บทที่ 4 ลำดับและอนุกรม

(Sequences and Series)

4.1 ลำดับอนันต์

$\Longrightarrow$ ลำดับลู่เข้า, ลำดับลู่ออก, ลำดับทางเดียว, ลำดับมีขอบเขต

4.2 อนุกรมอนันต์

$\Longrightarrow$ อนุกรมลู่เข้า-ลู่ออก, การทดสอบการลู่ออก, อนุกรมเรขาคณิต

4.3 การทดสอบการลู่เข้า-ลู่ออกของอนุกรม

4.3.1 การทดสอบแบบปริพันธ์

4.3.2 การทดสอบแบบเปรียบเทียบและเปรียบเทียบลิมิต

4.3.3 การทดสอบแบบอัตราส่วน

4.3.4 การทดสอบแบบถอดรากที่ n

4.4 อนุกรมสลับ

4.6 อนุกรมกำลัง $\Longrightarrow$ หารัศมีการลู่เข้า

~~4.7 อนุพันธ์และปริพันธ์ของอนุกรมกำลัง~~

4.8 อนุกรมเทย์เลอร์ $\Longrightarrow$ เป็นตัวแทนของฟังก์ชัน

4.1 ลำดับอนันต์

บทนิยาม 4.1.1 ให้ $A \neq \varnothing$ เราจะเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็น**ลำดับอนันต์** (Infinite series) **ในเซต A** หรือ เรียกสั้น ๆ ว่า **ลำดับ** ก็ต่อเมื่อ $f : \mathbb{Z}^{+} \longrightarrow A$ โดยที่ $n \longmapsto f(n)$

$f(n) \Rightarrow$ “**พจน์ที่** n ของลำดับ f”

ถ้า $f(n) \in \mathbb{R} \Rightarrow$ f เป็น**ลำดับของจำนวนจริง**

ถ้า $f(n) \in \mathbb{C} \Rightarrow$ f เป็น**ลำดับของจำนวนเชิงซ้อน**

ให้ f เป็นลำดับของจำนวนจริง เราเขียน f เป็นเซตของคู่อันดับดังนี้

$$f = \{(n, f(n)) : n = 1,\ 2,\ 3, \ldots\}$$

และเขียนแทนลำดับ f ในรูป

$$f = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\} = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

เช่น $\{2^n\} = 2^1, 2^2, 2^3, \ldots = 2, 4, 8, \ldots$

$$\{a_n\} = \{b_n\} \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \in \mathbb{Z}^{+}$$

โดยทั่วไปเรามักจะนิยามลำดับโดยการบอกพจน์ที่ n ของลำดับ

ตัวอย่าง 4.1.1 (หน้า 202)

1. $\{a_n\} = \left\{2 - \frac{1}{n^2}\right\} =$ ....

2. $\{a_n\} = \{(-1)^n\} =$ ....

3. $\{a_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right\} =$ ....

4. $\{a_n\} = \left\{n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\} =$ ....

4.1.1 ลิมิตของลำดับ

บทนิยาม 4.1.2 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับและ $L \in \mathbb{R}$

เรียก L ว่า**ลิมิตของลำดับ** $\{a_n\}$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ ซึ่ง

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ สำหรับ } \forall n : n > N$$

เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

ถ้าไม่มี $L \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ แล้วลำดับ $\{a_n\}$ **ไม่มีลิมิต**หรือลิมิตของลำดับ $\{a_n\}$ **หาค่าไม่ได้**

บทนิยาม 4.1.3

- $\{a_n\}$ เป็น**ลำดับลู่เข้า** (Converge sequence)

  $\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

  และกล่าวว่า $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ค่า L

- $\{a_n\}$ เป็น**ลำดับลู่ออก** (Diverge sequence)

  $\Leftrightarrow \{a_n\}$ ไม่มีลิมิตหรือลิมิตของลำดับ $\{a_n\}$หาค่าไม่ได้

หมายเหตุ 4.1.3

- ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าบวก และเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ เมื่อ $n \to \infty$ แสดงว่า $\{a_n\}$ ไม่มีลิมิต เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าลบและลดลงไปเรื่อยๆ เมื่อ $n \to \infty$ แสดงว่า $\{a_n\}$ ไม่มีลิมิต เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

ตัวอย่าง กำหนดให้ k เป็นค่าคงตัวใด ๆ พิจารณาลำดับ $\{k\}$ เมื่อ $n \to \infty$ แล้ว $k \to k$ เขียนแทนด้วย $\lim_{n\to\infty} k = k$

วิธีทำ

ตัวอย่าง พิจารณาลำดับ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ เมื่อ $n \to \infty$ แล้ว $\frac{1}{n} \to 0$ เขียนแทนด้วย $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

วิธีทำ

4.1.2 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับลิมิตของลำดับ

ทฤษฎีบท 4.1.1 ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ และ $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$ **แล้ว** $L_1 = L_2$

ทฤษฎีบท 4.1.2 (หน้า 205) กำหนดให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ**ลู่เข้า**และให้ c เป็นค่าคงตัว โดยที่ $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ จะได้ว่า

1. $\lim_{n\to\infty} c = c$
2. $\lim_{n\to\infty} ca_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = cA$
3. $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = A \pm B$
4. $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = A \cdot B$
5. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$, เมื่อ $B \neq 0$ และ $b_n \neq 0$ <u>ทุกค่า n</u>
6. $\lim_{n\to\infty} a_n^{\,c} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^c = A^c$
7. $\lim_{n\to\infty} c^{a_n} = c^{\lim_{n\to\infty} a_n} = c^A$
8. $\lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = 1$ ถ้า $c > 0$
9. $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$ ถ้า $|c| < 1$
10. $\lim_{n\to\infty} |c|^n = \infty$ ถ้า $|c| > 1$

ตัวอย่าง จงหาลิมิตของลำดับต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{n^2}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5-5n}{n^7+1}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-8n^9}{n^9+13n}$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^8+n^4+1}{n^6+n^2}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\cdot 10^n-5^n+9\cdot 3^n}{7\cdot 2^n\cdot 5^n+10^n-1}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7^{n+2}-4^{n-2}}{7^{n-1}+3^n}$

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 4.1.3 [ฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับลำดับ]
กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง
ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด L ซึ่งนิยามที่ทุกค่า a_n
แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) = f(L)$

ตัวอย่าง 4.1.4 (หน้า 205; ฝาก) จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} = 1$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{n-1}{n}}$

วิธีทำ

*ทฤษฎีบท 4.1.4** ถ้า $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ และ $a_n = f(n),\ n = 1,2,3,\ldots$

แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

ตัวอย่าง 4.1.7 (หน้า 206; ฝาก) จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{5n}$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\ln(n)}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{e^n}}{e^n}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\ln(n))}{\sqrt{n}}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$

วิธีทำ

***ทฤษฎีบท 4.1.5** [The Sandwich Theorem for Infinite Sequences]
ให้ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ ซึ่ง
$a_n \le b_n \le c_n$ ทุกค่า $n > N$
ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ **แล้ว** $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

ตัวอย่าง 4.1.13 (หน้า 210; ฝาก) จงหาค่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาค่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาค่า $\lim_{n \to \infty} 2^{-n}$

วิธีทำ

ทฤษฎีบท

ให้ $\{a_n\}, \{b_n\}$ เป็นลำดับซึ่ง $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ ซึ่ง $a_n \leq b_n$ ทุกค่า $n > N$

ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ **แล้ว** $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$

ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ **แล้ว** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

ตัวอย่าง จงหาค่า $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(2+\sin n)$

วิธีทำ

บทแทรก 4.1.1 (หน้า 208) ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ c เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนบวก $(c > 0)$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^c} = 0$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{c}{n}\right)^n = e^c$
5. ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

ตัวอย่าง 4.1.9 (หน้า 208; ฝาก) จงหาค่าลิมิตของลำดับ $\left\{\dfrac{2n}{5n+3}\right\}$

ตัวอย่าง 4.1.11 (หน้า 209; ฝาก) จงหาค่า $\lim\limits_{n\to\infty} \left[1+\dfrac{1}{2n}\right]^n$

ตัวอย่าง 4.1.12 (หน้า 209; ฝาก) จงหาค่า $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2n+1}\cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$

ตัวอย่าง 4.1.14 (หน้า 210) จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือไม่

1. $\left\{\dfrac{n^2+1}{3n+2}\right\}$

2. $\left\{\dfrac{1-(-1)^n}{2}\right\}$

3. $\left\{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right\}$

4. $\left\{n-\sqrt{2n+n^2}\right\}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหาค่าลิมิตของลำดับ $\left\{\left(\dfrac{3n-2}{5n+1}\right)^4\right\}$

วิธีทำ

ตัวอย่าง กำหนดให้

$$a_n = \begin{cases} \sin(n\pi), & 1 \le n \le 60 \\ \dfrac{n^3}{\sqrt{n}+5}, & n = 61 \\ n^3 + 1, & n \ge 62 \end{cases}$$

จงพิจารณาว่าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก

วิธีทำ

พิจารณาลำดับ

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

ถ้าเราเลือกพจน์จาก a_n มาเพียงบางพจน์ เช่น

$$a_4, a_9, a_{16}, a_{21}, \ldots$$

และกำหนดให้ $b_1 = a_4$, $b_2 = a_9$, $b_3 = a_{16}$, $b_4 = a_{21}, \ldots$

เราจะได้ว่า $b_1 = a_4$, $b_2 = a_9$, $b_3 = a_{16}$,

$b_4 = a_{21}, \ldots$ ก็เป็นลำดับซึ่งได้จาก $\{a_n\}$ เรียก $\{b_n\}$ ว่า**ลำดับย่อย**ของ $\{a_n\}$เขียนเป็นนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม 4.1.4 ให้ $\{a_n\}$เป็นลำดับของจำนวนจริง

สร้างลำดับ $\{n_k\}$โดยที่ $n_k \in \mathbb{N}$ และ $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$

กำหนดให้ $b_k = a_{n_k}$ จะได้ว่า $\{b_k\}$ เป็นลำดับที่ $b_k = a_{n_k}$

และเรียก $\{b_k\}$ ว่าเป็น**ลำดับย่อย** (subsequence) ของ $\{a_n\}$

ทฤษฎีบท 4.1.6 ให้ $\{a_n\}$เป็นลำดับซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ โดยที่ $L \in \mathbb{R}$

แล้ว ทุกลำดับย่อย $\{b_n\}$ ของ $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็น L ด้วย

****หมายเหตุ 4.1.3** จากทฤษฎีบท 4.1.6 เราได้ว่า

1. **ถ้า** $\{a_n\}$ มีลำดับย่อยที่ลู่ออก **แล้ว** $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก
2. **ถ้า** $\{a_n\}$ มีลำดับย่อย 2 ลำดับซึ่งมีลิมิตต่างกัน

   แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ตัวอย่าง 4.1.18 (หน้า 213;ฝาก)

จงตรวจสอบว่าลำดับ $\left\{(-1)^{n-1}\cdot\frac{n^2}{2n+1}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง จงตรวจสอบว่าลำดับ $\left\{\frac{n}{n+1}\cdot\cos(n\pi)\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

4.1.3 ลำดับทางเดียว (Monotonic Sequences)

บทนิยาม 4.1.5

- $\{a_n\}$ เป็น**ลำดับไม่ลด** (Non-decreasing Sequence) ก็ต่อเมื่อ $a_n \le a_{n+1} \ \forall n = 1,2,3,\ldots$
- $\{a_n\}$ ว่าเป็น**ลำดับไม่เพิ่ม** (Non-increasing Sequence) ก็ต่อเมื่อ $a_n \ge a_{n+1} \ \forall n = 1,2,3,\ldots$
- $\{a_n\}$ เป็น**ลำดับทางเดียว** (Monotonic Sequence) ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่ลดหรือลำดับไม่เพิ่ม

ตัวอย่าง จงตรวจสอบว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับทางเดียวหรือไม่

1. $\{3n\}$

2. $\left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$

3. $\left\{ \dfrac{(-1)^n}{n} \right\}$

4. ลำดับ $\{c\}$, เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

การตรวจสอบว่าลำดับเป็นลำดับไม่ลดหรือลำดับไม่เพิ่ม

ทำได้ดังนี้

(1.) พิจารณา $a_{n+1} - a_n$

1.1) **ถ้า** $a_{n+1} - a_n \geq 0$ **แล้ว**แสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับ**<u>ไม่ลด</u>**

1.2) **ถ้า** $a_{n+1} - a_n \leq 0$ **แล้ว**แสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับ**<u>ไม่เพิ่ม</u>**

(2.) **ถ้า** $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่ $a_n > 0$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

แล้ว พิจารณาอัตราส่วน $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

2.1) **ถ้า** $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับ**<u>ไม่ลด</u>**

2.2) **ถ้า** $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$

แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับ**<u>ไม่เพิ่ม</u>**

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับไม่ลดหรือลำดับไม่เพิ่ม

1. $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$

2. $\left\{2-\dfrac{1}{n^2}\right\}$

3. $\left\{\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right\}$

วิธีทำ

การตรวจสอบว่าลำดับเป็นลำดับไม่ลดหรือลำดับไม่เพิ่ม (ต่อ)
(3) สำหรับลำดับ $\{a_n\}$ซึ่ง $a_n > 0$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$
ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ทุกค่า $x \geq 1$
และ $f(n) = a_n$ ทุกค่า $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$
3.1) ถ้า $f'(x) \leq 0$ ทุกค่า $x \geq 1$ แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับ**ไม่เพิ่ม**
3.2) ถ้า $f'(x) \geq 0$ ทุกค่า $x \geq 1$ แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับ**ไม่ลด**

ตัวอย่าง พิจารณาลำดับ $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n}{2n-1}\right\}$

ให้ $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$ ซึ่ง $f(n) = a_n$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

และ $f'(x) = \dfrac{(2x-1)(1)-(x)(2)}{(2x-1)^2} = \dfrac{-1}{(2x-1)^2} \leq 0$ ทุก $x \geq 1$

ดังนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าลำดับ $\{\ln(n+1)\}$ เป็นลำดับไม่ลดหรือลำดับไม่เพิ่ม
วิธีทำ

4.1.4 ลำดับที่มีขอบเขต (Bounded Sequence)

บทนิยาม 4.1.6 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง

และ $A, A^*, B, B^* \in \mathbb{R}$

- A เป็น**ขอบเขตบน** (Upper Bound) ของ $\{a_n\}$
  $\Leftrightarrow a_n \le A \ , \forall n \in \mathbb{N}$
- A^* เป็น**ขอบเขตบนที่มีค่าน้อยที่สุด** (Least Upper Bound)
  ของ $\{a_n\}$ $\Leftrightarrow A^*$ เป็นขอบเขตบนของ$\{a_n\}$
  และ A^* มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับขอบเขตบนทุกตัวของ $\{a_n\}$
- B เป็น**ขอบเขตล่าง** (*Lower Bound*) ของ $\{a_n\}$
  $\Leftrightarrow a_n \ge B \ , \forall n \in \mathbb{N}$
- B^* เป็น**ขอบเขตล่างที่มีค่ามากที่สุด** (Greatest Lower Bound)
  ของ $\{a_n\}$ $\Leftrightarrow B^*$ เป็นขอบเขตล่างของ$\{a_n\}$
  และ B^* มีค่ามาก กว่าหรือเท่ากับขอบเขตล่างทุกตัวของ $\{a_n\}$
- $\{a_n\}$ เป็น **ลำดับที่มีขอบเขต** (Bounded)
  $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

ตัวอย่าง 4.1.21 (หน้า 215)

1. $\{(-1)^n\} = -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots$

2. $\{2n\} = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots$

3. $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\} = -1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{-1}{5},\ \dfrac{1}{6},\ \ldots$

สมบัติ 4.1.1 [สมบัติของความบริบูรณ์]
ให้ S เป็นเซตย่อยของเซตของจำนวนจริงซึ่งไม่เป็นเซตว่าง

1. ถ้า S มีขอบเขตบน แล้ว S จะมีขอบเขตบนที่มีค่าน้อยที่สุด

2. ถ้า S มีขอบเขตล่าง แล้ว S มีขอบเขตล่างที่มีค่ามากที่สุด

ทฤษฎีบท 4.1.7 **ถ้า** $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้า
แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

ข้อสังเกต 4.1.1

1. จากทฤษฎีบท 4.1.7 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่ลู่ออก

2. บทกลับของทฤษฎีบท 4.1.13 ไม่เป็นจริง
นั่นคือ **ลำดับที่มีขอบเขตไม่จำเป็นต้องเป็นลำดับลู่เข้าเสมอไป**
เช่น $\{(-1)^n\}$ มีขอบเขตแต่เป็นลำดับลู่ออก

ทฤษฎีบท 4.1.8 ถ้า $\{a_n\}$ จะเป็นลำดับทางเดียวที่มีขอบเขต
แล้ว $\{a_n\}$ จะเป็นลำดับที่ลู่เข้า

หมายเหตุ 4.1.16 ผลจากทฤษฎีบท 4.1.8 ได้ว่า
ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่ลด (หรือลำดับไม่เพิ่ม) และ มีขอบเขตบน
แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ จะเท่ากับค่าขอบเขตบนที่มีค่าน้อยที่สุด (หรือขอบเขตล่างที่มีค่ามากที่สุด) ของ $\{a_n\}$

ตัวอย่าง 4.1.23 (หน้า 217) จงพิสูจน์ว่าลำดับ $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ มีลิมิต

วิธีทำ ให้ $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

พิจารณา $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{2}{n+1} > 0$ ทุก $n = 1,2,3,\ldots$

นั่นคือ $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม ดังนั้น $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ เป็นลำดับทางเดียว

และ $0 \le a_n \le a_1 = 2$ ทุก $n = 1,2,3,\ldots$

นั่นคือ $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

โดยทฤษฎีบท 4.1.8 ได้ว่า $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

4.2 อนุกรมอนันต์ (Infinite Series)

บทนิยาม 4.2.1 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับแล้วจะเรียกผลบวกในรูป

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

ว่า**อนุกรมอนันต์** (Infinite Series) หรือ **อนุกรม** เขียนแทนด้วย

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{หรือ} \quad \sum a_n$$

และเรียก a_n แต่ละจำนวนว่า **พจน์ที่ n** ของอนุกรม

เนื่องจากมีเพียงผลบวกของพจน์เป็นจำนวนจำกัดเท่านั้นที่สามารถหาได้โดยการบวกแบบพีชคณิตธรรมดา เราจึงจำเป็นจะต้องให้นิยามของผลบวกของอนุกรม

ผลบวกย่อยที่ n (n^{th} partial sum) **ของอนุกรม** เขียนแทนด้วย S_n

หมายถึง $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

ดังนั้น
$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ เราจะเรียกลำดับ

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

ว่า**ลำดับของผลบวกย่อย** (sequence of partial sum) ซึ่งจะมีความสัมพันธ์กับอนุกรม ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 4.2.2 สำหรับอนุกรม

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

มีลำดับของผลบวกย่อย $\{S_n\}$

- **ถ้า** มีจำนวนจริง S ซึ่ง $\lim_{n \to \infty} S_n = S$

  แล้ว อนุกรม $\sum a_n$ **ลู่เข้า** (converge)

  และเรียก $\sum a_n$ ว่า**อนุกรมลู่เข้า** (convergent series)

- **ถ้า** ไม่มีจำนวนจริง S ซึ่ง $\lim_{n \to \infty} S_n = S$

  แล้ว อนุกรม $\sum a_n$ **ลู่ออก** (diverge)

  และ เรียก $\sum a_n$ ว่า**อนุกรมลู่ออก** (divergent series)

- **ถ้า** $\sum a_n$ ลู่เข้าและ $\lim_{n \to \infty} S_n = S$

  แล้ว เรียก S ว่า**ผลบวกของอนุกรม**

  และเขียนแทนด้วย $\sum a_n = S$

- สำหรับอนุกรมลู่ออกเราจะกล่าวว่า**อนุกรมไม่มีผลบวก**

หมายเหตุ สัญลักษณ์ของอนุกรมอนันต์อาจเป็นแบบอื่น

นอกเหนือจาก $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เช่น $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ หรือ $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.2.1 (หน้า 220) จงกระจายอนุกรมต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=$

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{2}}=$

ตัวอย่าง 4.2.2 (หน้า 220;ฝาก) จงแสดงว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า พร้อมทั้งหาผลบวกของอนุกรม
ตัวอย่าง 4.2.3 (หน้า 220;ฝาก) จงพิสูจน์ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi)$ ลู่ออก
ตัวอย่าง 4.2.4 (หน้า 221;ฝาก) จงพิจารณาอนุกรมต่อไปนี้ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่ ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้าให้หาผลบวก 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}n$

ตัวอย่าง จงตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 4.2.1 ถ้า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

***ข้อสังเกต 4.2.1** บทกลับของทฤษฎีบท 4.2.1 ไม่จริง
นั่นคือ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้ว $\sum a_n$ อาจจะเป็นอนุกรมลู่เข้า
หรือลู่ออกก็ได้

เช่น $\sum \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\sum \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก
ทั้งที่อนุกรมทั้งสองมี $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

บทแทรก 4.2.1 [การทดสอบการลู่ออกของอนุกรม
(Test for divergence)]
ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ **แล้ว** $\sum a_n$ **เป็นอนุกรมลู่ออก**

ตัวอย่าง 4.2.5 (หน้า 222) จงทดสอบการลู่เข้า-ลู่ออกของอนุกรมต่อไปนี้

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot 3$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 4.2.2 ให้ $\{S_n\}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของ $\sum a_n$ ซึ่งเป็นอนุกรมลู่เข้า
จะได้ว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดให้ จะมีจำนวนจริงบวก N
ซึ่งทำให้ $\left|S_R - S_T\right| < \varepsilon$ เมื่อ $R > N$ และ $T > N$

ตัวอย่าง 4.2.6 (หน้า 223)

อนุกรมฮาร์มอนิก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

บทนิยาม 4.2.3 อนุกรมเรขาคณิต (Geometric Series)
คือ อนุกรมที่เขียนได้ในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

เมื่อ $a \neq 0$ เป็นตัวคงตัว และ r เป็นอัตราส่วนร่วม

วิธีหาผลบวกย่อยที่ n ของอนุกรมเรขาคณิตทำได้ดังต่อไปนี้

จาก $S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$

และ $rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n$

ดังนั้น $S_n - rS_n = a - ar^n$

สำหรับ $r \neq 1$ จะได้ $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

ทฤษฎีบท 4.2.3 อนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$

1. อนุกรมลู่เข้าเมื่อ $|r| < 1$ และมีผลบวกเป็น $\dfrac{a}{1-r}$
2. อนุกรมลู่ออกเมื่อ $|r| \geq 1$

ตัวอย่าง จงแสดงว่าอนุกรม

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots$$

ลู่เข้าและหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ

ตัวอย่าง กำหนดอนุกรม

$$4+\frac{4}{9}+\frac{4}{9^2}+\frac{4}{9^3}+\cdots+\frac{4}{9^{n-1}}+\cdots$$

จงเขียน S_n ให้อยู่ในพจน์ของ n **และ** ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n} \cdot 5^{1-n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ตัวอย่าง 4.2.10 (หน้า 226;ฝาก) จงแสดงว่าสามารถเขียนทศนิยมไม่รู้จบ $0.535353...$ เป็นจำนวนตรรกยะ (rational number) ได้

ตัวอย่าง จงแสดงว่าสามารถเขียนทศนิยมไม่รู้จบ $4.921921921...$ เป็นจำนวนตรรกยะ (rational number) ได้

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 4.2.8 ถ้า $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมซึ่งมีความแตกต่างกัน **เฉพาะ m พจน์แรก** (นั่นคือ $a_k = b_k$ ถ้า $k > m$)
แล้ว $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าทั้งคู่ หรือ ลู่ออกทั้งคู่

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+100}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 4.2.5 ถ้า $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าที่มีผลบวกเท่ากับ A และ B ตามลำดับแล้ว

1. $\sum (a_n + b_n)$ ลู่เข้าและมีผลบวกเท่ากับ $A + B$
2. ถ้า c เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริง แล้ว $\sum ca_n$ ลู่เข้าและมีผลบวกเท่ากับ cA
3. $\sum (a_n - b_n)$ ลู่เข้าและมีผลบวกเท่ากับ $A - B$

ทฤษฎีบท 4.2.6

ถ้า $\sum a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก **แล้ว** $\sum \left(a_n + b_n\right)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ข้อสังเกต 4.2.2 $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออกทั้งคู่แล้ว $\sum (a_n + b_n)$ อาจจะเป็นอนุกรมลู่เข้า หรือเป็นอนุกรมลู่ออกก็ได้

- ถ้า $a_n = \frac{1}{n}$ และ $b_n = \frac{1}{n}$ จะได้ $a_n + b_n = \frac{2}{n}$ ทุกค่า $n = 1,2,3,\ldots$ ซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก
- **แต่** ถ้า $a_n = \frac{1}{n}$ และ $b_n = -\frac{1}{n}$ จะได้ $a_n + b_n = 0$ ทุกค่า $n = 1,2,3,\ldots$ ซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง จงพิจารณาการลู่เข้า-ลู่ออกของอนุกรม ถ้าอนุกรมลู่เข้า จงหาผลบวก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{7}{n(n+1)}+\frac{2}{3^{n-1}}\right]$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2^{n+1}-5^{n}}{3^{n+2}}\right]$

วิธีทำ

4.3 การทดสอบการลู่เข้าและการลู่ออกของอนุกรม

เราจะศึกษา 4 วิธี คือ

1. การทดสอบแบบปริพันธ์
2. การทดสอบแบบเปรียบเทียบ และ
   การทดสอบแบบเปรียบเทียบลิมิต
3. การทดสอบแบบอัตราส่วน
4. การทดสอบโดยการถอดรากที่ n

บทนิยาม 4.3.1 อนุกรมบวก (positive series) หมายถึง อนุกรม $\sum a_n$ ซึ่ง $a_n > 0$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

4..3.1 การทดสอบแบบปริพันธ์ (The integral test)

ทฤษฎีบท 4.3.1 [การทดสอบแบบปริพันธ์ (The integral test)] ให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรมบวก และให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน**<u>ค่าบวก</u>**

ที่**<u>ต่อเนื่อง</u>**และ**<u>มีค่าไม่เพิ่มขึ้น</u>**สำหรับ $x \geq 1$

โดยที่ $f(n) = a_n$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$

แล้ว อนุกรม $\sum a_n$ และ ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_{x=1}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{x=1}^{t} f(x)dx$$

มีผลการลู่เข้า - ลู่ออก เหมือนกัน

หมายเหตุ ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ไม่ได้เริ่มต้นที่ $n=1$ การทดสอบแบบปริพันธ์ยังคงใช้ได้ (เริ่มต้นที่จำนวนเต็มบวก N ใด ๆ ก็ได้)

นั่นคืออนุกรม $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ และปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\int_{x=N}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{x=N}^{t} f(x)dx$$

มีผลการลู่เข้า - ลู่ออกเหมือนกัน โดยข้อกำหนดในทฤษฎีบท 4.3.1 ต้องเป็นจริงเสมอสำหรับ $n \geq N$

ตัวอย่าง 4.3.1 (หน้า 232;ฝาก) จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

ตัวอย่าง จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))}$

วิธีทำ

บทนิยาม 4.3.2 อนุกรม p (p-series) คือ อนุกรมที่อยู่ในรูป $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เมื่อ p เป็นค่าคงตัวใด ๆ

$$p = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{เรียก } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ ว่า}\textbf{อนุกรมฮาร์โมนิค}$$

ทฤษฎีบท 4.3.2 อนุกรม p เป็นอนุกรม**ลู่เข้า**เมื่อ $p > 1$ และเป็นอนุกรม**ลู่ออก**เมื่อ $p \leq 1$

ตัวอย่าง 4.3.4 (หน้า 234)

1) อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$

2) อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \cdots$

ตัวอย่าง จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2020n^{-1.0123}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n\sqrt[4]{n}}$

วิธีทำ

หมายเหตุ จากการทดสอบแบบปริพันธ์ เรา<u>**ไม่**</u>สามารถสรุปว่า "ผลบวกของอนุกรมเท่ากับค่าปริพันธ์"

<u>นั่นคือ</u> โดยทั่วไปแล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \int_{1}^{\infty} f(x)dx$

เช่น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$ แต่ $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$

4.3.2 การทดสอบแบบเปรียบเทียบและการทดสอบแบบเปรียบเทียบลิมิต (Comparison Test and Limit Comparison Test)

ทฤษฎีบท 4.3.3 กำหนดให้ $\sum a_n$ อนุกรมบวก และ S_n เป็นผลบวกย่อยที่ n ของ $\sum a_n$

1. **ถ้า**มีจำนวนจริง M ที่ $S_n < M$ ทุกค่า n **แล้ว** $\sum a_n$ จะลู่เข้าและมีผลบวกน้อยกว่าหรือเท่ากับ M
2. **ถ้า**ไม่มีค่า M ที่ $S_n < M$ ทุกค่า n **แล้ว** $\sum a_n$ ลู่ออก

ทฤษฎีบท 4.3.4 การทดสอบแบบเปรียบเทียบ

(The comparison test)

กำหนดให้ $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมบวก

1. **ถ้า** $\sum b_n$ ลู่เข้าและ $a_n \le b_n, \forall n \ge k$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}^+$ **แล้ว** $\sum a_n$ ลู่เข้า
2. **ถ้า** $\sum b_n$ ลู่ออก และ $a_n \ge b_n, \forall n \ge k$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}^+$ **แล้ว** $\sum a_n$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 4.3.5 (หน้า 236;ฝาก) จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}+2}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก
ตัวอย่าง 4.3.6 (หน้า 236;ฝาก) จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ ลู่ออก

ตัวอย่าง จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2+n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{2n-5}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+\sqrt[3]{n}}$

วิธีทำ

ข้อสังเกต ในการทดสอบแบบเปรียบเทียบพจน์ของอนุกรมที่เราต้องการทดสอบจะต้องเล็กกว่าพจน์ของอนุกรมที่ลู่เข้า หรือใหญ่กว่าพจน์ของอนุกรมที่ลู่ออก **แต่** ถ้าพจน์ของอนุกรมที่เราต้องการทดสอบใหญ่กว่าอนุกรมที่ลู่เข้าหรือเล็กกว่าอนุกรมที่ลู่ออก แล้วเรา<u>ไม่สามารถสรุปผล</u>จากการทดสอบแบบเปรียบเทียบได้

ตัวอย่างเช่น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$

- เรา<u>ไม่</u>สามารถใช้อสมการ $\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$ ในการทดสอบแบบเปรียบเทียบได้ เนื่องจาก $\sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตซึ่งลู่เข้า <u>แต่</u> $a_n > b_n$
- **แต่** เรารู้สึกว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ น่าจะลู่เข้า เพราะมีลักษณะคล้ายอนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ซึ่งลู่เข้า

- สำหรับกรณีเช่นนี้ เราจะใช้การทดสอบอีกรูปแบบหนึ่ง คือ **การทดสอบแบบเปรียบเทียบลิมิต**

ทฤษฎีบท 4.3.5 การทดสอบแบบเปรียบเทียบลิมิต

(The limit comparison test)

กำหนด $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมบวกและ $c \in \mathbb{R}$

1. **ถ้า** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$

   แล้ว อนุกรมทั้งสองมีผลการลู่เข้า - ลู่ออกเหมือนกัน

2. **ถ้า** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ และ $\sum b_n$ ลู่เข้า

   แล้ว $\sum a_n$ ลู่เข้า

3. **ถ้า** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ และ $\sum b_n$ เป็นลู่ออก

   แล้ว $\sum a_n$ ลู่ออก

ตัวอย่าง 4.3.9 (หน้า 237;ฝาก)

1. จงทดสอบการลู่เข้า-ลู่ออกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$

2. จงทดสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

3. จงทดสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{(n+1)^2}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 5^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 - 2n^2 + 4}{n^8 - n^5 + 1}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n\ln n}{n^2 + 5}$

วิธีทำ

4.3.3 การทดสอบแบบอัตราส่วน (The ratio test)

ทฤษฎีบท 4.3.6 [การทดสอบแบบอัตราส่วน (The ratio test)]

กำหนดให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรมบวก และ $L \in \mathbb{R}$

1. **ถ้า** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$ **แล้ว** $\sum a_n$ ลู่เข้า

2. **ถ้า** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} L > 1 \\ \infty \end{cases}$ **แล้ว** $\sum a_n$ ลู่ออก

3. **ถ้า** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ **แล้ว** **<u>สรุปไม่ได้</u>**เกี่ยวกับ $\sum a_n$

ตัวอย่าง 4.3.13 (หน้า 240;ฝาก)

จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 4.3.15 (หน้า 240;ฝาก)

จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{5^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

วิธีทำ

4.3.4 การทดสอบโดยการถอดรากที่ n

ทฤษฎีบท 4.3.7 [การทดสอบโดยการถอดรากที่ n

(The n^{th} Root Test)]

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมซึ่ง $a_n \geq 0$ ทุก $n = 1,2,3,\ldots$

พิจารณา $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$ เมื่อ R เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. **ถ้า** $R < 1$ **แล้ว** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. **ถ้า** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} R > 1 \\ +\infty \end{cases}$ **แล้ว** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
3. **ถ้า** $R = 1$ **แล้ว<u>ไม่สามารถสรุปผล</u>**เกี่ยวกับ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ได้

หมายเหตุ ทฤษฎีบท 4.3.7 ยังคงเป็นจริงเมื่อแทนเงื่อนไข $a_n \geq 0$ ทุก $n = 1,2,3,\ldots$ ด้วย $a_n \geq 0$ ทุก $n \geq N$ เมื่อ N เป็นจำนวนเต็มบวกคงตัว

ตัวอย่าง 4.3.16 (หน้า 242;ฝาก) จงพิจารณาการลู่เข้า-ลู่ออกของ

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$

ตัวอย่าง จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+5}{2n+3}\right)^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^n}$

วิธีทำ

4.4 อนุกรมสลับ (Alternating Series)

บทนิยาม 4.4.1 อนุกรมสลับ (alternating series) หมายถึง อนุกรมที่มีพจน์เป็นบวกและลบสลับกัน ได้แก่ อนุกรม

$$\sum(-1)^{n}a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots$$

หรือ $\sum(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$

เมื่อ $a_n > 0$ ทุกค่า $n = 1,2,3,\ldots$

ทฤษฎีบท 4.4.1

[การทดสอบอนุกรมสลับ (Leibniz's alternating series test)]

ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่ $a_k \geq a_{k+1} > 0, \forall k \in \mathbb{N}$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

แล้ว $\sum(-1)^{n-1}a_n$ ลู่เข้า

ข้อสังเกต 4.4.1

1. สำหรับอนุกรมสลับในรูป $\sum(-1)^{n}a_n$ เราสามารถพิสูจน์ได้เช่นกันว่า

ถ้า $a_k \geq a_{k+1} > 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

แล้ว $\sum(-1)^{n}a_n$ ลู่เข้า เพราะ $\sum(-1)^{n}a_n = -\sum(-1)^{n-1}a_n$

2. สำหรับอนุกรมสลับ $\sum(-1)^{n-1}a_n$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $a_k \geq a_{k+1} > 0,\ \forall k \geq m\ (m \in \mathbb{N})$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ จะได้ว่า $\sum(-1)^{n-1}a_n$ ลู่เข้า

เพราะ $$\sum(-1)^{n-1}a_n = \sum_{n=1}^{m-1}(-1)^{n-1}a_n + \sum_{n=m}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$$

ซึ่งจะเห็นว่า $\sum\limits_{n=1}^{m-1}(-1)^{n-1}a_n$ เป็นอนุกรมจำกัดจะต้องลู่เข้า

และ $\sum\limits_{n=m}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 4.4.1

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.2.5 ข้อ 1. ได้ว่า $\sum(-1)^{n-1}a_n$ ลู่เข้าด้วย

3. สำหรับการทดสอบว่าอนุกรมสลับลู่ออกนั้น เราจะใช้ทฤษฎีบท 4.4.1 ไม่ได้ต้องกลับไปใช้**บทแทรก 4.2.1**

ตัวอย่าง 4.4.1 (หน้า 246;ฝาก) จงทดสอบว่าอนุกรมสลับ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 4.4.2 (หน้า 247;ฝาก) จงทดสอบว่าอนุกรมสลับ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n}{n^2}$$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 4.4.3 (หน้า 247;ฝาก) จงทดสอบว่าอนุกรมสลับ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 4.4.4 (หน้า 247;ฝาก) จงทดสอบว่าอนุกรมสลับ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{3n}{2n+1}$$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง จงทดสอบว่าอนุกรมสลับต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(1-n)}{n(n+1)}$

วิธีทำ

4.5 การลู่เข้าสัมบูรณ์และการลู่เข้ามีเงื่อนไข

(Absolute and Conditional Convergence)

บทนิยาม 4.5.1 อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรม**ลู่เข้าสัมบูรณ์** (Absolute convergence) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ข้อสังเกต ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมบวก จะได้ว่า $|a_n| = a_n$
ดังนั้นการลู่เข้าสัมบูรณ์ก็คือการลู่เข้าธรรมดา

ทฤษฎีบท 4.5.1 **ถ้า** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์
แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะเป็นอนุกรมลู่เข้า

บทนิยาม 4.5.2 อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรม**ลู่เข้ามีเงื่อนไข**

(Conditional convergence)

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า **แต่** $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง จงตรวจสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าสัมบูรณ์/ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{2^n}$

การทดสอบการลู่เข้าสัมบูรณ์

ทฤษฎีบท 4.5.2 [การทดสอบแบบอัตราส่วน (The ratio test)]

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมซึ่ง $a_n \neq 0$

พิจารณา $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ เมื่อ L เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. **ถ้า** $L < 1$ **แล้ว** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์
2. **ถ้า** $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} L > 1 \\ +\infty \end{cases}$ **แล้ว** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
3. **ถ้า** $L = 1$ **แล้ว** **<u>ไม่สามารถสรุปผล</u>**ได้

ตัวอย่าง 4.5.2 (หน้า 250;ฝาก) จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ หรือ ลู่ออก

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ **2)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{2^n}$ **3)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{3^{n-1}}{n^2+1}$

ตัวอย่าง จงทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n!}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-100)^n\cdot n^n}{n!}$

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 4.5.3 [การทดสอบโดยการถอดรากที่ n

(The n^{th} Root Test)]

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมซึ่ง $a_n \neq 0$

พิจารณา $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = R$ เมื่อ R เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. **ถ้า** $R < 1$ **แล้ว** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์
2. **ถ้า** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} R > 1 \\ +\infty \end{cases}$ **แล้ว** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
3. **ถ้า** $R = 1$ **แล้ว** **<u>ไม่สามารถสรุปผล</u>**ได้

ตัวอย่าง 4.5.3 (หน้า 250) จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ หรือ ลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{2^n}$

ตัวอย่าง จงทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n^{\frac{n}{2}}}\right)^{\frac{1}{n}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-e^{-n})^{n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^{n}}{n^{n+1}}$

วิธีทำ