Calculus for Engineering III SC402202

Lecture 16 Derivatives and Integrals

Chapter 3 Vector-Valued Functions

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการหาอนุพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

บทนิยาม 1. ให้ $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ อนุพันธ์ของ $\mathbf{r}$ เทียบกับ t (derivative of $\mathbf{r}$ with respect to t) คือ ฟังก์ชันเวกเตอร์ $\mathbf{r}'(t)$ ที่

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}$$

โดยที่ลิมิตหาค่าได้ และเราจะกล่าวว่าฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ หาอนุพันธ์ได้ที่ t (differentiable at t)

ทั้งนี้ เราอาจใช้สัญลักษณ์ $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)], \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{r}'(t)$ หรือ $\mathbf{r}'$ แทนอนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ นอกจากนี้ อนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์มีความหมายทางเรขาคณิต ดังนี้

ทฤษฎีบท 1. *ให้ C เป็นกราฟของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ และสมมติว่า $\mathbf{r}'(t)$ หาค่าได้และไม่เป็นศูนย์ ณ จุด t ถ้าเวกเตอร์ $\mathbf{r}'(t)$ อยู่ในตำแหน่งที่มีจุดเริ่มต้นเป็นจุดปลายของเวกเตอร์ตำแหน่ง $\mathbf{r}(t)$ แล้ว $\mathbf{r}'(t)$ สัมผัสกับ C และมีทิศทางในทิศทางการเพิ่มของตัวแปรเสริม*

กำหนดให้ P เป็นจุดบนกราฟ C และ $\mathbf{r}(t_0)$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งจากจุดกำเนิดไปยังจุด P ถ้า $\mathbf{r}'(t_0)$ หาค่าได้และ $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ แล้ว เราจะเรียก $\mathbf{r}(t_0)$ ว่า เวกเตอร์สัมผัส (tangent vector) ของกราฟ C ที่ $\mathbf{r}(t_0)$ และเราจะเรียกเส้นตรงที่ผ่านจุด P และขนานกับเวกเตอร์สัมผัสว่า เส้นสัมผัส (tangent line) ของ C ที่ $\mathbf{r}(t_0)$

ถ้ากำหนดให้ $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ และ $\mathbf{v}_0 = \mathbf{r}'(t_0)$ เราสามารถหาเส้นสัมผัสกราฟของ $\mathbf{r}(t)$ ที่ $\mathbf{r}_0$ ได้คือ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}_0$$

นอกจากนี้ เราสามารถคำนวณอนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2. *ให้ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ จะได้ว่า $\mathbf{r}(t)$ หาอนุพันธ์ได้ที่ t ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชันส่วนประกอบ $x(t), y(t)$ และ $z(t)$ หาอนุพันธ์ได้ที่ t นอกจากนี้ จะได้ว่า*

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

ตัวอย่าง 1. กำหนดให้ $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - 2cos\pi t\mathbf{k}$ จงหา $\mathbf{r}'(t)$ (ถ้ามี)

ตัวอย่าง 2. กำหนดให้ $\mathbf{r}(t) = (x_0 + at)\mathbf{i} + (y_0 + bt)\mathbf{j} + (z_0 + ct)\mathbf{k}$ จงแสดงว่า $\mathbf{r}'(t) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ (ถ้ามี)

ตัวอย่าง 3. กำหนดให้ $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ เป็นสมการของเกลียวเชิงวงรี จงหาสมการอิงตัวแปรของเส้นสัมผัสของเกลียวเชิงวงรีนี้ เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$

ต่อไปเป็นสมบัติทางพีชคณิตของอนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

ทฤษฎีบท 3. *ให้ $\mathbf{r}(t), \mathbf{s}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่หาอนุพันธ์ได้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่หาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า*

1. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{c}] = \mathbf{0}$ *เมื่อ* $\mathbf{c}$ *เป็นเวกเตอร์คงตัว (constat vector)*
2. $\dfrac{d}{dt}[k\mathbf{r}(t)] = k\dfrac{d}{dt}[k\mathbf{r}(t)]$ *เมื่อ k เป็นค่าคงตัว*
3. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{s}(t)] = \dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)] \pm \dfrac{d}{dt}[\mathbf{s}(t)]$
4. $\dfrac{d}{dt}[f(t)\mathbf{r}(t)] = f(t)\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)] + \dfrac{d}{dt}[f(t)]\mathbf{r}(t)$
5. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}(t)] = \mathbf{r}(t) \cdot \dfrac{d}{dt}[\mathbf{s}(t)] + \dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{s}(t)$
6. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{s}(t)] = \mathbf{r}(t) \times \dfrac{d}{dt}[\mathbf{s}(t)] + \dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)] \times \mathbf{s}(t)$

นอกจากนี้ เรายังมีความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ตำแหน่งกับอนุพันธ์ของเวกเตอร์ตำแหน่งนั้น ๆ ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 1. *ให้ $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่หาอนุพันธ์ได้ และ $\|\mathbf{r}(t)\|$ เป็นค่าคงตัวสำหรับทุก t จะได้ว่า*

$$\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)=0$$

ตัวอย่าง 4. กำหนดให้ $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}-3\mathbf{k},\mathbf{s}(t)=t\mathbf{i}++t\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ และ $f(t)=t^2+2t+3$ จงหาค่าของอนุพันธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1. $(\mathbf{r}+\mathbf{s})'(t)$

2. $(f\mathbf{r})'(t)$

3. $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})(t)$

4. $(\mathbf{r} \times \mathbf{s})(t)$

ทฤษฎีบท 4. *ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่หาอนุพันธ์ได้ที่ $t = s$ และ $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่หาอนุพันธ์ได้ที่ $t = f(s)$ จะได้ว่า*

$$(\mathbf{r} \circ f)'(s) = \mathbf{r}'(f(s))f'(s)$$

ตัวอย่าง 5. กำหนดให้ $f(t) = \sqrt{t}$ และ $\mathbf{r}(t) = \ln t\mathbf{i} - 4e^{2t}\mathbf{j} + \frac{t-1}{t}\mathbf{k}$ จงหาค่าของ $(\mathbf{r} \circ f)'(1)$

ในลำดับถัดไป เราจะศึกษาการประยุกต์ใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ซึ่งเกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของอนุภาคดังนี้

บทนิยาม 2. ให้ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันของการเคลื่อนที่ของอนุภาคตามเส้นโค้ง ณ เวลา t ใด ๆ

1. ความเร็ว (velocity) ของอนุภาค ณ เวลา t คือ

$$\mathbf{v}(t) := \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)] = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

2. ความเร่ง (acceleration) ของอนุภาค ณ เวลา t คือ

$$\mathbf{a}(t) := \frac{d}{dt}[\mathbf{v}(t)] = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} + z''(t)\mathbf{k}$$

3. อัตราเร็ว (speed) ของอนุภาค ณ เวลา t คือ

$$\|\mathbf{v}(t)\| := \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

ตัวอย่าง 6. กำหนดให้อนุภาคเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งเชิงวงรี

$$x(t) = 2\cos t, \quad y(t) = 2\sin t \quad \text{และ} \quad z(t) = t$$

1. จงหาความเร็ว อัตราเร็ว และความเร่งของอนุภาค ณ เวลา t
2. จงแสดงว่าความเร็วและความเร่งของอนุภาค ณ เวลา t ใด ๆ ตั้งฉากกัน

บทนิยาม 3. ให้ $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ เขียนแทนด้วย $\int_a^b \mathbf{r}(t)dt$ และกำหนดโดย

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt := \int_a^b x(t)dt\mathbf{i}+\int_a^b y(t)dt\mathbf{j}+\int_a^b z(t)dt\mathbf{k}$$

ในทำนองเดียวกันกับการหาอนุพันธ์ของฟังกีชันค่าเวกเตอร์ เราสามารถคำนวณ์คาปริพันธ์ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 5. *ให้* $\mathbf{r}(t)$ *และ* $\mathbf{s}(t)$ *เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่มีความต่อเนื่องบนช่วง* $[a,b]$ *และ* k *เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า*

1. $\int_a^b k\mathbf{r}(t)dt = k\int_a^b \mathbf{r}(t)dt$
2. $\int_a^b (\mathbf{r}(t)\pm\mathbf{s}(t))dt = \int_a^b \mathbf{r}(t)dt+\int_a^b \mathbf{s}(t)dt$

ตัวอย่าง 7. กำหนดให้ $\mathbf{r}(t)=\cos t\mathbf{i}-\sin t\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ จงหาค่าของ $\int_0^{\pi/4} k\mathbf{r}(t)dt$

บทนิยาม 4. ให้ $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่มีความต่อเนื่อง เราจะกล่าวว่า ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{R}(t)$ ว่าเป็น ปฏิยานุพันธ์ (antiderivative) ของ $\mathbf{r}(t)$ ถ้า $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$ นั่นคือ

$$\int \mathbf{r}'(t)dt := \mathbf{r}(t) + \mathbf{C}$$

โดยที่ $\mathbf{C}$ เป็นเวกเตอร์คงตัวจากการหาปริพันธ์

ต่อไปเป็นทฤษฎีบทที่มีความสำคัญเกี่ยวกับปฏิยานุพันธ์

ทฤษฎีบท 6. *ให้* $\mathbf{r}(t)$ *และ* $\mathbf{R}(t)$ *เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่* $\mathbf{r}(t)$ *มีความต่อเนื่องบนช่วง* $[a,b]$ *ถ้า* $\mathbf{R}(t)$ *เป็นปฏิยานุพันธ์ของ* $\mathbf{r}(t)$ *บนช่วง* $[a,b]$ *แล้ว*

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

ตัวอย่าง 8. อนุภาคชนิดหนึ่งเคลื่อนที่ตามเส้นโค้งด้วยสมการความเร็ว $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ ถ้า ณ เวลา $t = 0$ วินาที อนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง $-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ จงหาเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคนี้ ณ เวลา t ใด ๆ

ตัวอย่าง 9. อนุภาคชนิดหนึ่งเคลื่อนที่ตามเส้นโค้งด้วยสมการความเร็ว $\mathbf{v}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$ ถ้า ณ เวลา $t = 0$ วินาที อนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง $-\mathbf{i} + \mathbf{k}$ และความเร็วเริ่มต้น $\mathbf{v}_0 = \mathbf{k}$ จงหาเวกเตอร์ตำแหน่ง ความเร็ว และอัตราเร็วของอนุภาคนี้ ณ เวลา t ใด ๆ