Calculus for Engineering III	SC402202

Lecture 21 Line Integrals 2

Chapter 4 Vector Calculus

[1]

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาสมบัติของปริพันธ์ตามเส้นของฟังก์ชันในปริภูมิ 2 มิติเพิ่มเติม ปริพันธ์ตามเส้นในปริภูมิ 3 มิติ และการประยุกต์ใช้ปริพันธ์ตามเส้นดังนี้

ทฤษฎีบท 1. *ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ สำหรับทุก $t \in [a,b]$ ถ้าเส้นโค้ง C สามารถกำหนดได้โดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\tilde{\mathbf{r}}(t)$ สำหรับทุก $t \in [c,d]$ ด้วยและทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริมคงเดิม แล้วปริพันธ์ตามเส้นบน C ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ และ $\tilde{\mathbf{r}}(t)$ เท่ากัน*

ตัวอย่าง 1. จงหาค่าของ $\int_C xydx + (x^2+y^2)dy$ โดยที่ C เป็นเส้นโค้งที่กำหนดดังนี้

1. $x = \cos(2t), y = \sin(2t)$ สำหรับทุก $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
2. $x = \cos(t^2), y = \sin(t^2)$ สำหรับทุก $t \in \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$
3. $x = \cos(-t), y = \sin(t)$ สำหรับทุก $t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
4. $x = t, y = \sqrt{1-t^2}$ สำหรับทุก $t \in [0,1]$

---

[1] **ABD12** : Section 15.2 : 1(b), 2(b), 7-10, 11(b,c), 12(b,c,d), 13, 14, 17, 23-30, 33-34, 35-36, 37-40, 41, 42, 43, 44, 45-48, 49-50, 54, 56

บทนิยาม 1. ให้ D เป็นเซตของจุดในปริภูมิ 2 มิติ **สนามเวกเตอร์** (vector field) บนปริภูมิ คือ ฟังก์ชัน $\mathbf{F}$ ที่ส่งแต่ละจุดใน D เป็นเวกเตอร์ $\mathbf{F}(x,y)$ เพียงค่าเดียวเท่านั้น

เนื่องจาก $\mathbf{F}(x,y)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของตัวแปร x และ y นั่นคือ จะมีฟังก์ชันส่วนประกอบ $f(x,y)$ และ $g(x,y)$ ที่ทำให้

$$\mathbf{F}(x,y) = f(x,y)\mathbf{i} + g(x,y)\mathbf{j}$$

พิจารณาเวกเตอร์ตำแหน่ง $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ จะได้ $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (f(x,y)\mathbf{i} + g(x,y)\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) \\
&= \int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy
\end{aligned}$$

บทนิยาม 2. ให้ $\mathbf{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์ที่มีความต่อเนื่อง และ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ **ปริพันธ์ตามเส้นของ $\mathbf{F}$ บน C** (line integral of $\mathbf{F}$ along C) กำหนดโดย

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

สังเกตว่า ถ้า C เป็นเส้นโค้งที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ สำหรับทุก $t \in [a,b]$ จะได้ $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = f(x(t),y(t))\mathbf{i} + g(x(t),y(t))\mathbf{j}$

นั่นคือ

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt$$

ตัวอย่าง 2. จงหาค่าของ $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ โดยที่ $\mathbf{F}(x,y) = \cos x\mathbf{i} + \sin x\mathbf{j}$ และ C เป็นเส้นโค้งที่กำหนดดังนี้ดังนี้

1. $C : \mathbf{r}(t) = -\frac{\pi}{2}\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ $(1 \le t \le 2)$
2. $C : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ $(-1 \le t \le 2)$

ปริพันธ์ตามเส้นมีการประยุกต์ใช้ที่สำคัญในเรื่อง งาน ที่เกิดจากการใช้แรง $\mathbf{F}$ ทำให้อนุภาคเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง

บทนิยาม 3. ให้ $\mathbf{F}$ เป็นสนามเวกเตอร์แรงที่มีความต่อเนื่องซึ่งใช้ในการเคลื่อนที่อนุภาคตามเส้นโค้งปรับเรียบ C ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ และมีทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริมเป็นทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค **งาน** (work) ที่เกิดจากสนามเวกเตอร์แรงที่กระทำต่ออนุภาค กำหนดโดย

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

ทั้งนี้ ที่มาของบทนิยามข้างต้นนี้ นักศึกษาสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก Anton et al. (2012) หน้า 1105 - 1106

ตัวอย่าง 3. จงหางานที่เกิดจากเคลื่อนที่ของอนุภาคซึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง $y = x^2$ จากจุด $(-1,1)$ ไปยัง $(2,4)$ ในสนามแรง $\mathbf{F}(x,y) = x^3y\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j}$

ปริพันธ์ตามเส้นสามารถอธิบายเรื่องงานในปริภูมิ 3 มิติได้เช่นกัน โดยจะเกี่ยวข้องกับปริพันธ์ตามเส้นในปริภูมิ 3 มิติดังนี้

บทนิยาม 4. ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบในปริภูมิ 3 มิติที่กำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad \text{และ } z = z(t) \qquad \text{สำหรับทุก} \qquad t \in [a,b]$$

และให้ $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ และ $h(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน C

ปริพันธ์ตามเส้น (line integral) ของ f บน C เทียบ x กำหนดโดย

$$\int_C f(x,y,z)dx = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt$$

ปริพันธ์ตามเส้น (line integral) ของ g บน C เทียบ y กำหนดโดย

$$\int_C g(x,y,z)dy = \int_a^b g(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt$$

และ**ปริพันธ์ตามเส้น (line integral) ของ h บน C เทียบ z** กำหนดโดย

$$\int_C h(x,y,z)dz = \int_a^b h(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt$$

โดยทั่วไปแล้ว ถ้าต้องการคำนวณปริพันธ์ตามเส้นเทียบ x,y และ z พร้อมกัน เราจะเขียนแทนด้วย

$$\int_C f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz := \int_C f(x,y,z)dx + \int_C g(x,y,z)dy + \int_C h(x,y,z)dz$$

ตัวอย่าง 4. จงหางานที่เกิดจากเคลื่อนที่ของอนุภาคซึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้ง $t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ จากจุด $(0,0,0)$ ไปยัง $(1,1,1)$ ในสนามแรง

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k}$$