บทที่ 4 ลำดับและอนุกรม

(Sequences and Series)

4.1 ลำดับอนันต์

$\Longrightarrow$ ลำดับลู่เข้า, ลำดับลู่ออก, ลำดับทางเดียว, ลำดับมีขอบเขต

4.2 อนุกรมอนันต์

$\Longrightarrow$ อนุกรมลู่เข้า-ลู่ออก, การทดสอบการลู่ออก, อนุกรมเรขาคณิต

4.3 การทดสอบการลู่เข้า-ลู่ออกของอนุกรม

4.3.1 การทดสอบแบบปริพันธ์

4.3.2 การทดสอบแบบเปรียบเทียบและเปรียบเทียบลิมิต

4.3.3 การทดสอบแบบอัตราส่วน

4.3.4 การทดสอบแบบถอดรากที่ n

4.4 อนุกรมสลับ

4.6 อนุกรมกำลัง $\Longrightarrow$ หารัศมีการลู่เข้า

~~4.7 อนุพันธ์และปริพันธ์ของอนุกรมกำลัง~~

4.8 อนุกรมเทย์เลอร์ $\Longrightarrow$ เป็นตัวแทนของฟังก์ชัน

4.1 ลำดับอนันต์

บทนิยาม 4.1.1 ให้ $A \neq \varnothing$ เราจะเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็น**ลำดับอนันต์** (Infinite series) **ในเซต A** หรือ เรียกสั้น ๆ ว่า **ลำดับ** ก็ต่อเมื่อ

$f : \mathbb{Z}^{+} \longrightarrow A$ โดยที่ $n \longmapsto f(n)$

$f(n)$	$\Rightarrow$	“**พจน์ที่** n ของลำดับ f ”
ถ้า $f(n) \in \mathbb{R}$	$\Rightarrow$	f เป็น**ลำดับของจำนวนจริง**
ถ้า $f(n) \in \mathbb{C}$	$\Rightarrow$	f เป็น**ลำดับของจำนวนเชิงซ้อน**

ให้ f เป็นลำดับของจำนวนจริง เราเขียน f เป็นเซตของคู่อันดับดังนี้

$$f = \{(n, f(n)) : n = 1,\ 2,\ 3, \ldots\}$$

และเขียนแทนลำดับ f ในรูป

$$f(n) \quad f = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\} = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

เช่น $\{2^n\} = 2^1, 2^2, 2^3, \ldots = 2, 4, 8, \ldots$

ลำดับ

(a_n) $\quad \{1\}_{n\geq 1}$

$\langle a_n \rangle$ $\quad = \{1, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$

$\cancel{[a]}$

$\{1\}$ ←เซต

$$\{a_n\} = \{b_n\} \iff a_i = b_i, \forall i \in \mathbb{Z}^{+}$$

โดยทั่วไปเรามักจะนิยามลำดับโดยการบอกพจน์ที่ n ของลำดับ

ตัวอย่าง 4.1.1 (หน้า 202)

1. $\{a_n\} = \left\{2 - \frac{1}{n^2}\right\} = \left\{2 - \frac{1}{1^2}, 2 - \frac{1}{2^2}, 2 - \frac{1}{3^2}, \ldots\right\}$

2. $\{a_n\} = \{(-1)^n\} = \{(-1), 1, (-1), \ldots\}$

3. $\{a_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right\} = \left\{\frac{(-1)}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{(-1)}{\sqrt{3}}, \ldots\right\}$

4. $\{a_n\} = \left\{n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\} = \left\{\sin\frac{\pi}{2}, 2\sin\pi, 3\sin\frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$

4.1.1 ลิมิตของลำดับ

บทนิยาม 4.1.2 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับและ $L \in \mathbb{R}$

เรียก L ว่า**ลิมิตของลำดับ** $\{a_n\}$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ซึ่ง

$|a_n - L| < \varepsilon$ สำหรับ $\forall n : n > N_\varepsilon$

เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, $a_n \to L$ (as $n \to +\infty$)

ถ้าไม่มี $L \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ แล้วลำดับ $\{a_n\}$ **ไม่มีลิมิต**หรือ ลิมิตของลำดับ $\{a_n\}$ **หาค่าไม่ได้**

บทนิยาม 4.1.3

- $\{a_n\}$ เป็น**ลำดับลู่เข้า** (Converge sequence)

  $\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

  และกล่าวว่า $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ค่า L

- $\{a_n\}$ เป็น**ลำดับลู่ออก** (Diverge sequence)

  $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ ไม่มีลิมิตหรือลิมิตของลำดับ $\{a_n\}$หาค่าไม่ได้

หมายเหตุ 4.1.3

- ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าบวก และเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ เมื่อ $n \to \infty$ แสดงว่า $\{a_n\}$ ไม่มีลิมิต เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าลบและลดลงไปเรื่อยๆ เมื่อ $n \to \infty$ แสดงว่า $\{a_n\}$ ไม่มีลิมิต เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

ตัวอย่าง กำหนดให้ k เป็นค่าคงตัวใด ๆ พิจารณาลำดับ $\{k\}$ เมื่อ $n \to \infty$ แล้ว $k \to k$ เขียนแทนด้วย $\boxed{\lim_{n\to\infty} k = k}$

วิธีทำ ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $N_\varepsilon = \boxed{N_\varepsilon} \in \mathbb{N}$

ดังนั้น สำหรับทุก $n > N_\varepsilon$ จะได้ว่า

$$|a_n - L| = |k-k| = 0 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} k = k$$

ตัวอย่าง พิจารณาลำดับ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ เมื่อ $n \to \infty$ แล้ว $\frac{1}{n} \to 0$ เขียนแทนด้วย

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}$$

วิธีทำ Archimedean property : สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี N_ε ที่ $0 < \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$

ให้ $\varepsilon > 0$ The Archimedean property จะได้ว่ามี N_ε ที่ทำให้ $0 < \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$

ดังนั้น สำหรับทุก $n > N_\varepsilon$ จะได้ว่า

$$n > N_\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{N_\varepsilon}$$

$$|a_n - L| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} k = k$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Jum!

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

4.1.2 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับลิมิตของลำดับ

ทฤษฎีบท 4.1.1 ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ และ $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$ **แล้ว** $L_1 = L_2$

ทฤษฎีบท 4.1.2 (หน้า 205) กำหนดให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ**ลู่เข้า**และให้ c เป็นค่าคงตัว โดยที่ $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ จะได้ว่า

1. $\lim_{n\to\infty} c = c$
2. $\lim_{n\to\infty} ca_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = cA$
3. $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = A \pm B$
4. $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = A \cdot B$
5. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{A}{B}$, เมื่อ $B \neq 0$ และ $b_n \neq 0$ <u>ทุกค่า n</u>
6. $\lim_{n\to\infty} a_n^{\,c} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^c = A^c$
7. $\lim_{n\to\infty} c^{a_n} = c^{\lim_{n\to\infty} a_n} = c^A$
8. $\lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = 1$ ถ้า $c > 0$
9. $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$ ถ้า $|c| < 1$
10. $\lim_{n\to\infty} |c|^n = \infty$ ถ้า $|c| > 1$

ตัวอย่าง จงหาลิมิตของลำดับต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n^2}$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)}{n\cdot n} = (-1)\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = (-1)(0)(0) = 0$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}-\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1-0 = 1$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5-5n}{n^7+1}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3-8n^9}{n^9+13n}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^8+n^4+1}{n^6+n^2}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\cdot 10^n-5^n+9\cdot 3^n}{7\cdot 2^n\cdot 5^n+10^n-1}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7^{n+2}-4^{n-2}}{7^{n-1}+3^n}$

วิธีทำ

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5-5n}{n^7+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^5-5n}{n^7}}{\frac{n^7+1}{n^7}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\frac{1}{n^2}}^{\,0}-\cancel{\frac{5}{n^6}}^{\,0}}{1+\cancel{\frac{1}{n^7}}^{\,0}} = \frac{0}{1} = 0$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3-8n^9}{n^9+13n} = \frac{-8}{1} = -8$$

(5) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^8+n^4+1}{n^6+n^2} = +\infty$$

(6) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 10^n - 5^n + 9\cdot 3^n}{7\cdot 2^n\cdot 5^n + 10^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\left(\frac{10}{10}\right)^n - \left(\frac{5}{10}\right)^n + 9\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^n}{7\left(\frac{10}{10}\right)^n + \left(\frac{10}{10}\right)^n - \left(\frac{1}{10}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\to 0} + 9\cdot\underbrace{\left(\frac{3}{10}\right)^n}_{\to 0}}{8 - \underbrace{\left(\frac{1}{10}\right)^n}_{\to 0}}$$

$$= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

(7) $$\lim_{n\to\infty} \frac{7^{n+2} - 4^{n-2}}{7^{n-1} + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7^2\cdot 7^n - 4^{-2}\cdot 4^n}{7^{-1}\cdot 7^n + 3^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{7^2 - 4^{-2}\underbrace{\left(\frac{4}{7}\right)^n}_{\to 0}}{7^{-1} + \underbrace{\left(\frac{3}{7}\right)^n}_{\to 0}}$$

$$= \frac{7^2}{7^{-1}} = 7^3 = 343$$

$\blacksquare$