวอย่าง จำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้อนุกรมนี้ลู่เข้าและทุกจำนวนจริง x

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา $a_n = n^n x^n \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^n |x|^n} = n|x|$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} n|x| < 1$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} n|x| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$ เท่านั้น จึงทำให้ได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$

เพราะฉะนั้น จำนวนจริง x ที่ทำให้อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ ลู่เข้าคือ

$x = 0$ ∎

ข้อสังเกต 4.6.1 การทดสอบแบบอัตราส่วนของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$

< 1

> 1

$= 1$

จะได้สิ่งที่พิจารณาคือ

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|x-c|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-c|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

<u>**กรณีที่ 1**</u> $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n\cancel{+1}}}{a_{n+1}}\right| = R$ โดยที่ $R \neq 0$

1.1) ถ้า $|x-c|\cdot\frac{1}{R} < 1$ **แล้ว** อนุกรมลู่เข้า

ซึ่ง $|x-c|\cdot\frac{1}{R} < 1 \Leftrightarrow |x-c| < R \Leftrightarrow x \in (c-R, c+R)$

1.2) ถ้า $|x-c|\cdot\frac{1}{R} > 1$ **แล้ว** อนุกรมลู่ออก

ซึ่ง $|x-c|\cdot\frac{1}{R} > 1 \Leftrightarrow |x-c| > R \Leftrightarrow x \notin (c-R, c+R)$

1.3) ที่ค่า $x = c-R$ และ $x = c+R$ ต้องพิจารณาเป็นกรณีเฉพาะ

<u>**กรณีที่ 2**</u> $R = 0$ แล้ว มี c เพียงตัวเดียวที่ทำให้อนุกรมลู่เข้า

<u>**กรณีที่ 3**</u> $R = \infty$ แล้ว อนุกรมลู่เข้าสำหรับทุกจำนวนจริง

ถ้าใช้การตรวจสอบโดยการถอดรากที่ n ค่า R ที่พิจารณา คือ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ และได้ข้อสรุปในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 4.6.1 อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ จะสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้หนึ่งข้อและเพียงข้อเดียวเท่านั้น

1. มีจำนวนจริง $R>0$ ที่ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ เมื่อ $|x-c|<R$ และ ลู่ออกเมื่อ $|x-c|>R$
2. อนุกรมลู่เข้า เมื่อ $x=c$ เท่านั้น
3. อนุกรมนี้ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ที่ทุก ๆ ค่าของ x

- เรียก R ในกรณีที่ 1 ว่า**รัศมีการลู่เข้า** (radius of convergence) ของอนุกรมกำลัง
- กำหนดให้ $R=0$ และ ในกรณีที่ 2
- กำหนดให้ $R=\infty$ ในกรณีที่ 3
- เรียกเซตของจำนวนจริงทั้งหมดที่ทำให้อนุกรมกำลังที่พิจารณาลู่เข้า ว่า**ช่วงการลู่เข้า** (interval of convergence)

หมายเหตุ 4.6.1 ถ้า เงื่อนไข 1. ของทฤษฎีบท 4.6.1 เป็นจริง ช่วงการลู่เข้าของอนุกรมจะเป็นแบบใดแบบหนึ่ง ดังต่อไปนี้

$(c-R,c+R)$, $(c-R,c+R]$, $[c-R,c+R)$ หรือ $[c-R,c+R]$

โดยตรวจสอบจุดปลายที่ $c-R$ และ $c+R$ เป็นกรณีเฉพาะ

ตัวอย่าง 4.6.3 (หน้า 258) จงหาช่วงการลู่เข้า และรัศมีการลู่เข้าของอนุกรม

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{2n}}$$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 4.6.2 ทราบว่า

อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{2n}}$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ x อยู่ในช่วง $(-9,9)$

ดังนั้น **ช่วงการลู่เข้า** คือ $(-9,9)$

และเนื่องจาก 0 เป็นจุด c (จุดศูนย์กลาง) ได้ว่า **รัศมีการลู่เข้า**คือ 9

ทฤษฎีบท 4.6.2 อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ โดย $a_n \neq 0, \forall n$

1. **ถ้า** $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R, (0 \le R \le \infty)$ **แล้ว** R เป็นรัศมีการลู่เข้า

2. **ถ้า** $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R, (0 \le R \le \infty)$ **แล้ว** R เป็นรัศมีการลู่เข้า

ตัวอย่าง 4.6.5 (หน้า 258) จงหาช่วงการลู่เข้าและรัศมีการลู่เข้าของ

อนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{n \cdot 4^n}$

โดย (1) วิธีทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม (2) การใช้ทฤษฎีบท 4.6.2

วิธีทำ พิจารณา $a_n = \frac{(-1)^n}{n\cdot 4^n} \Rightarrow |a_n| = \frac{1}{n\cdot 4^n}$

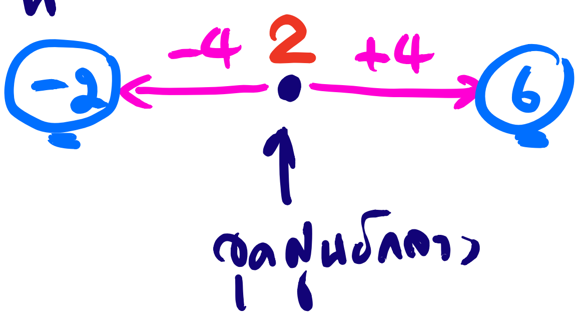
และ $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}} \Rightarrow |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)4^{n+1}}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n\cdot 4^n}\right)}{\left(\frac{1}{(n+1)4^{n+1}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 4^{n+1}}{n\cdot 4^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)}{n} = 4\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 4$$

ดังนั้น รัศมีการลู่เข้า คือ 4

และช่วงการลู่เข้า คือ $(-2, 6)$



พิจารณา $\boxed{x = -2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{n\cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-2-2)^n}{n\cdot 4^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-4)^n}{n\cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n\cancel{4^n}}{n\cdot \cancel{4^n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

ดังนั้น อนุกรมนี้ลู่ออกที่ $x=-2$

พิจารณา $\boxed{x=6}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-2)^n}{n\cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(6-2)^n}{n\cdot 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cancel{4^n}}{n\cdot\cancel{4^n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot\frac{1}{n} < +\infty$$

LAST?

X Ratio Test: $\dfrac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|} = \frac{1}{n+1}\times n = \frac{n}{n+1} \to 1 \Rightarrow ?$

ดังนั้นอนุกรมนี้ลู่เข้าที่ $x=6$

เพราะฉะนั้น ซึ่งสรุปได้ว่าช่วงการลู่เข้าคือ $(-2,6]$ ■

ตัวอย่าง 4.6.6 (หน้า 259) จงหาช่วงการลู่เข้าและรัศมีการลู่เข้าของ

อนุกรม $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x+3)^n}{n!}$$

โดย (1) วิธีทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม (2) การใช้ทฤษฎีบท 4.6.2

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.6.7 (หน้า 259) จงหาช่วงการลู่เข้าและรัศมีการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (x-5)^n$
โดย (1) วิธีทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม (2) การใช้ทฤษฎีบท 4.6.2

วิธีทำ

ข้อสอบ! 3 Parts

1. 3.1-3.6 - 30 คะแนน
2. 3.8, 3.9, 4.1 - 30 คะแนน
3. 4.2-4.6 - 30 คะแนน

90 คะแนน - 45 %