4.6 อนุกรมกำลัง (Power Series)

บทนิยาม 4.6.1 อนุกรมกำลังที่มีจุดศูนย์กลางที่ c (power series centered at c) หรือ **อนุกรมกำลัง** (power series) คืออนุกรมที่อยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

เมื่อ $c, a_0, a_1, a_2, \ldots$ เป็นค่าคงตัว และ x เป็นตัวแปร

อนุกรมกำลังที่พบบ่อยครั้งคือ กรณี $c = 0$ จะอยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

ตัวอย่าง 4.6.1 (หน้า 256)

1. $\sum_{n=0}^{\infty}(x-3)^n$ คือ อนุกรมกำลังที่มี $c = 3$ และ $a_n = 1$ ทุก $n \geq 0$
2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ คือ อนุกรมกำลังที่มี $c = 0$ และ $a_n = \frac{1}{n!}$ ทุก $n \geq 0$

- เมื่อต้องการหาค่า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ ที่ $x = x_0$
- เราจะแทนค่า x_0 ในผลรวม ทำให้เกิดเป็นอนุกรมอนันต์

  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x_0 - c)^n$ ซึ่งอนุกรมนี้อาจจะ<u>ลู่เข้า</u>หรือ<u>ลู่ออก</u>ก็ได้

  เช่น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$
- กรณี $x = 1$ ได้อนุกรม $1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$ ซึ่งลู่ออก
- กรณี $x = -1$ ได้อนุกรม $1 - 1 + 1 + \cdots + (-1)^n + \cdots$ ซึ่งลู่ออก
- กรณี $x = \frac{1}{2}$ ได้อนุกรม $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$ ซึ่งลู่เข้าสู่ 2

วัตถุประสงค์ คือ หาจำนวนจริงที่เมื่อแทนค่าเข้าไปในอนุกรมกำลัง
แล้วได้อนุกรมลู่เข้า

4.6.1 ช่วงลู่เข้าและรัศมีการลู่เข้า

- อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0 - c)^n$ มีค่า x อย่างน้อยหนึ่งค่า คือ x=c ที่แทนเข้าไป แล้วได้อนุกรมลู่เข้า
- ในการหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้อนุกรมกำลังลู่เข้า สามารถทำได้โดยการทดสอบการลู่เข้าดังที่เคยศึกษามา

ตัวอย่าง 4.6.2 (หน้า 256) จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{2n}}$ ลู่เข้า

วิธีทำ ใช้การทดสอบแบบอัตราส่วน โดยพิจารณา

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/3^{2(n+1)}}{x^n/3^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}|x|\cdot\frac{3^{2n}}{3^{2n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{9} = \frac{|x|}{9}$$

ค่าลิมิตขึ้นอยู่กับ x

โดยการทดสอบแบบอัตราส่วน ได้ว่า

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{2n}} \text{ **ลู่เข้า**เมื่อ } \frac{|x|}{9} < 1 \quad \text{และ} \quad \text{**ลู่ออก**เมื่อ } \frac{|x|}{9} > 1$$

เหลือการพิจารณาอนุกรมกำลังนี้เมื่อ $\frac{|x|}{9} = 1$ ซึ่งก็คือ $x = \pm 9$

- ถ้า $x=9$ อนุกรมที่พิจารณาคือ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{9^n}{3^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}1$ ซึ่งลู่ออก
- ถ้า $x=-9$ อนุกรมที่พิจารณาคือ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-9)^n}{3^{2n}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ ซึ่งลู่ออก

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่าอนุกรมกำลังนี้ลู่เข้าก็ต่อเมื่อ $\frac{|x|}{9}<1$

ซึ่งก็คือค่าของจำนวนจริงทั้งหมดในช่วง $(-9,9)$ นั่นเอง

สังเกตว่าสามารถใช้การทดสอบโดยการถอดรากที่ n ได้เช่นกัน ในกรณีนี้ เราจะได้สิ่งที่ตรวจสอบเป็น

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{3^{2n}}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{3^2}=\frac{|x|}{9}$$

ซึ่งการพิจารณาการทดสอบโดยการถอดรากที่ n จะเป็นในทำนองเดียวกับการทดสอบแบบอัตราส่วน ทำให้ได้ผลสรุปเดียวกัน

ข้อสังเกต 4.6.1 การทดสอบแบบอัตราส่วนของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$

จะได้สิ่งที่พิจารณาคือ

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|x-c|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-c|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

<u>กรณีที่ 1</u> $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = R$ โดยที่ $R \neq 0$

1.1) ถ้า $|x-c|\cdot\frac{1}{R} < 1$ **แล้ว** อนุกรมลู่เข้า

ซึ่ง $|x-c|\cdot\frac{1}{R} < 1 \Leftrightarrow |x-c| < R \Leftrightarrow x \in (c-R, c+R)$

1.2) ถ้า $|x-c|\cdot\frac{1}{R} > 1$ **แล้ว** อนุกรมลู่ออก

ซึ่ง $|x-c|\cdot\frac{1}{R} > 1 \Leftrightarrow |x-c| > R \Leftrightarrow x \notin (c-R, c+R)$

1.3) ที่ค่า $x = c-R$ และ $x = c+R$ ต้องพิจารณาเป็นกรณีเฉพาะ

<u>กรณีที่ 2</u> $R = 0$ แล้ว มี c เพียงตัวเดียวที่ทำให้อนุกรมลู่เข้า

<u>กรณีที่ 3</u> $R = \infty$ แล้ว อนุกรมลู่เข้าสำหรับทุกจำนวนจริง

ถ้าใช้การตรวจสอบโดยการถอดรากที่ n ค่า R ที่พิจารณา คือ

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ และได้ข้อสรุปในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎีบท 4.6.1 อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ จะสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้หนึ่งข้อและเพียงข้อเดียวเท่านั้น

1. มีจำนวนจริง $R>0$ ที่ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-c)^n$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ เมื่อ $|x-c|<R$ และ ลู่ออกเมื่อ $|x-c|>R$

2. อนุกรมลู่เข้า เมื่อ $x=c$ เท่านั้น

3. อนุกรมนี้ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ที่ทุก ๆ ค่าของ x

- เรียก R ในกรณีที่ 1 ว่า**รัศมีการลู่เข้า** (radius of convergence) ของอนุกรมกำลัง
- กำหนดให้ $R=0$ และ ในกรณีที่ 2
- กำหนดให้ $R=\infty$ ในกรณีที่ 3
- เรียกเซตของจำนวนจริงทั้งหมดที่ทำให้อนุกรมกำลังที่พิจารณาลู่เข้าว่า**ช่วงการลู่เข้า** (interval of convergence)

หมายเหตุ 4.6.1 ถ้า เงื่อนไข 1. ของทฤษฎีบท 4.6.1 เป็นจริง ช่วงการลู่เข้าของอนุกรมจะเป็นแบบใดแบบหนึ่ง ดังต่อไปนี้

$(c-R,c+R)$, $(c-R,c+R]$, $[c-R,c+R)$ หรือ $[c-R,c+R]$

โดยตรวจสอบจุดปลายที่ $c-R$ และ $c+R$ เป็นกรณีเฉพาะ

ตัวอย่าง 4.6.3 (หน้า 258) จงหาช่วงการลู่เข้า และรัศมีการลู่เข้าของอนุกรม

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{2n}}$$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 4.6.2 ทราบว่า

อนุกรม $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{2n}}$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ x อยู่ในช่วง $(-9,9)$

ดังนั้น **ช่วงการลู่เข้า** คือ $(-9,9)$

และเนื่องจาก 0 เป็นจุด c (จุดศูนย์กลาง) ได้ว่า **รัศมีการลู่เข้า**คือ 9

ทฤษฎีบท 4.6.2 อนุกรมกำลัง $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ โดย $a_n \neq 0, \forall n$

1. **ถ้า** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R, (0 \le R \le \infty)$ **แล้ว** R เป็นรัศมีการลู่เข้า

2. **ถ้า** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R, (0 \le R \le \infty)$ **แล้ว** R เป็นรัศมีการลู่เข้า

ตัวอย่าง 4.6.5 (หน้า 258) จงหาช่วงการลู่เข้าและรัศมีการลู่เข้าของ

อนุกรม $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{n\cdot 4^n}$$

โดย (1) วิธีทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม (2) การใช้ทฤษฎีบท 4.6.2

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.6.6 (หน้า 259) จงหาช่วงการลู่เข้าและรัศมีการลู่เข้าของ

อนุกรม $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x+3)^n}{n!}$$

โดย (1) วิธีทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม (2) การใช้ทฤษฎีบท 4.6.2

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.6.7 (หน้า 259) จงหาช่วงการลู่เข้าและรัศมีการลู่เข้าของ

อนุกรม $$\sum_{n=0}^{\infty} n^n (x-5)^n$$

โดย (1) วิธีทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม (2) การใช้ทฤษฎีบท 4.6.2

วิธีทำ