

# Lecture 18 Unit Tangent, Normal and Binormal Vectors

Chapter 3 Vector-Valued Functions

1

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาสมบัติพื้นฐานทางเรขาคณิตของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

หากเรายังจำได้ ถ้าเรามีเส้นโค้งปรับเรียบ  $C$  ที่เป็นกราฟของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์  $\mathbf{r}(t)$  แล้วเราจะได้ว่า  $\mathbf{r}'(t)$  จะไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์และสัมผัสกับ  $C$  นอกจากนี้ทิศทางของ  $\mathbf{r}'(t)$  เป็นทิศทางเดียวกันกับทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริม

**บทนิยาม 1.** ให้  $C$  เป็นเส้นโค้งปรับเรียบที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์  $\mathbf{r}(t)$  บนช่วง  $I$  ใด ๆ **เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย** (unit tangent vector) ที่สัมผัส  $C$  ณ จุด  $t$  เขียนแทนด้วย  $\mathbf{T}(t)$  และกำหนดโดย

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

**ตัวอย่าง 1.** จงหาเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยที่สัมผัสเส้นโค้ง  $C$  ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์  $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$  ณ  $t = 2$

<sup>1</sup>ABD12 : Section 12.4 : 1, 2, 5,-12, 15-18, 19-20, 21, 22, 24

ตัวอย่าง 2. จงหาเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยที่สัมผัสเส้นโค้ง  $C$  ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + 3t \mathbf{k}$$

ณ  $t = t_0$

พิจารณาฟังก์ชันค่าเวกเตอร์  $\mathbf{r}(t)$  หากเรายังจำได้ ถ้าเราทราบว่า  $\|\mathbf{r}(t)\|$  เป็นค่าคงตัว แล้ว  $\mathbf{r}(t)$  และ  $\mathbf{r}'(t)$  จะเป็นเวกเตอร์ตั้งฉากกัน จากนิยามข้างต้น เราทราบว่า

$$\|\mathbf{T}(t)\| = \left\| \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \right\| = 1$$

ซึ่งเป็นค่าคงตัว จึงได้ว่า  $\mathbf{T}(t)$  และ  $\mathbf{T}'(t)$  เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกันด้วย นั่นคือ  $\mathbf{T}'(t)$  ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของ  $C$  ที่จุด  $t$  นั้นเอง และในที่นี้เราจะกล่าวว่า  $\mathbf{T}'(t)$  เป็น **แนวฉาก** (normal) ของ  $C$  ณ จุด  $t$

**บทนิยาม 2.** ให้  $C$  เป็นเส้นโค้งปรับเรียบที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์  $\mathbf{r}(t)$  โดยที่  $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$  **เวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วย** (unit normal vector) ของ  $C$  ณ จุด  $t$  เขียนแทนด้วย  $\mathbf{N}(t)$  และกำหนดโดย

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

ตัวอย่าง 3. กำหนดให้  $a > 0$  จงหาเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยของเส้นโค้ง  $C$  ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์  $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + ct \mathbf{k}$  ณ  $t = t_0$

บทนิยาม 3. ให้  $C$  เป็นเส้นโค้งปรับเรียบที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์  $\mathbf{r}(t)$  โดยที่  $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$  เวกเตอร์คู่แนวฉากหนึ่งหน่วย (unit binormal vector) ของ  $C$  ณ จุด  $t$  เขียนแทนด้วย  $\mathbf{B}(t)$  และกำหนดโดย

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

จากสมบัติของผลคูณไขว้ จะได้ว่า  $\mathbf{B}(t)$  ตั้งฉากกับทั้ง  $\mathbf{T}(t)$  และ  $\mathbf{N}(t)$  นอกจากนี้ เรายังทราบว่า  $\mathbf{B}(t)$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย กล่าวคือ

$$\|\mathbf{B}(t)\| = \|\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)\| = \|\mathbf{T}(t)\| \|\mathbf{N}(t)\| \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

ตัวอย่าง 4. จงหาเวกเตอร์คู่แนวฉากหนึ่งหน่วยของเส้นโค้ง  $C$  ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์  $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + \mathbf{k}$  ณ  $t = t_0$