Calculus for Engineering III	SC402202

Lecture 15 Limits and Continuity

Chapter 3 Vector-Valued Functions

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาสมบัติพื้นฐานทางพีชคณิตของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์และแคลคูลัสพื้นฐานของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

บทนิยาม 1. ให้ $\mathbf{r}(t), \mathbf{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ และ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง สำหรับทุก $t \in \mathbb{R}$ เรานิยามการดำเนินการของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ดังนี้

1. $(\mathbf{r} \pm \mathbf{s})(t) = \mathbf{r}(t) \pm \mathbf{s}(t)$
2. $(f\mathbf{r})(t) = f(t)\mathbf{r}(t)$
3. $(\mathbf{r} \circ f)(t) = \mathbf{r}(f(t))$
4. $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})(t) = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}$
5. $(\mathbf{r} \times \mathbf{s})(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{s}(t)$

ตัวอย่าง 1. กำหนดให้ $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}0\sqrt{t}\mathbf{k}$, $\mathbf{s} = \ln t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$ และ $f(t) = t^2$ จงหาค่าของการดำเนินการของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ดังนี้

1. $(\mathbf{r} \pm \mathbf{s})(t)$

2. $(f\mathbf{r})(t)$

3. $(\mathbf{r} \circ f)(t)$

4. $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})(t)$

5. $(\mathbf{r} \times \mathbf{s})(t)$

ในลำดับถัดไป เราจะศึกษาแนวคิดของลิมิตของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ เมื่อตัวแปรจริง t ลู่เข้าสู่ a ดังนี้

บทนิยาม 2. ให้ $a \in \mathbb{R}$ และ $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่นิยามสำหรับทุก t ที่อยู่ในช่วงที่บรรจุ a และ $\mathbf{L}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ เราจะกล่าวว่า $\mathbf{L}$ เป็น**ลิมิต** (limit) ของ $\mathbf{r}(t)$ เมื่อ t ลู่เข้าสู่ a ถ้า

$$\lim_{t \to a} \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\| = 0$$

และเราจะเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$

หมายเหตุ 1. ฟังก์ชัน $\mathbf{r}(t)$ ในนิยามข้างต้นนี้ไม่จำเป็นต้องหาค่าได้ที่ $t = a$

ทฤษฎีบท 1. *ให้ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์และ $a \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $\lim\limits_{t \to a} \mathbf{r}(t)$ หาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ ลิมิตของฟังก์ชันส่วนประกอบ $\lim\limits_{t \to a} x(t), \lim\limits_{t \to a} y(t)$ และ $\lim\limits_{t \to a} z(t)$ หาค่าได้ นอกจากนี้ จะได้ว่า*

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \lim_{t \to a} x(t)\mathbf{i} + \lim_{t \to a} y(t)\mathbf{j} + \lim_{t \to a} z(t)\mathbf{k}$$

ตัวอย่าง 2. กำหนดให้ $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - 2cos\pi t\mathbf{k}$ จงหา $\lim\limits_{t \to 0} \mathbf{r}(t)$ (ถ้ามี)

ตัวอย่าง 3. กำหนดให้ $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + \frac{t}{\sin t}\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$ จงหา $\lim_{t\to 0}\mathbf{r}(t)$ (ถ้ามี)

ต่อไปเป็นสมบัติทางพีชคณิตของลิมิตของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

ทฤษฎีบท 2. *ให้ $\mathbf{r}(t), \mathbf{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง และ $a \in \mathbb{R}$ สมมติให้ $\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}, \lim_{t\to a}\mathbf{s}(t) = \mathbf{B}$ และ $\lim_{t\to a} f(t) = c$ จะได้ว่า*

1. $\lim_{t\to a}(\mathbf{r} \pm \mathbf{s})(t) = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$
2. $\lim_{t\to a}(f\mathbf{r})(t) = c\mathbf{A}$
3. $\lim_{t\to a}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
4. $\lim_{t\to a}(\mathbf{r} \times \mathbf{s})(t) = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$

ตัวอย่าง 4. กำหนดให้ $\mathbf{r}(t) = \cos\pi t\mathbf{i} + 2\sin\pi t\mathbf{j} + 4t^2\mathbf{k}, \mathbf{s}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{k}$ และ $f(t) = \frac{1}{t-1}$ จงหาค่าของลิมิตในแต่ละข้อต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1. $\lim_{t\to a}(\mathbf{r} \pm \mathbf{s})(t)$

2. $\lim_{t \to a} (f\mathbf{r})(t)$

3. $\lim_{t \to a} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})(t)$

4. $\lim_{t \to a} (\mathbf{r} \times \mathbf{s})(t)$

บทนิยาม 3. ให้ $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ $a \in \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า $\mathbf{r}(t)$ เป็น **ฟังก์ชันต่อเนื่อง** (continuous function) ที่ $t = a$ ถ้า

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

ทฤษฎีบท 3. *ให้ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ $a \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $t = a$ ก็ต่อเมื่อ ทุกฟังก์ชันส่วนประกอบ $x(t), y(t)$ และ $z(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $t = a$*

ตัวอย่าง 5. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t) = 5\mathbf{i} - \sqrt{3t-1}\mathbf{j} + e^{2t}\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $t = 0$ หรือไม่

ตัวอย่าง 6. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t) = t^2/\mathbf{i} - \frac{1}{t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $t = 0$ หรือไม่

ตัวอย่าง 7. จงหาช่วงที่ทำให้ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} - \frac{1}{t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง