

Lecture 20 Line Integrals 1

Chapter 4 Vector Calculus

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันในปริภูมิ 2 มิติดังนี้

บทนิยาม 1. ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบในปริภูมิ 2 มิติที่กำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{สำหรับทุก} \quad t \in [a, b]$$

และให้ $f(x, y)$ และ $g(x, y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน C

ปริพันธ์ตามเส้น (line integral) ของ f บน C เทียบ x กำหนดโดย

$$\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

และปริพันธ์ตามเส้น (line integral) ของ g บน C เทียบ y กำหนดโดย

$$\int_C g(x, y) dy = \int_a^b g(x(t), y(t)) y'(t) dt$$

โดยทั่วไปแล้ว ถ้าต้องการคำนวณปริพันธ์ตามเส้นเทียบ x และ y พร้อมกัน เราจะเขียนแทนด้วย

$$\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy := \int_C f(x, y) dx + \int_C g(x, y) dy$$

ตัวอย่าง 1. จงหาค่าของ $\int_C 2xy dy$ โดยที่ C เป็นส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(0, 0)$ และ $(1, 2)$ โดยมีทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริมดังนี้

1. จาก $(0, 0)$ ไปยัง $(1, 2)$
2. จาก $(1, 2)$ ไปยัง $(0, 0)$

ทฤษฎีบท 1. ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบ และ $-C$ เป็นเส้นโค้งที่บรรจุทุกจุดของ C แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ C ถ้า $f(x,y)$ และ $g(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน C แล้ว

$$\int_{-C} f(x,y)dx + g(x,y)dy = - \int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

ตัวอย่าง 2. จงหาค่าของ $\int_C (3x^2 + y^2)dx + 2xydy$ โดยที่ C เป็นส่วนของวงกลมที่กำหนดโดย $x = \cos t$ และ $y = \sin t$ สำหรับทุก $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ โดยมีทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริมในทิศทวนเข็มนาฬิกา

ตัวอย่าง 3. จงหาค่าของ $\int_C (x^2 + y)dx + (x^2 + y)dy$ โดยที่ C เป็นส่วนของพาราโบลา จากจุด $(0,0)$ ไปยัง $(2,4)$

สังเกตว่าในการหาปริพันธ์ตามเส้นนั้น เส้นโค้ง C ต้องเป็นเส้นโค้งปรับเรียบ อย่างไรก็ตาม ถ้า C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงที่สามารถแบ่งออกเป็นช่วงย่อย C_1, C_2, \dots, C_n ที่เป็นเส้นโค้งปรับเรียบและจุดเริ่มต้นของ C_{i+1} เป็นจุดปลายของ C_i สำหรับทุก $i = 1, \dots, n-1$ เรานิยามปริพันธ์ตามเส้นบนเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงนี้ได้เป็น

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \dots + \int_{C_n}$$

ตัวอย่าง 4. จงหาค่าของ $\int_C x^2 y dx + x dy$ โดยที่ C เป็นเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจากจุด $(0,0)$ ไปยัง $(1,0)$ ต่อไปยัง $(1,2)$ และกลับไปยังจุด $(0,0)$

แบบฝึกหัด 1 (ส่งภายในวันจันทร์ ที่ 2 พฤศจิกายน 2563 โดยส่งเมลล์มาที่ nimitni@kku.ac.th).
จงหาค่าของ $\int_C y^2 dx + x dy$ โดยที่ C เป็นเส้นโค้งที่ประกอบด้วยส่วนบนของวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ จากจุด $(1,0)$ ไปยัง $(-1,0)$ และส่วนของเส้นตรงจาก $(-1,0)$ ไปยัง $(-2,3)$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง 5. จงหาค่าของ $\int_C (x+y)^2 dx + (x-y)^2 dy$ โดยที่ C เป็นเส้นโค้งที่กำหนดโดยฟังก์ชัน $y = |2x|$ จากจุด $(-1,2)$ ไปยัง $(1,2)$