

Lecture 8

Triple Integrals over General Solids

Chapter 2 Multiple Integrals

¹ จากหัวข้อก่อนหน้านี้ เราสามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทฟูบินีในการหาปริพันธ์สามชั้นของฟังก์ชันของฟังก์ชันต่อเนื่องบนทรงตันจำกัด G รูปกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ ในหัวข้อนี้ เราจะพิจารณาการหาปริพันธ์สามชั้นบนทรงตันจำกัดทั่วไป

บทนิยาม 1. เราจะกล่าวว่าทรงตันจำกัด G เป็นทรงตัน xy อย่างง่าย (simple xy -solid) ถ้า

- G ถูกปิดล้อมด้านล่างและด้านบนด้วยพื้นผิว $z = g_1(x, y)$ และ $z = g_2(x, y)$ ตามลำดับ
- ภาพฉาย (projection) ของ G ไปยังระนาบ xy เป็นบริเวณ R แบบที่ 1 หรือบริเวณแบบที่ 2 โดยที่ $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$ สำหรับทุก $(x, y) \in R$

ดัง Figure 1

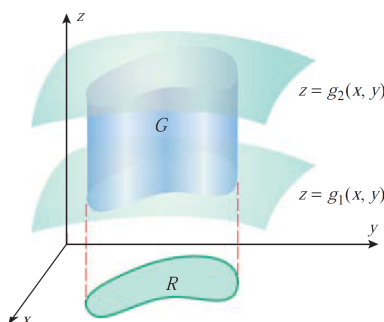


Figure 1: ทรงตัน xy อย่างง่าย. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1041)

การคำนวณค่าปริพันธ์สามชั้นในกรณีที่ทรงตันจำกัด G เป็นทรงตัน xy อย่างง่ายเป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

¹ABD12 : Section 14.5: 1-8, 9-12, 15-18, 19-20, 21-24, 25-26, 27-30, 31-32, 33-34, 37, 38, 39-40

TWH14 : Section 15.5 : 1-6, 7-20, 21-22, 23-36, 37-40

ทฤษฎีบท 1. ให้ทรงตันจำกัด G เป็นทรงตัน xy อย่างง่ายที่มีพื้นผิวด้านล่างเป็น $z = g_1(x,y)$ และพื้นผิวด้านบนเป็น $z = g_2(x,y)$ และ R เป็นภาพฉายของ G ไปยังระนาบ xy ถ้า $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน G แล้ว

$$\iiint_G f(x,y,z) dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right] dA$$

หมายเหตุ 1. จากทฤษฎีบทข้างต้น เราจะต้องทำการหาปริพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ เทียบกับ z ก่อน และเมื่อแทนขอบเขตของ z แล้วจะได้ฟังก์ชันสองตัวแปรของตัวแปร x และ y ซึ่งเราจะต้องทำการหาปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชันที่ได้นั้นบนบริเวณ R ตามที่เราเคยศึกษามาก่อนหน้านี้

ตัวอย่าง 1. กำหนดให้ G เป็นลิ้ม (wedge) ในอัฐภาคที่ 1 ซึ่งเกิดจากการตัดกันของทรงกระบอก $y^2 + z^2 \leq 1$, ระนาบ $y = x$ และระนาบ $x = 0$ จงหาค่าของ $\iiint_G z dV$

จากการหาปริมาตรของทรงตันโดยการประยุกต์ใช้ปริพันธ์สองชั้นนั้น เราจะพบว่าพื้นผิวด้านบนต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและไม่เป็นลบบนบริเวณ R ในระนาบ xy ในส่วนต่อไปนี้ เราสามารถประยุกต์ใช้ปริพันธ์สามชั้นในการหาปริมาตรของทรงตันโดยการกำหนดให้ฟังก์ชัน $f(z,y,y) = 1$ ได้เช่นกัน กล่าวคือ ถ้าทรงตัน G เป็นทรงตัน xy อย่างง่าย แล้วปริมาตรของทรงตันจำกัด G นี้คือ

$$\iiint_G 1 dV$$

ตัวอย่าง 2. จงใช้ปริพันธ์สามชั้นหาปริมาตรของทรงตันจำกัดที่ถูกปิดล้อมด้วยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 9$ ระนาบ $z = 1$ และระนาบ $x + z = 5$ ดัง Figure 2

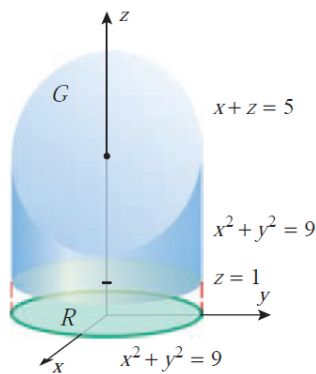


Figure 2: ทรงตัน. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1043)

ตัวอย่าง 3. จงใช้ปริพันธ์สามชั้นหาปริมาตรของทรงตันจำกัดที่ถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = xy^2$ ระนาบ $z = 0$ ดัง Figure 3

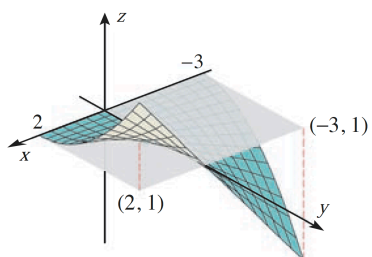


Figure 3: ทรงตัน. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1006)

ตัวอย่าง 4. จงใช้ปริพันธ์สามชั้นหาปริมาตรของทรงตันจำกัดที่ถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = 5x^2 + 5y^2$ และ $z = 6 - 7x^2 - y^2$ ดัง Figure 4

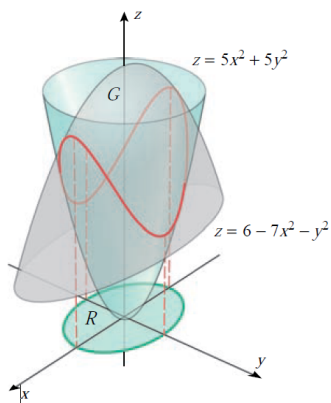


Figure 4: ทรงตัน. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1043)

จากทฤษฎีบทข้างต้น จะพบว่า เราต้องพิจารณาทรงตัน xy อย่างง่าย และทำการหาปริพันธ์ซ้อนเทียบกับ z ก่อนอย่างไรก็ตาม เราสามารถหาปริพันธ์สามชั้นโดยพิจารณาทรงตันลักษณะอื่นได้ดังนี้

บทนิยาม 2. เราจะกล่าวว่าทรงตันจำกัด G เป็นทรงตัน xz อย่างง่าย (simple xz -solid) ถ้า

- G ถูกปิดล้อมด้านซ้ายและด้านขวาด้วยพื้นผิว $y = g_1(x, z)$ และ $y = g_2(x, z)$ ตามลำดับ
- ภาพฉาย (projection) ของ G ไปยังระนาบ xz เป็นบริเวณ R แบบที่ 1 หรือบริเวณแบบที่ 2 โดยที่ $g_1(x, z) \leq g_2(x, z)$ สำหรับทุก $(x, z) \in R$

ดัง Figure 5

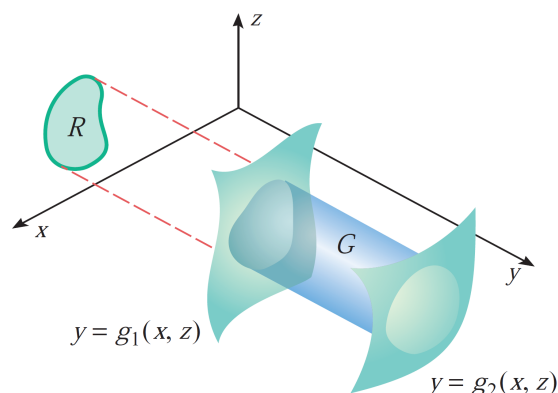


Figure 5: ทรงตัน xz อย่างง่าย. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1044)

ทฤษฎีบท 2. ให้ทรงตันจำกัด G เป็นทรงตัน xz อย่างง่ายที่มีพื้นผิวด้านซ้ายเป็น $y = g_1(x, z)$ และพื้นผิวด้านขวาเป็น $y = g_2(x, z)$ และ R เป็นภาพฉายของ G ไปยังระนาบ xz ถ้า $f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน G แล้ว

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x, z)}^{g_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dA$$

ตัวอย่าง 5. กำหนดให้ G เป็นลิ้ม (wedge) ในอัฐภาคที่ 1 ซึ่งเกิดจากการตัดกันของทรงกระบอก $y^2 + z^2 \leq 1$, ระนาบ $y = x$ และระนาบ $x = 0$ จงหาค่าของ $\iiint_G z dV$ โดยพิจารณาทรงตัน xz อย่างง่าย

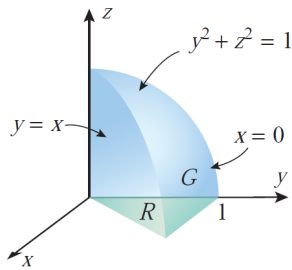


Figure 6: ลิ้ม. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1042)

บทนิยาม 3. เราจะกล่าวว่าทรงตันจำกัด G เป็นทรงตัน yz อย่างง่าย (simple yz -solid) ถ้า

- G ถูกปิดล้อมด้านหลังและด้านหน้าด้วยพื้นผิว $x = g_1(y, z)$ และ $x = g_2(y, z)$ ตามลำดับ
- ภาพฉาย (projection) ของ G ไปยังระนาบ yz เป็นบริเวณ R แบบที่ 1 หรือบริเวณแบบที่ 2 โดยที่ $g_1(y, z) \leq g_2(y, z)$ สำหรับทุก $(y, z) \in R$

ดัง Figure 7

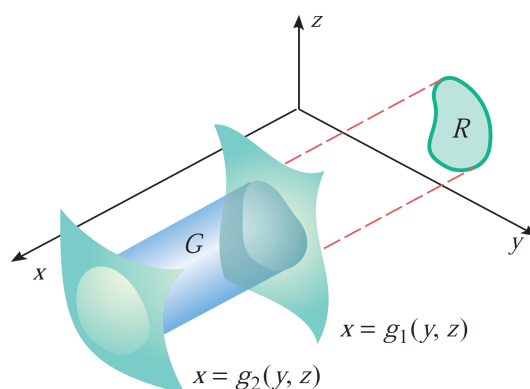


Figure 7: ทรงตัน yz อย่างง่าย. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1044)

ทฤษฎีบท 3. ให้ทรงตันจำกัด G เป็นทรงตัน yz อย่างง่ายที่มีพื้นผิวด้านหลังเป็น $x = g_1(y, z)$ และพื้นผิวด้านหน้าเป็น $x = g_2(y, z)$ และ R เป็นภาพฉายของ G ไปยังระนาบ yz ถ้า $f(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน G แล้ว

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_R \left[\int_{g_1(y, z)}^{g_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dA$$

ตัวอย่าง 6. กำหนดให้ G เป็นลิ้ม (wedge) ในอัฐภาคที่ 1 ซึ่งเกิดจากการตัดกันของทรงกระบอก $y^2 + z^2 \leq 1$, ระนาบ $y = x$ และระนาบ $x = 0$ จงหาค่าของ $\iiint_G z dV$ โดยพิจารณาทรงตัน yz อย่างง่าย

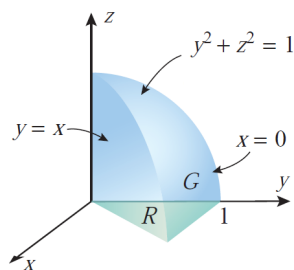


Figure 8: ลิ้ม. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1042)