

## Lecture 6-7

### Double Integrals over Nonrectangular Regions

Chapter 2 Multiple Integrals

<sup>1</sup> ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการหาปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณปิดที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ในลำดับแรกนี้ เราจะพิจารณาปริพันธ์ซ้อนที่ดังนี้ กำหนดให้  $g_1(x), g_2(x)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $g_1(x) \leq g_2(x)$  สำหรับทุก  $x \in [a, b]$  และ  $h_1(y), h_2(y)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $h_1(y) \leq h_2(y)$  สำหรับทุก  $y \in [c, d]$  ปริพันธ์ซ้อนกำหนดโดย

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

และ

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

**ตัวอย่าง 1.** จงหาปริพันธ์ซ้อนต่อไปนี้

1.  $\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} xy^2 dy dx$

2.  $\int_0^{\pi/3} \int_0^{\cos y} x \sin y dx dy$

---

<sup>1</sup>ABD12 : Section 14.2: 1-8, 9-12, 13-14, 15-18, 19-24, 25, 26, 29-32, 33-36, 37-38, 39-44, 47-52, 53-56, 61-62

TWH14 : Section 15.2 : 1-8, 9-18, 19-24, 25-28, 29-32, 33-46, 47-54, 55, 56, 57-66  
Section 15.3 : 1-12, 13-18, 23, 24

ในการศึกษาเรื่องปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากนี้ เราจำเป็นต้องรู้จักลักษณะของบริเวณในการหาปริพันธ์ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

**บทนิยาม 1.** เราจะกล่าวว่าบริเวณ  $R$  เป็น

1. บริเวณแบบที่ 1 (Type I region) ถ้า  $R$  ถูกปิดล้อมด้านซ้ายและขวาด้วยเส้นตรง  $x = a$  และ  $x = b$  และถูกปิดล้อมด้านล่างและด้านบนด้วยกราฟของฟังก์ชันต่อเนื่อง  $y = g_1(x)$  และ  $y = g_2(x)$  ที่  $g_1(x) \leq g_2(x)$  สำหรับทุก  $x \in [a, b]$
2. บริเวณแบบที่ 2 (Type II region) ถ้า  $R$  ถูกปิดล้อมด้านล่างและบนด้วยเส้นตรง  $y = c$  และ  $y = d$  และถูกปิดล้อมด้านซ้ายและด้านขวาด้วยกราฟของฟังก์ชันต่อเนื่อง  $x = h_1(y)$  และ  $x = h_2(y)$  ที่  $h_1(y) \leq h_2(y)$  สำหรับทุก  $y \in [c, d]$

**ทฤษฎีบท 1.** 1. ถ้า  $f(x, y)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณแบบที่ 1

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

แล้ว

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

2. ถ้า  $f(x, y)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณแบบที่ 2

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

แล้ว

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

- ตัวอย่าง 2. 1. จงหา  $\iint_R xy^2 dA$  โดยที่  $R$  เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง  $x=0, x=1$  และเส้นโค้ง  $y=x^2, x+y=0$
2. จงหา  $\iint_R x \sin y dA$  โดยที่  $R$  เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง  $y=0, y=\pi/3$  และเส้นโค้ง  $x=0, x=\cos y$

ตัวอย่าง 3. จงหาค่าของ  $\iint_R (x+2y)dA$  โดยที่  $R$  เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง  $y = 2x^2$   
และ  $y = x^2 + 1$

ตัวอย่าง 4. จงหาค่าของ  $\iint_R xy dA$  โดยที่  $R$  เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง  $y = x - 1$   
และ  $y^2 = 2x + 6$

ตัวอย่าง 5. จงหาค่าของ  $\iint_R xy dA$  โดยที่  $R$  เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง  $|x| + |y| = 1$

ตัวอย่าง 6. จงใช้ปริพันธ์สองชั้นในการหาปริมาตรของทรงสี่หน้าที่ปิดล้อมด้วยระนาบ  $4x + 2y + z = 4, x = 0, y = 0$  และ  $z = 0$

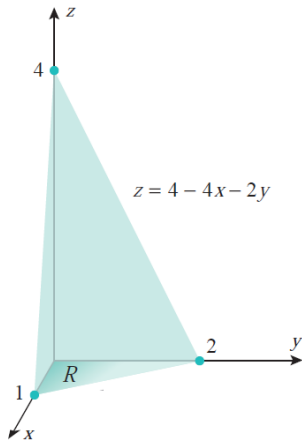


Figure 1: ทรงสี่หน้า. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1013)

ตัวอย่าง 7. จงหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดล้อมด้วยทรงกระบอก  $x^2 + y^2 = 4$ , ระนาบ  $y + z = 4$  และ  $z = 0$

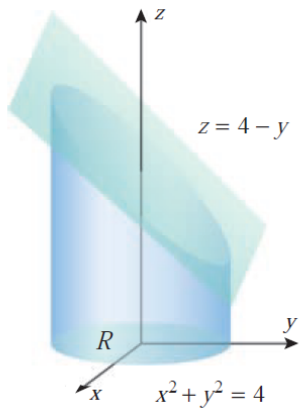


Figure 2: ทรงตัน. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1013)



ในบางครั้งการสลับอันดับการหาปริพันธ์อาจทำให้การหาค่าของปริพันธ์สองชั้นง่ายขึ้น  
ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 8. จงหาค่าปริพันธ์ซ้อน  $\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx dy$

ตัวอย่าง 9. จงหาค่าปริพันธ์ซ้อน  $\int_0^2 \int_{y/2}^1 \cos(x^2) dx dy$