Calculus for Engineering III SC402202

Lecture 11,12 Jacobians and Changes of Variables in Multiple Integrals

Chapter 2 Multiple Integrals

[1] ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการหาปริพันธ์สองชั้นและปริพันธ์สามชั้นโดยการแทนค่าตัวแปร ซึ่งมีประโยชน์อย่างมากในการหาปริพันธ์ในกรณีที่บริเวณ R หรือทรงตันจำกัด G มีความซับซ้อน

บทนิยาม 1. พิจารณาสมการอิงตัวแปรเสริมในรูป

$$x = x(u,v) \qquad \text{และ} \qquad y = y(u,v)$$

- เราจะเรียก $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ว่า การแปลง (transform) จากระนาบ uv ไปยังระนาบ xy ถ้า T ส่งจุด (u,v) ไปเป็นจุด (x,y) เพียงตัวเดียวเท่านั้น นั่นคือ

$$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

- เราจะเรียกจุด (x,y) ว่า ภาพ (image) ของ (u,v) ภายใต้การแปลง T
- เซต R ว่า ภาพของ S ภายใต้ T (image of S under T) ถ้า R เป็นเซตของภาพในระนาบ xy ของเซต S ในระนาบ uv
- เราจะเรียกการแปลง T ว่า หนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one) ถ้า สำหรับแต่ละจุด (u,v) ที่แตกต่างกันในระนาบ uv จะต้องได้ว่า ภาพของแต่ละจุด (u,v) บนระนาบ xy นั้นแตกต่างกันด้วย
- ถ้า T เป็นการแปลง 1-1 เราสามารถนิยาม $u = u(x,y)$ และ $v = v(x,y)$ และจะเรียกการแปลงจากระนาบ xy ไปยังระนาบ uv ที่ซึ่งส่งภาพของ (u,v) ไปยัง (u,v) ว่า การแปลงผกผันของ T (inverse of T) และเขียนแทนด้วย T^{-1} ดัง Figure 1

[1] **ABD12** : Section 14.7: 1-4, 5-8, 9-12, 13-16, 17-20, 21-24, 25-27, 28, 29-30, 31-34, 35-38, 39-46
TWH14 : Section 15.8 : 1-4, 5-10, 13-16, 17-20, 21-22

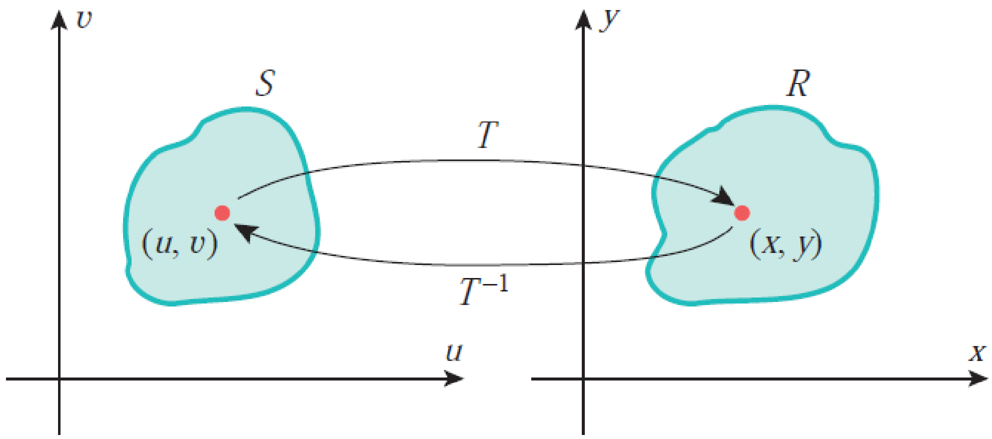

Figure 1: การแปลงผกผัน. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1060)

ตัวอย่างของการแปลง $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ที่ส่งเส้นตรงตามแนวตั้งและเส้นตรงตามแนวนอนในระนาบ uv ได้เป็นภาพในระนาบ xy เป็นดัง figure 2 ในที่นี้ เราจะเรียก เซตของจุดในระนาบ xy ที่เป็นภาพของเส้นตรงตามแนวนอนว่า (v เป็นค่าคงตัว) ว่า เส้นโค้ง v คงตัว (constant v-curves) และเรียกเซตของจุดในระนาบ xy ที่เป็นภาพของเส้นตรงตามแนวตั้งว่า (u เป็นค่าคงตัว) ว่า เส้นโค้ง u คงตัว (constant u-curves)

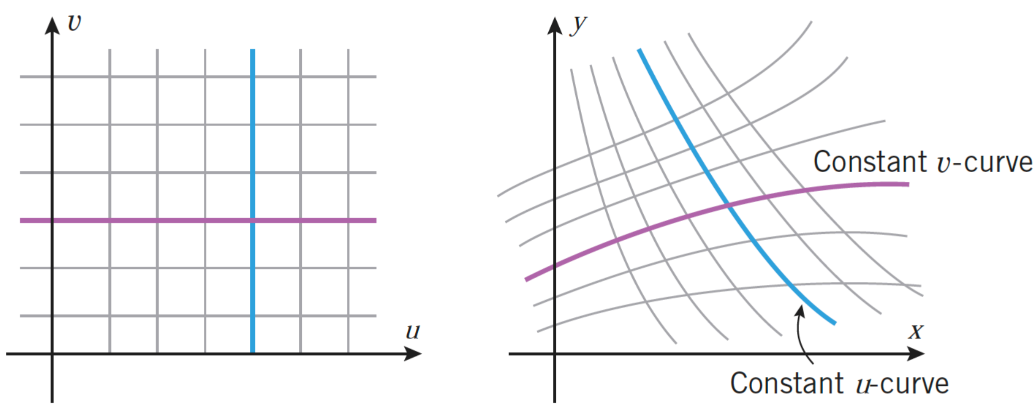

Figure 2: ตัวอย่างการแปลง. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1060)

ตัวอย่าง 1. ให้ $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงจากระนาบ uv ไปยังระนาบ xy นิยามโดย

$$x = \frac{u+v}{4} \qquad \text{และ} \qquad y = \frac{u-v}{4}$$

1. จงหา $T(1,3)$ และ $T(3,1)$
2. จงวาดเส้นโค้ง v คงตัว ที่ $v = -2, 2$
3. จงวาดเส้นโค้ง u คงตัว ที่ $u = -2, 2$
4. จงหาภาพภายใต้การแปลง T ของบริเวณรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในระนาบ uv ที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นตรง $u = -2, u = 2, v = -2$ และ $v = 2$

ในการคำนวณปริพันธ์สองชั้นโดยการแทนค่านั้น เราจำเป็นต้องทำความเข้าใจเกี่ยวกับบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาดเล็กในระนาบ uv และบริเวณที่เป็นภาพในระนาบ xy ภายใต้การแปลง T ของบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาดเล็กในระนาบ uv ดังนี้

พิจารณาสมการอิงตัวแปรเสริมในรูป

$$x = x(u,v) \qquad \text{และ} \qquad y = y(u,v)$$

สมมติให้ Δu และ Δv เป็นจำนวนจริงบวก พิจารณารูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก S ในระนาบ uv ที่

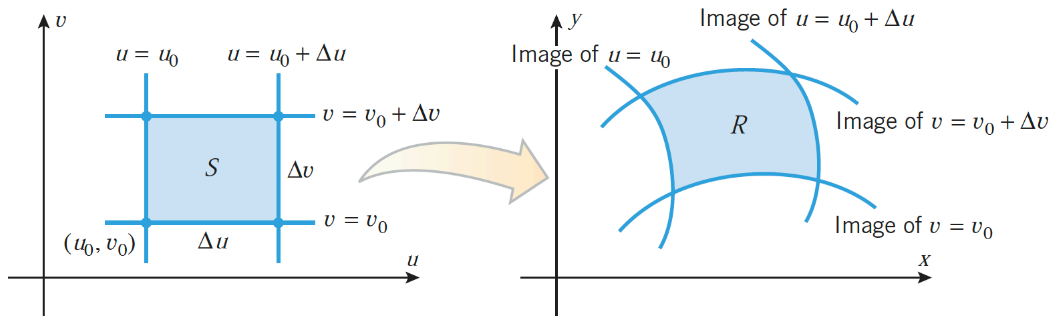

Figure 3: รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากในระนาบ uv และระนาบ xy. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1061)

ถูกปิดล้อมด้วยเส้นตรง $u = u_0, u = u_0 + \Delta u, v = v_0$ และ $v = v_0 + \Delta v$ ดังฝั่งซ้ายของ Figure 3

ถ้า $x(u,v)$ และ $y(u,v)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ Δu และ Δv มีค่าน้อยมาก ๆ จะได้ภาพของ R ในระนาบ xy เป็นดังฝั่งขวาของ Figure 3 นั่นคือ ด้านของ R เป็นเส้นโค้ง u คงตัวและเส้นโค้ง v คงตัว และโดยการคำนวณโดยใช้ความรู้เรื่องเวกเตอร์ [ศึกษาเพิ่มเติมจาก Anton et al., น. 1061 - 1062] จะได้ว่า พื้นที่ของบริเวณ R ซึ่งเขียนแทนด้วย ΔA สามารถประมาณค่าได้โดย

$$\Delta A \approx \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \right| \Delta u \Delta v$$

และเราเรียก ดีเทอร์มิแนนท์ข้างต้นว่า จาโคเบียนของ T ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2. ให้ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงจากระนาบ uv ไปยังระนาบ xy ที่นิยามโดย

$$x = x(u,v) \qquad \text{และ} \qquad y = y(u,v)$$

จาโคเบียน (Jacobian) ของ T นิยามโดย

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

จากการพิจารณาข้างต้น จะพบว่า เราสามารถประมาณค่าพื้นที่บริเวณ R ได้ด้วยผลคูณของค่าสัมบูรณ์ของจาโคเบียนกับพื้นที่ของบริเวณ S ซึ่งทำให้ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1. *ให้ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงจากระนาบ uv ไปยังระนาบ xy ที่มีความต่อเนื่อง หนึ่งต่อหนึ่ง และทั่วถึงจากบริเวณ S ในระนาบ uv ไปยังบริเวณ R ในระนาบ xy*

ถ้าจาโคเบียน $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน S และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน R และ S แล้ว

$$\iint\limits_R f(x,y)dA_{xy} = \iint\limits_S f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dA_{uv}$$

ตัวอย่าง 2. จงหาค่าของ

$$\iint\limits_R \frac{x-y}{x+y} dA$$

โดยที่ R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $x-y=0, x-y=1, x+y=1$ และ $x+y=3$

ตัวอย่าง 3. จงหาค่าของ

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 dydx$$

ตัวอย่าง 4. จากการแปลงระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดเชิงขั้วมีความสัมพันธ์

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

จงหาจาโคเบียนของการแปลง $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|$

ตัวอย่าง 5. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยวงกลมสองวงที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และมีรัศมี 1 และ 2 หน่วย ในจตุภาคที่ 1 และ 2

ในทำนองเดียวกันกับข้างต้น เราสามารถพิจารณาการแปลงในสามมิติเพื่อหาปริพันธ์ได้เช่นกัน

พิจารณาสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = x(u,v,w), \qquad y = y(u,v,w) \qquad \text{และ} \qquad z = z(u,v,w)$$

เราสามารถนิยามการแปลง $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ จากปริภูมิ uvw ไปยังปริภูมิ xyz โดยที่

$$T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$$

ได้เช่นกัน

นอกจากนี้ เรายังสามารถพิจารณาจาโคเบียนของการแปลงในสามมิติได้ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3. ให้ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงจากปริภูมิ uvw ไปยังปริภูมิ xyz ที่นิยามโดย

$$x = x(u,v,w), \qquad y = y(u,v,w) \qquad \text{และ} \qquad z = z(u,v,w)$$

จาโคเบียน (Jacobian) ของ T นิยามโดย

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} := \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

ในทำนองเดียวกันกับการพิจารณาพื้นที่ของบริเวณข้างต้น จะพบว่า ถ้า $\Delta u, \Delta v$ และ Δw มีขนาดเล็กมาก ๆ เราสามารถประมาณค่าปริมาตร ΔV ของทรงตันจำกัด ได้จาก

$$\Delta V \approx \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \right| \Delta u \Delta v \Delta w$$

ซึ่งทำให้ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2. *ให้ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ เป็นการแปลงจากปริภูมิ uvw ไปยังปริภูมิ xyz ที่มีความต่อเนื่อง หนึ่งต่อหนึ่ง และทั่วถึงจากทรงตัน S ในปริภูมิ uvw ไปยังทรงตัน R ในระนาบ xyz*

ถ้าจาโคเบียน $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0$ และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน S และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน R และ S แล้ว

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dA_{xyz} = \iint_S f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dA_{uvw}$$

ตัวอย่าง 6. จงใช้การแปลงระบบพิกัดหาปริมาตรของทรงรี

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ตัวอย่าง 7. จากการแปลงระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดเชิงทรงกลมที่มีความสัมพันธ์

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta,\ y = \rho \sin\phi \sin\theta, z = \rho \cos\phi$$

จงหาจาโคเบียนของการแปลง $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}\right|$

การแปลงระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดเชิงทรงกลมที่มีความสัมพันธ์

$$x=\rho\sin\phi\cos\theta,\ \ y=\rho\sin\phi\sin\theta, z=\rho\cos\phi$$

จะได้ว่า

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}\right| = \rho^2\sin\phi$$

ดังนั้น

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{\text{appropiate limits}} f(\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

ซึ่งตัวอย่างของการพิจารณาขอบเขตการหาปริพันธ์ซ้อนเป็นดังนี้

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\rho_0} \underline{\qquad\qquad} \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

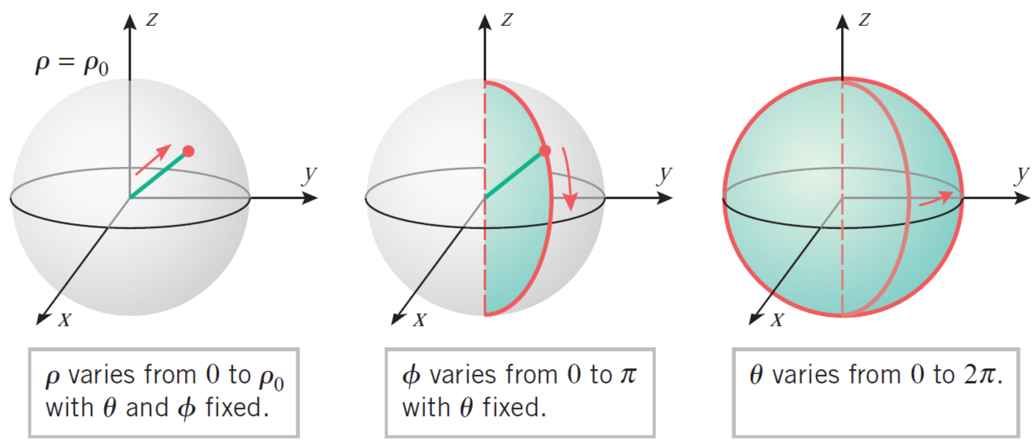

Figure 4: ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1052)

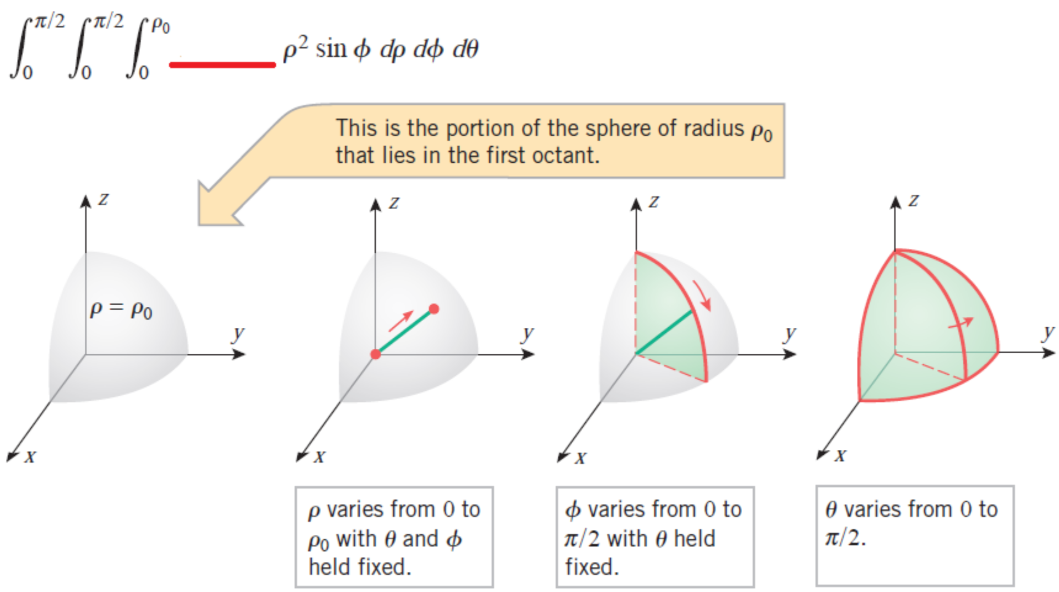

Figure 5: ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1053)

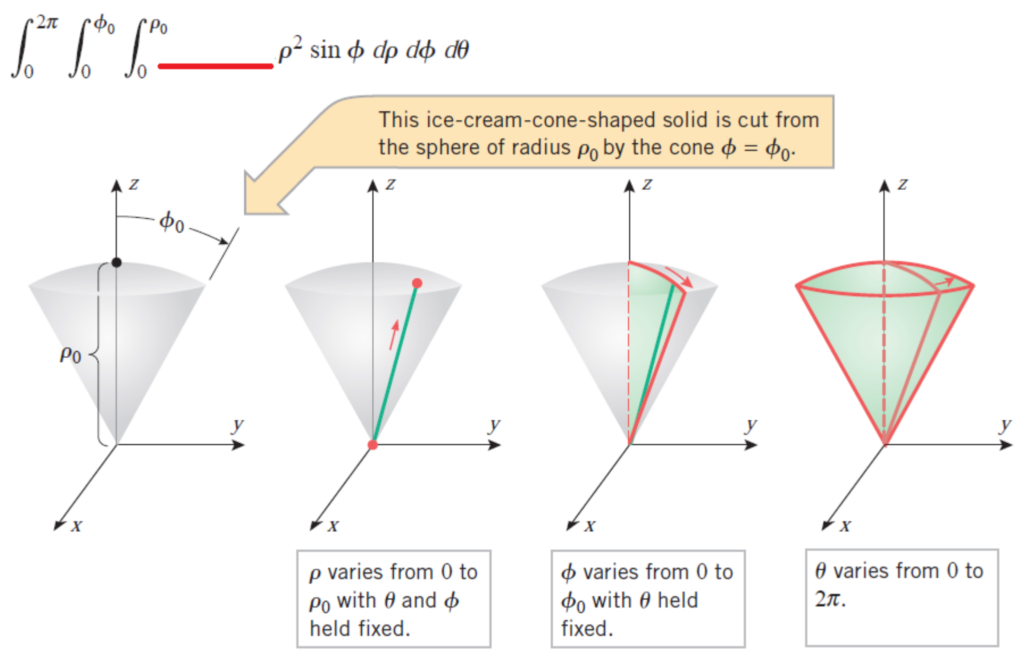

Figure 6: ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1053)

$$\int_0^{2\pi}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_0^{\rho_0} \underline{\qquad\qquad} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

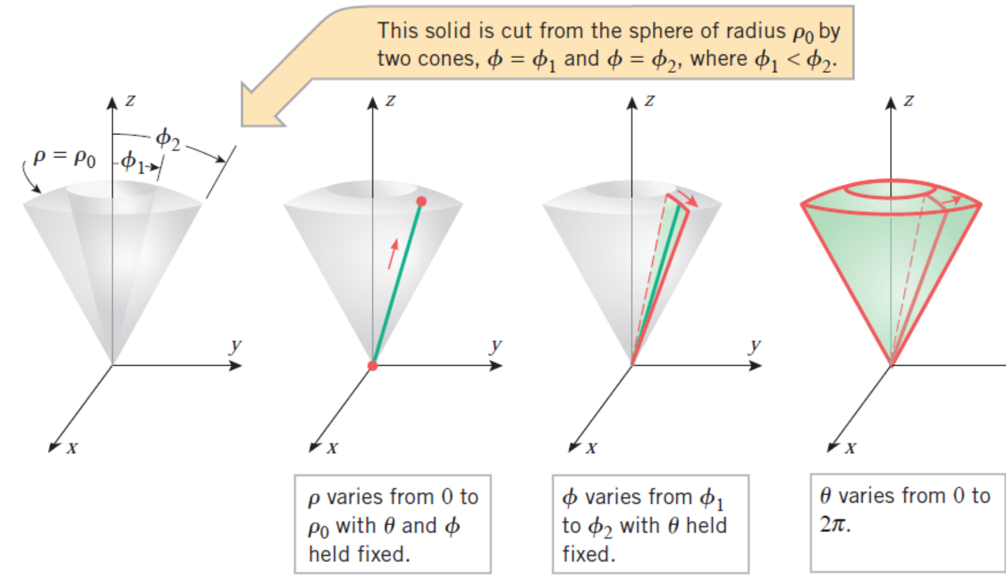

Figure 7: ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1053)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{\rho_1}^{\rho_2} \underline{\qquad\qquad} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

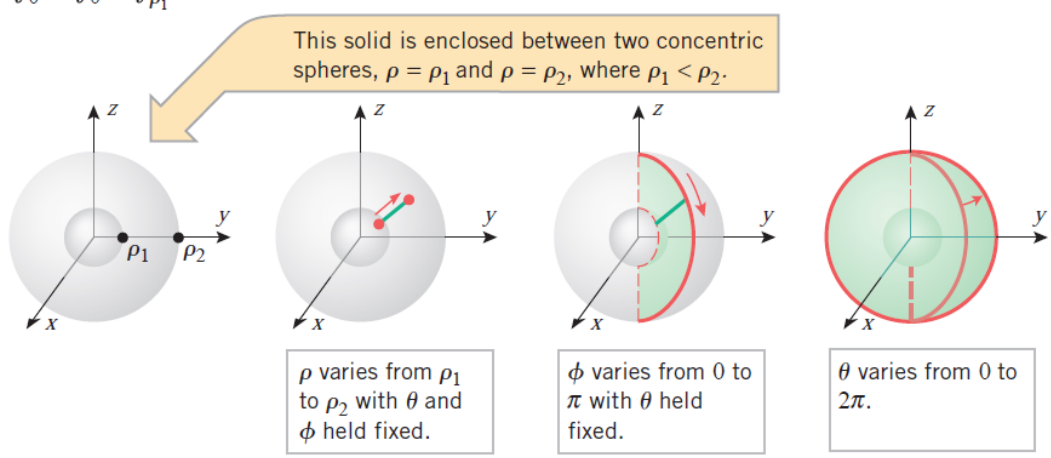

Figure 8: ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1054)

ตัวอย่าง 8. จงใช้การแปลงระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดทรงกลมในการหาปริมาตรของทรงตัน ที่ปิดล้อมด้วย $x^2+y^2+z^2=16$ กับ $z=\sqrt{x^2+y^2}$

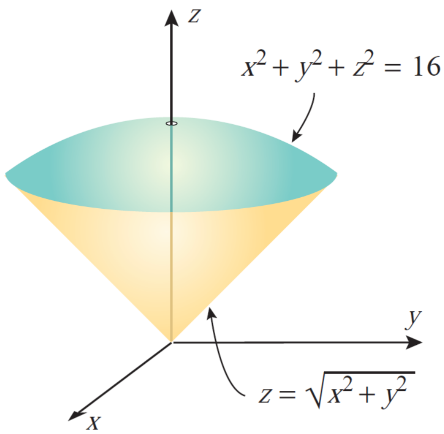

Figure 9: ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1054)

ตัวอย่าง 9. จงใช้การแปลงระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดทรงกลมในการหาค่า

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}dzdydx$$

ตัวอย่าง 10. จงหาค่า

$$\iiint\limits_{S} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$$

เมื่อ S เป็นทรงตันที่ปิดล้อมด้วยครึ่งทรงกลม $z=\sqrt{4-x^2+y^2}$ และระนาบ $z=1$