Calculus for Engineering III SC402202

Lecture 14 Parametric Curves in 3D-Space

Chapter 3 Vector-Valued Functions

[1] ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาฟังก์ชันค่าเวกเตอร์และกราฟของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

บทนิยาม 1. ให้ $f(t), g(t)$ และ $h(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปร t พิจารณาสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad \text{และ} \quad z = h(t)$$

ซึ่งก่อกำเนิดเส้นโค้ง (curve) ในปริภูมิสามมิติที่มีรอยเดิน (trace) เปลี่ยนแปลงไปตามทิศทางที่ t เพิ่มขึ้น เราจะเรียก

- ทิศทาง (direction) ที่ค่า t เพิ่มขึ้น ว่า **การกำหนดทิศทาง** (orientation) หรือ **ทิศทางการการเพิ่มของตัวแปรเสริม** (direction of increasing parameter)
- เส้นโค้งที่กำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริมข้างต้นที่มีการกำหนดทิศทาง ว่า **กราฟ** (graph) ของสมการอิงตัวแปรเสริม หรือ **เส้นโค้งอิงตัวแปรเสริม** (parametric curve)

หมายเหตุ 1. ในหัวข้อนี้ ถ้าไม่มีการระบุเพิ่มเติม เราจะสมมติให้ t อยู่ในช่วง $(-\infty, +\infty)$

ตัวอย่าง 1. จงเขียนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = 1 - t, \quad y = 3t \quad \text{และ} \quad z = 2t$$

[1] **ABD12** : Section 12.1 : 3, 4, 6, 8, 11-14, 15(b), 16(b), 18, 20, 27-30, 31, 33, 34, 39, 41

ตัวอย่าง 2. จงเขียนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad \text{และ} \quad z = 0$$

ตัวอย่าง 3. จงเขียนกราฟของเกลียวเชิงวงกลม (circular helix) ที่กำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t \quad \text{และ} \quad z = t$$

สังเกตว่าเกลียวเชิงวงกลมที่นิยามในตัวอย่างข้างต้นเป็นเซตของจุดในปริภูมิสามมิติที่อยู่ในรูป $(a\cos t, a\sin t, t)$ สำหรับทุก $t \in (\infty, +\infty)$ ดังนั้น ถ้าเราให้จุดเหล่านี้เป็นจุดปลายของเวกเตอร์ $\mathbf{r}$ ที่จุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดกำเนิดจะได้ว่า

$$\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle = \langle a\cos t, a\sin t, t\rangle = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

นั่นคือ $\mathbf{r}$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร t และเนื่องจากค่าฟังก์ชัน $\mathbf{r}(t)$ ที่ได้เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ เราจึงเรียก $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ว่า **ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของตัวแปรจริง** (vector-valued function of a real variable) หรือ **ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์** (vector-valued function)

นอกจากนี้ ถ้า $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของตัวแปรจริง t จะได้ว่า $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ สามารถเขียนอยู่ในรูปของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ และ $\mathbf{k}$ ได้เสมอ นั่นคือ จะมีฟังก์ชัน $x(t), y(t)$ และ $z(t)$ ที่

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

และเราจะเรียกฟังก์ชัน $x(t), y(t)$ และ $z(t)$ ว่า **ฟังก์ชันส่วนประกอบ** (component function) หรือ **ส่วนประกอบ** (component) ของ $\mathbf{r}$

บทนิยาม 2. ให้ $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ เราจะเรียกเซตของตัวแปรจริง t ที่ทำให้ฟังก์ชัน $\mathbf{r}(t)$ นิยามได้ ว่า **โดเมน** (domain) ของ $\mathbf{r}$ ถ้า $\mathbf{r}$ อยู่ในรูปของฟังก์ชันส่วนประกอบ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ แล้ว โดเมนของ $\mathbf{r}(t)$ คืออินเตอร์เซกชันของโดเมนของฟังก์ชันส่วนประกอบทั้งหมด และเราจะเรียกโดเมนของ $\mathbf{r}(t)$ ในกรณีนี้ว่า **โดเมนธรรมชาติ** (natural domain)

ตัวอย่าง 4. จงหาโดเมนของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t) = \ln t\mathbf{i} + \sqrt{1-t}\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$

ตัวอย่าง 5. จงหาโดเมนของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t) = \ln|t-1|\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$

บทนิยาม 3. ให้ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ **กราฟ** (graph) ของ $\mathbf{r}(t)$ คือ กราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม $x(t), y(t)$ และ $z(t)$ ที่เป็นฟังก์ชันส่วนประกอบของ $\mathbf{r}(t)$

ตัวอย่างเช่น ถ้า $\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ แล้วกราฟของ $\mathbf{r}(t)$ คือกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = 1-t, \qquad y = 3t \qquad \text{และ} \qquad z = 2t$$

ตัวอย่าง 6. จงหาโดเมนและเขียนกราฟของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\mathbf{r}(t) = (2+3t)\mathbf{i} + (-1+t)\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$$

บทนิยาม 4. ให้ C เป็นเส้นโค้งเป็นกราฟของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

เราจะเรียก เวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและจุดปลายอยู่บนเส้นโค้ง C ณ t ใด ๆ ว่า **เวกเตอร์รัศมี** (radius vector) หรือ **เวกเตอร์ตำแหน่ง**

ตัวอย่าง 7. จงเขียนกราฟและหาเวกเตอร์ตำแหน่งเมื่อ $t = \pi/2$ ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

หากเรายังจำได้ Lecture 1 เราได้ศึกษาสมการของเส้นตรงที่ผ่านสองจุดใด ๆ ในปริภูมิสองมิติมาแล้ว ในทำนองเดียวกัน ถ้า $\mathbf{r}_0$ และ $\mathbf{r}_1$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด แล้ว สมการในรูปเวกเตอร์ของเส้นตรงที่ผ่านจุดปลายของ $\mathbf{r}_0$ และ $\mathbf{r}_1$ คือ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \qquad \text{หรือ} \qquad \mathbf{r} = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad \forall t \in (-\infty, +\infty)$$

และถ้าเราจำกัดขอบเขตของ t เป็น $[0,1]$ แล้ว ค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}$ จะอยู่ระหว่าง $\mathbf{r}_0$ และ $\mathbf{r}_1$ และได้สมการในรูปเวกเตอร์ของจุดใด ๆ ที่อยู่บนส่วนเส้นตรงระหว่าง $\mathbf{r}_0$ และ $\mathbf{r}_1$ คือ

$$\mathbf{r} = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad \forall t \in [0,1]$$

ตัวอย่าง 8. จงหาสมการของส่วนของเส้นตรงที่อยู่ระหว่างเวกเตอร์ $\mathbf{r}_0 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ และ $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$