Calculus for Engineering III SC402202

Lecture 8
Triple Integrals over Rectangular Boxs

Chapter 2 Multiple Integrals

ในหัวข้อก่อนหน้านี้เราได้ศึกษาการหาปริพันธ์สองชั้นและการประยุกต์ใช้ปริพันธ์สองชั้นในการหาปริมาตรของทรงตันที่ถูกปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน $f(x,y)$ ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและมีค่าไม่เป็นลบ และบริเวณ R ที่เป็นบริเวณปิดในระนาบ xy ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการหาปริพันธ์สามชั้นของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ บนบริเวณที่เป็นทรงตัน (solid) ในระบบพิกัด xyz ในลำดับแรกนี้ เราจะกล่าวถึงการนิยามปริพันธ์สามชั้น และพิจารณาการหาปริพันธ์สามชั้นบนทรงตันที่เป็นกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก และใน Lecture 9 เราจะพิจารณาการหาปริพันธ์สามชั้นใบบริเวณทั่วไป

เพื่อที่จะจำกัดขอบเขตของทรงตัน G ไม่ให้มีค่าเป็นอนันต์ในบางทิศทาง เราสมมติให้ทรงตัน G ถูกปิดล้อมด้วยกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาดใหญ่ที่แต่ละด้านของกล่องขนานกับระนาบพิกัดดัง Figure 1 และเราจะเรียกทรงตันในลักษณะนี้ว่า ทรงตันจำกัด (finite solid)

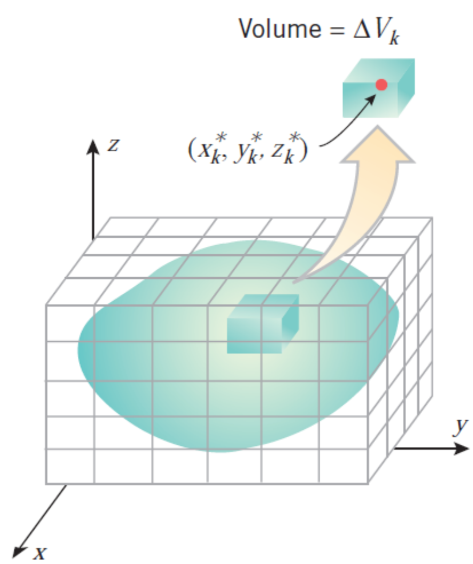

Figure 1: ทรงตัน G. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1039)

กำหนดให้ $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ในการนิยามปริพันธ์สามชั้นของฟังก์ชัน f บนทรงตันจำกัด G เราเริ่มต้นด้วยการใช้ระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัดแบ่งกล่องที่ปิดล้อมทรงตันจำกัด G ออกเป็นกล่องย่อยจำนวน n กล่อง ทั้งนี้เราจะไม่สนใจกล่องที่มีบางส่วนอยู่นอกทรงตัน G จากนั้นให้เราเลือกจุดใดจุดหนึ่งในแต่ละกล่องย่อย สมมติว่าในกล่องย่อย k เลือกเป็นจุด (x^*,y^*,z^*) และถ้าปริมาตรของแต่ละกล่องย่อย k เป็น ΔV_k จะได้ ผลคูณแต่ละ k เป็น

$$f(x^*,y^*,z^*)\Delta V_k$$

และเมื่อนำผลคูณที่เกิดขึ้นจากแต่ละกล่องย่อย k มารวมกันจะได้ ผลบวกรีมันน์ (Riemann sum)

$$\sum_{k=1}^{n} f(x^*,y^*,z^*)\Delta V_k$$

และเมื่อเราแบ่งกล่องที่บรรจุทรงตันจำกัด G ให้มีจำนวนกล่องย่อยจากจำนวน n กล่องเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จะได้ลิมิต

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x^*,y^*,z^*)\Delta V_k$$

ซึ่งเราเรียกค่าลิมิตนี้ว่า ปริพันธ์สามชั้น (triple integral) ของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ บนบริเวณ G และเขียนแทนด้วย

$$\iiint_G f(x,y,z)dV$$

ปริพันธ์สามชั้นมีสมบัติพื้นฐานในลักษณะเดียวกันกับปริพันธ์สองชั้น ดังนี้

กำหนดให้ G เป็นทรงตันจำกัดและให้ $f(x,y,z)$ และ $g(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน G จะได้ว่า

(i) $$\iiint_G [f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]dV = \iiint_G f(x,y,z)dV \pm \iiint_G g(x,y,z)dV$$

(ii) ถ้า c เป็นค่าคงตัวใด ๆ แล้ว

$$\iiint_G cf(x,y,z)dV = c\iiint_G f(x,y,z)dV$$

(iii) ถ้า G แบ่งออกเป็น G_1 และ G_2 ได้ดัง Figure 2 แล้ว

$$\iiint_G f(x,y,z)dV = \iiint_{G_1} f(x,y,z)dV + \iiint_{G_2} f(x,y,z)dV$$

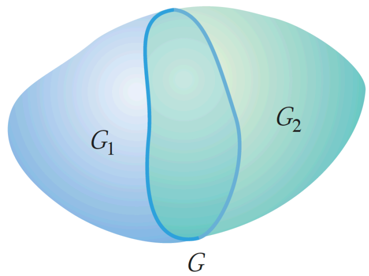

Figure 2: ทรงตัน G แบ่งออกเป็นทรงตัน G_1 และ G_2. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1040)

การคำนวณค่าปริพันธ์สามชั้นในกรณีที่ทรงตันจำกัด G เป็นกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 (ทฤษฎีบทของฟูบินิรูปแบบที่ 2). *ให้ G เป็นทรงตันจำกัดรูปกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก*

$$[a,b]\times[c,d]\times[k,l]$$

ถ้า $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน G แล้ว

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dV = \int_k^l \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz$$

โดยที่อันดับการหาปริพันธ์ซ้อนฝั่งขวามือสามารถแทนที่ด้วย $dxdzdy, dydxdz, dydzdx, dzdxdy$ และ $dzdydx$ ได้

ตัวอย่าง 1. กำหนดให้ $f(x,y,z) = y\sin z$ จงหาค่าของ $\iiint\limits_G f(x,y,z)dV$ โดยที่ G เป็นกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก $[0,\pi]\times[0,1]\times[0,\pi]$

ตัวอย่าง 2. กำหนดให้ $f(x,y,z) = 12xy^2z^3$ จงหาค่าของ $\iiint\limits_G f(x,y,z)dV$ โดยที่ G เป็นกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก $[-1,2]\times[0,3]\times[0,2]$