<u>ขั้นที่ 4</u> หาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

แทนค่าจุดทั้งสองใน f(x, y, z) ได้ว่า

จุด $\left(\dfrac{6}{\sqrt{11}}, \dfrac{2}{\sqrt{11}}, -\dfrac{2}{\sqrt{11}}\right)$ อยู่**ใกล้**จุด (3, 1, -1) ที่สุด

และ จุด $\left(-\dfrac{6}{\sqrt{11}}, -\dfrac{2}{\sqrt{11}}, \dfrac{2}{\sqrt{11}}\right)$ อยู่**ไกล**จุด (3, 1, -1) ที่สุด

ฝาก!

<u>ตัวอย่าง:</u> บริษัทแห่งหนึ่งต้องการผลิตกล่องฝาเปิด ที่มีปริมาตร 4 ลบ.ม. จงหามิติของกล่องนี้ที่ทำให้ใช้วัสดุน้อยที่สุด

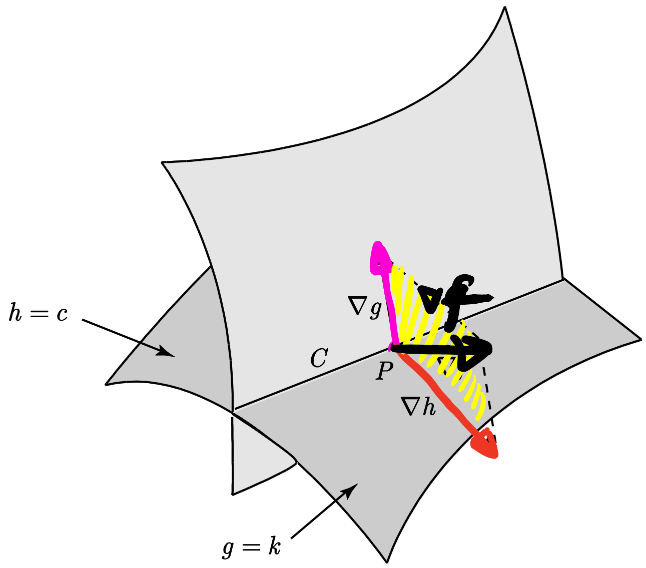
minimize/maximize $f(x,y,z)$ ← objective function

subject to $g(x,y,z)=k$ ← constrained functions

$h(x,y,z)=c$

ถ้าต้องการ**หาค่าต่ำสุดและค่าสูงสุด**ของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ โดยมี**เงื่อนไข** $g(x,y,z)=k$ **และ** $h(x,y,z)=c$

ซึ่งหมายความว่าค่าสุดขีดของ f เมื่อ (x, y, z) เป็นจุดบนเส้นโค้ง C ที่เกิดจากการตัดกันของพื้นผิว $g(x,y,z)=k$ และพื้นผิว $h(x,y,z)=c$



- สมมติ f มีค่าสุดขีดที่จุด $P(x_0, y_0, z_0)$
- เนื่องจาก ∇f จะตั้งฉากกับเส้นโค้ง C ที่จุด P
- **แต่** ∇g จะตั้งฉากกับพื้นผิว $g(x,y,z)=k$
  และ ∇h จะตั้งฉากกับพื้นผิว $h(x,y,z)=c$
- ดังนั้น ∇g และ ∇h จะต้องฉากกับเส้นโค้ง C
- นั่นคือ $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ จะอยู่ในระนาบที่กำหนดโดย $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$ และ $\nabla h(x_0,y_0,z_0)$

- ดังนั้นจะมีจำนวนจริง λ และ μ (เรียกว่า**ตัวคูณลากรานจ์**) โดยที่
  $\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\lambda \nabla g(x_0,y_0,z_0)+\mu \nabla h(x_0,y_0,z_0)$ (*)

Lagrange Multipliers

ตัวอย่าง: จงหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $xy + yz$ บนเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันของ $x^2 + y^2 = 1$ และ $yz = 1$

objective f.

constrained functions

วิธีทำ **ขั้นที่ 1:** เขียนปัญหา

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & xy + yz & \leftarrow f(x,y,z) \\
\text{subject to} & x^2 + y^2 = 1 & \leftarrow g(x,y,z) = k \\
 & yz = 1 & \leftarrow h(x,y,z) = c
\end{array}
$$

ขั้นที่ 2: สร้างระบบสมการ

$$
\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h
$$
$$
x^2 + y^2 = 1
$$
$$
yz = 1
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\nabla f &= y\,i + (x+z)\,j + y\,k \\
\nabla g &= 2x\,i + 2y\,j + 0\,k \\
\nabla h &= 0\,i + z\,j + y\,k
\end{aligned}
\right.
$$

จะได้ระบบสมการคือ

$$
\left.
\begin{aligned}
y &= \lambda 2x + \mu 0 \\
x + z &= \lambda 2y + \mu z \\
y &= \lambda 0 + \mu y \\
x^2 + y^2 &= 1 \\
yz &= 1
\end{aligned}
\right\} \Longrightarrow \cdots \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)
$$

minimum value $= -\frac{3}{2}$

- หาค่าสุดขีดโดยแก้ระบบสมการ 5 สมการ 5 ตัวไม่ทราบค่า x, y, z, λ และ μ โดยระบบสมการได้มาจาก (*) คือ

$$f_x = \lambda g_x + \mu h_x$$
$$f_y = \lambda g_y + \mu h_y$$
$$f_z = \lambda g_z + \mu h_z$$
$$g(x,y,z) = k$$
$$h(x,y,z) = c$$

ตัวอย่าง 3.9.4 (หน้า 197) จงหาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $f(x,y,z)=x+2y+3z$ บนเส้นโค้ง C ที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $x-y+z=1$ และทรงกระบอก $x^2+y^2=1$

วิธีทำ แก้ระบบสมการหาค่า x,y,z,λ และ μ จากระบบสมการ

$$\nabla f=\lambda\nabla g+\mu\nabla h$$

$$g(x,y,z)=1$$

$$h(x,y,z)=1$$

และเขียนระบบสมการใหม่ ได้เป็น

$$f_x=\lambda g_x+\mu h_x \quad\Rightarrow\quad 1=\lambda+2\mu x \qquad (1)$$

$$f_y=\lambda g_y+\mu h_y \quad\Rightarrow\quad 2=-\lambda+2\mu y \qquad (2)$$

$$f_z=\lambda g_z+\mu h_z \quad\Rightarrow\quad 3=\lambda \qquad (3)$$

$$g(x,y,z)=1 \quad\Rightarrow\quad x-y+z=1 \qquad (4)$$

$$h(x,y,z)=1 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2=1 \qquad (5)$$

แทนค่า $\lambda=3$ ใน (1) ได้ $2\mu x=-2\Rightarrow x=-\dfrac{1}{\mu}$

แทนค่า $\lambda=3$ ใน (2) ได้ $2\mu y=5 \Rightarrow y=\dfrac{5}{2\mu}$

แทนค่า x และ y ใน (5) ได้

$$\frac{1}{\mu^2}+\frac{25}{4\mu^2}=1\Rightarrow\mu^2=\frac{29}{4}\Rightarrow\mu=\pm\frac{\sqrt{29}}{2}$$

ทำให้ได้ $x=\mp\dfrac{2}{\sqrt{29}}$ และ $y=\pm\dfrac{5}{\sqrt{29}}$

แทนค่า x และ y ใน (4) ได้ $z = 1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}$

ดังนั้น ค่าของ f คือ

$$f\left(\mp\frac{2}{\sqrt{29}}, \pm\frac{5}{\sqrt{29}}, 1\pm\frac{7}{\sqrt{29}}\right)$$

$$= \mp\frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm\frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1\pm\frac{7}{\sqrt{29}}\right)$$

$$= 3 \pm \sqrt{29}$$

ค่ามากที่สุดของ f บนเส้นโค้งที่กำหนด คือ $3+\sqrt{29}$