

Lecture 4-5

Double Integrals over Rectangular Regions

Chapter 2 Multiple Integrals

¹ พิจารณาการหาปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

เกิดขึ้นจากการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งสำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ต่อเนื่องและไม่เป็นลบบนช่วง $[a, b]$ ในทำนองเดียวกันนี้ ปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชันสองตัวแปรเกิดขึ้นจากความต้องการหาปริมาตรภายใต้พื้นผิว มีรายละเอียดดังนี้

กำหนดให้ $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีความต่อเนื่องและไม่เป็นลบบนบริเวณ R ในระนาบ xy ในหัวข้อนี้ เราจะให้ความสนใจปัญหาการหาปริมาตร (volumn) ของทรงตันที่ถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = f(x, y)$ และบริเวณ R ดัง Figure 1

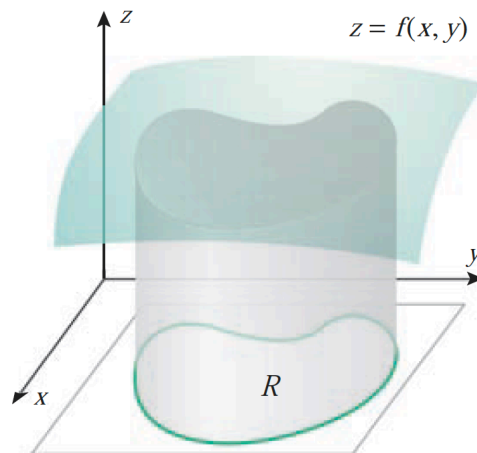


Figure 1: ปริมาตรของทรงตัน. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1001)

¹ABD12 : Section 14.1 : 1-12, 13-16, 17-22, 23-26, 27-28, 29-32, 33-34, 35-40
TWH14 : Section 15.1 : 1-14, 15-22, 23-34

ในการหาปริมาตร V ของทรงตันนี้เป็นไปในทำนองเดียวกันกับการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งมีรายละเอียดดังนี้

- สร้างเส้นตรงขนานกับแกนพิกัด จากนั้นแบ่งพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ล้อมบริเวณ R ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อย ๆ ในที่นี้จะไม่สนใจรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยที่ไม่บรรจุจุดของบริเวณ R ซึ่งจะได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่เป็นเซตย่อยของ R ดัง Figure 2 สมมติว่ามีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่เป็นเซตย่อยของ R จำนวน n รูป และกำหนดให้พื้นที่รูปที่ k ใด ๆ เป็น ΔA_k

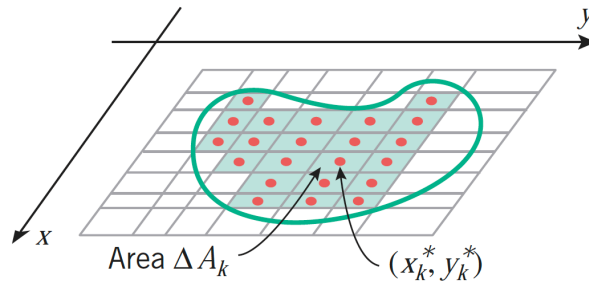


Figure 2: รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่เป็นเซตย่อยของ R . ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1001)

- เลือกจุด (x_k^*, y_k^*) จุดใดจุดหนึ่งในแต่ละรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก k จะได้ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ k มีฐานเป็นพื้นที่ ΔA_k และสูง $f(x_k^*, y_k^*)$ คือ $f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$ ดัง Figure 3 นั่นคือ ผลรวมของปริมาตรทั้ง n แห่ง คือ $\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$ ซึ่งจะสามารถใช้เป็นค่าประมาณของปริมาตร V ของทรงตันได้
- สังเกตว่า ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่สร้างขึ้นนี้จะมีพื้นผิวด้านบนเป็นพื้นผิวราบเรียบ ในขณะที่พื้นผิวของฟังก์ชัน $z = f(x, y)$ อาจเป็นผิวโค้งได้ นอกจากนี้ ฐานของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากรวมกันอาจไม่ปกคลุมบริเวณ R ทั้งหมด ดังนั้น ถ้าเราดำเนินการตามข้างต้นโดยการแบ่งพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยให้เล็กลงเรื่อย ๆ จนความกว้างและความยาวมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ จะได้ว่า ความคลาดเคลื่อนเหล่านี้จะมีค่าลดลงเข้าใกล้ศูนย์ด้วย นั่นคือ ปริมาตรของทรงตัน คือ

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$$

บทนิยาม 1. กำหนดให้ $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีความต่อเนื่องและไม่เป็นลบบนบริเวณ R ในระนาบ xy ปริมาตรของทรงตันที่ถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = f(x, y)$ และ

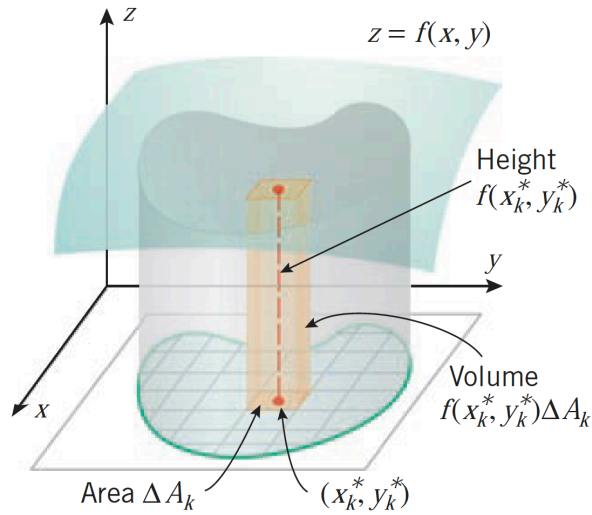


Figure 3: ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากแท่งที่ k . ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1001)

บริเวณ R คือ

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k \quad (1)$$

เราเรียกผลรวมใน (1) ว่า ผลบวกรีมันน์ (Riemann sum) และถ้าลิมิตของผลบวกรีมันน์ใน (1) หาค่าได้ เราเขียนแทนด้วย

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta A_k$$

และเรียกว่า ปริพันธ์สองชั้น (double integral) ของฟังก์ชัน $f(x, y)$ บน R นั่นคือ

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

พิจารณาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปร $f(x, y)$ เทียบตัวแปร x สามารถทำได้ โดยให้ตัวแปร y เป็นค่าคงตัว และทำการหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร x ในทำนองเดียวกันนี้ เราสามารถพิจารณาการหาปริพันธ์จำกัดเขตย่อย (partial definite integral) ได้ดังนี้

- ปริพันธ์จำกัดเขตย่อยเทียบ x คือ การหาปริพันธ์ $\int_a^b f(x, y) dx$ โดยให้ตัวแปร y เป็นค่าคงตัว ซึ่งจะได้ฟังก์ชันของตัวแปร y ออกมา
- ปริพันธ์จำกัดเขตย่อยเทียบ y คือ การหาปริพันธ์ $\int_c^y f(x, y) dy$ โดยให้ตัวแปร x เป็นค่าคงตัว ซึ่งจะได้ฟังก์ชันของตัวแปร x ออกมา

ตัวอย่าง 1. จงหาปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int_0^1 x^2 y dx$

2. $\int_0^1 x^2 y dy$

จาก (1) ในตัวอย่างข้างต้นจะพบว่าผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y ซึ่งเราอาจสามารถหาปริพันธ์เทียบกับ y ได้ เราเรียกการดำเนินการเช่นนี้ว่า การหาปริพันธ์ซ้อน (iterated integral) กล่าวคือ

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy$$

และ

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx$$

ตัวอย่าง 2. จงหาค่าของปริพันธ์ซ้อนต่อไปนี้

1. $\int_0^1 \int_1^3 xy^2 dx dy$
2. $\int_1^3 \int_0^1 xy^2 dx dy$

จากตัวอย่างข้างต้น พบว่าเราสามารถเปลี่ยนอันดับการหาปริพันธ์จำกัดย่อบนบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ ซึ่งเป็นตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 (ทฤษฎีบทของฟูบีนี (รูปแบบที่ 1)). กำหนดให้ R เป็นบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

$$[a, b] \times [c, d]$$

และ $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีความต่อเนื่องบน R จะได้ว่า

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

ตัวอย่าง 3. กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x, y) = xe^{xy}$ และบริเวณ $R = [0, 1] \times [0, 1]$ จงหาค่าของ

$$\iint_R f(x, y) dA$$

ต่อไปนี้เป็นสมบัติปริพันธ์สองชั้นซึ่งเป็นจริงแม้ว่า R ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากด้วย

ทฤษฎีบท 2. กำหนดให้ $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีความต่อเนื่องบน R จะได้ว่า สำหรับทุกค่าคงตัว c

$$\iint_R cf(x,y)dA = c \iint_R f(x,y)dA$$

และ

$$\iint_R (f(x,y) + g(x,y))dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$$

นอกจากนี้ ถ้า R สามารถแบ่งออกเป็นบริเวณ R_1 และ R_2 แล้ว

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$$

ตัวอย่าง 4. กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x,y) = 2e^{2x} + e^{-2y}$ และบริเวณ $R = [0, 1] \times [0, 1]$ จงหาค่าของ

$$\iint_R f(x,y)dA$$

ตัวอย่าง 5. กำหนดให้ $f(x,y) = xy^2$ จงหาค่าของ

$$\iint_R f(x,y) dA$$

โดยที่ $R = \{(x,y) : -3 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ และจงอภิปรายผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ

ตัวอย่าง 6. กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x,y) = \sin(xy)$ และบริเวณ $R = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1\}$ จงหาค่าของ

$$\iint_R f(x,y) dA$$

ตัวอย่าง 7. จงหาปริมาตรของทรงตันที่มีขอบเขตด้านบนเป็นพื้นผิว $z = 40 - 2xy$ และมีขอบเขตด้านล่างอยู่บนระนาบ xy ที่ปิดล้อมด้วยระนาบ $x = 1, x = 3, y = 2, y = 4$

ตัวอย่าง 8. จงหาปริมาตรของทรงตันที่มีขอบเขตด้านบนเป็นระนาบ $z = 4 - x - y$ และมีขอบเขตด้านล่างเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $R = [0, 1] \times [0, 2]$