Calculus for Engineering III SC402202

Lecture 13 Basic Vectors

Chapter 3 Vector-Valued Functions

ในหัวข้อนี้ เราจะทบทวนความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเวกเตอร์ซึ่งเราเคยศึกษามาแล้วในชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

พิจารณาเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ ในระบบพิกัดฉากที่มีจุดเริ่มต้น (initial point) เป็นจุดกำเนิดในระบบพิกัดฉาก และ จุดปลาย (terminal point) เป็นจุด (v_1, v_2) ในปริภูมิ 2 มิติหรือจุด (v_1, v_2, v_3) ในปริภูมิ 3 มิติ เราจะเขียนแทน $\mathbf{v}$ ด้วย

$$\mathbf{v} := \langle v_1, v_2 \rangle \qquad \text{หรือ} \qquad \mathbf{v} := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

และเรียก v_1, v_2, v_3 ว่า ส่วนประกอบ (component) ของ $\mathbf{v}$ ในที่นี้ เราเขียนแทนเวกเตอร์ศูนย์ในปริภูมิ 2 มิติ/3 มิติ ด้วย

$$\mathbf{0} := \langle 0, 0 \rangle \qquad \text{หรือ} \qquad \mathbf{0} := \langle 0, 0, 0 \rangle$$

ถ้าไม่มีหมายเหตุเพิ่มเติม ขอตกลงว่าบทนิยามและทฤษฎีบทในหัวข้อเป็นจริงสำหรับปริภูมิ 2 มิติและ 3 มิติ และเพื่อความกระชับจะอธิบายเฉพาะปริภูมิ 3 มิติเท่านั้น

บทนิยาม 1. ให้ $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ และ $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติและ k เป็นค่าคงตัวใด ๆ

1. $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ ก็ต่อเมื่อ $u_i = v_i, i = 1, 2, 3$
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} := \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3 \rangle$
3. $\mathbf{u} - \mathbf{v} := \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3 \rangle$
4. $k\mathbf{u} := \langle ku_1, ku_2, ku_3 \rangle$

ต่อไปนี้เป็นสมบัติที่สำคัญของเวกเตอร์

ทฤษฎีบท 1. *ให้ $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ และ $\mathbf{w}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติและ k, l เป็นค่าคงตัวใด ๆ*

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

4. $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

5. $k(l\mathbf{u})=(kl)\mathbf{u}$

6. $k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$

7. $(k+l)\mathbf{u}=k\mathbf{u}+l\mathbf{u}$

8. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

บางครั้งเวกเตอร์อาจไม่ได้เริ่มต้นที่จุดกำเนิดในระบบพิกัดฉากดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2. ให้ $P_1(x_1,y_1,z_1)$ และ $P_2(x_2,y_2,z_2)$ เป็นจุดในปริภูมิ 3 มิติ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ P_1 และจุดปลายที่ P_2 เขียนแทนด้วย $\overrightarrow{P_1P_2}$ และนิยามโดย

$$\overrightarrow{P_1P_2} := \langle x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\rangle$$

บทนิยาม 3. ให้ $\mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ เราจะเรียกระยะทางจากจุดกำเนิดไปยังจุดปลายของเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ ว่า **ความยาว** (length) หรือ **นอร์ม** (norm) หรือ **ขนาด** (magnitude) ของ $\mathbf{v}$ และเขียนแทนด้วย $\|v\|$ นั่นคือ ถ้า $\mathbf{v}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ แล้ว

$$\|v\| := \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$

ตัวอย่าง 1. จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้

1. $\mathbf{v}=\langle 1,2,3\rangle$
2. $\mathbf{u}=\langle 2,4,6\rangle$
3. $\mathbf{w}=\langle 0,-1,2\rangle$
4. $\mathbf{x}=\langle 0,2,-4\rangle$

จากตัวอย่างข้างต้น จะพบว่า สำหรับเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ ใด ๆ และค่าคงตัว k ใด ๆ ขนาดของเวกเตอร์ $k\mathbf{v}$ เท่ากับขนาดของเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ คูณกับ $|k|$ เสมอ นั่นคือ

$$\|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\|$$

บทนิยาม 4. เราเรียกเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ ว่า **เวกเตอร์หนึ่งหน่วย** (unit vector) ถ้า $\|\mathbf{v}\| = 1$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน x, y และ z เขียนแทนด้วย

$$\mathbf{i} := \langle 1,0,0\rangle, \quad \mathbf{j} := \langle 0,1,0\rangle \quad \text{และ} \quad \mathbf{k} := \langle 0,0,1\rangle$$

หมายเหตุ 1. ทุกเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ สามารถเขียนในรูปของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ และ $\mathbf{k}$ ได้เพียงรูปแบบเดียวเสมอ นั่นคือ

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle =$$

ตัวอย่าง 2. จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

1. $\langle 1,-2,3\rangle$
2. $\langle 0,4,0\rangle$
3. $\langle 0,0,0\rangle$

บทนิยาม 5. ให้ $\mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ เราจะกล่าวว่าเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ เป็น **เวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางเดียวกับ $\mathbf{v}$** ถ้า $\mathbf{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย และมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\mathbf{v}$

หมายเหตุ 2. โดยปกติแล้ว ถ้ามีเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ เราสามารถหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางเดียวกับ $\mathbf{v}$ ได้ คือ

ตัวอย่าง 3. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางเดียวกับ $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

หมายเหตุ 3. ถ้า $\mathbf{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย เราสามารถหาเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ ที่มีทิศทางเดียวกับ $\mathbf{u}$ และมีขนาด $\|v\|$ ตามที่กำหนดให้ได้โดย

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{u}$$

ตัวอย่าง 4. จงหาเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ ที่มีขนาด 17 หน่วย และอยู่บนส่วนของเส้นตรงเชื่อมจากจุด $A(0,1,2)$ ไปยัง $B(3,-1,0)$

บทนิยาม 6. ให้ $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ และ $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ **ผลคูณจุด** (dot product) ของ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ เขียนแทนด้วย $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ และนิยามโดย

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

ตัวอย่าง 5. จงผลคูณจุดของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $\langle 1, 0, 1 \rangle$ และ $\langle 0, -1, 0, \rangle$
2. $3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ และ $\mathbf{i} - \mathbf{k}$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้รวบรวมสมบัติที่สำคัญของผลคูณจุด

ทฤษฎีบท 2. *ให้* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *และ* $\mathbf{w}$ *เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติและ* k *เป็นค่าคงตัวใด ๆ*

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
3. $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$
4. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$
5. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$

จากทฤษฎีบทข้างต้น จะพบว่าเราสามารถคำนวณขนาดของเวกเตอร์โดยใช้ผลคูณจุดได้โดย

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$$

บทนิยาม 7. ให้ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติที่มีจุดเริ่มต้นเดียวกัน เราจะเรียก θ ว่าเป็น**มุมระหว่าง $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$** ถ้า θ ที่เกิดจากเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ ซึ่งสอดคล้องกับ $0 \leq \theta \leq \pi$

ทฤษฎีบท 3. *ให้ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ แล้ว*

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

หมายเหตุ 4. จากทฤษฎีบทข้างต้นจะพบว่า มุมระหว่างเวกเตอร์ส่งผลกับเครื่องหมายของผลคูณจุดดังนี้

บทนิยาม 8. ให้ $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ และ $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ **ผลคูณไขว้** (cross product) ของ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ เขียนแทนด้วย $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ และนิยามโดย

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} := \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

หมายเหตุ 5. เพื่อความสะดวกในการจำสูตร เราอาจเขียนผลคูณไขว้ของ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ ได้เป็น

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} := \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

ตัวอย่าง 6. ให้ $\mathbf{u} = \langle 1, -2, 2 \rangle$ และ $\mathbf{v} = \langle 2, 0, -1 \rangle$ จงหาค่าของ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ และ $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้รวบรวมสมบัติสำคัญของผลคูณไขว้

ทฤษฎีบท 4. *ให้ $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ และ $\mathbf{w}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติและ k เป็นค่าคงตัวใด ๆ*

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$

3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

4. $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$

5. $\mathbf{0} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} = \mathbf{v} \times \mathbf{0}$

6. $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$

ตัวอย่าง 7. จงแสดงว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$
2. $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$
3. $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
4. $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$
5. $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$
6. $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$

ทฤษฎีบท 5. *ให้* $\mathbf{u}$ *และ* $\mathbf{v}$ *เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ แล้ว*

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{0} = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$$

ตัวอย่าง 8. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\langle 2,-1,3\rangle$ และ $\langle -1,2,1\rangle$