Calculus for Engineering III	SC402202

Lecture 23 Green's Theorem

Chapter 4 Vector Calculus

[1] ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาทฤษฎีบทที่ช่วยให้การคำนวณปริพันธ์ตามเส้นสะดวกขึ้นโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับปริพันธ์สองชั้นดังนี้

ทฤษฎีบท 1 (ทฤษฎีบทของกรีน (Green's Theorem))**.** *ให้ R เป็นบริเวณที่เป็นเซตเชื่อมโยง (simply connected set) ที่มีขอบเขตเป็นเส้นโค้ง C ที่เป็นเส้นโค้งอย่างง่าย (simple) ปิด (closed) ปรับเรียบเป็นช่วง (piecewise smooth) และมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา (counterclockwise)*

ถ้าฟังก์ชัน $f(x,y)$ และ $g(x,y)$ และอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งที่เกี่ยวข้อง เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณเปิดที่บรรจุ R แล้ว ปริพันธ์ตามเส้น

$$\int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA$$

เนื่องจากเส้นโค้ง C ที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทของกรีนต้องเป็นเส้นโค้งปิด เราอาจใช้สัญลักษณ์ $\oint$ แทน $\int$ เพื่อระบุสมบัติเฉพาะนี้ได้

ตัวอย่าง 1. จงประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของกรีนเพื่อหาค่าของ

$$\oint_C x^2 y dx + x dy$$

โดยที่ C เป็นวิถีรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีจุดยอดเป็น $(0,0)$, $(1,0)$ และ $(1,2)$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

[1] **ABD12** : Section 15.4 : 1-2, 3-13, 14, 15-18, 20, 21, 23, 24, 26, 29-30, 31, 32, 33-36

ตัวอย่าง 2. จงประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของกรีนเพื่อหาค่าของ

$$\oint_C (e^{x^2} - y)dx + (x + \sin\sqrt{y})dy$$

โดยที่ C เป็นวิถีในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาที่ประกอบด้วยเส้นรอบครึ่งวงกลมรัศมี 2 หน่วยเหนือแกน x และส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(-2,0)$ กับ $(2,0)$

ตัวอย่าง 3. จงหางานที่เกิดจากเคลื่อนที่ของอนุภาคจากจุด $(1,1)$ ไปยัง $(4,2)$ ตามเส้นโค้ง $y=\sqrt{x}$ จากนั้นเคลื่อนที่ตามแนวเส้นตรงไปยังจุด $(1,2)$ และเคลื่อนที่ตามแนวเส้นตรงกลับมาที่จุด $(1,2)$ ในสนามแรง $\mathbf{F}(x,y)=2x\sin y\mathbf{i}+(x^2\cos y-3y^2)\mathbf{j}$

ในอีกด้านหนึ่ง การประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของกรีน เราสามารถใช้ปริพันธ์ตามเส้นคำนวณหาพื้นที่ A ของบริเวณ R ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขในทฤษฎีบทของกรีนได้โดย

$$\begin{aligned} A &= \oint_C x dy \\ &= \oint_C (-y) dx \\ &= \frac{1}{2}(-y) dx + x dy \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4. จงใช้ปริพันธ์ตามเส้นคำนวณหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยวงรี

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ตัวอย่าง 5. จงใช้ปริพันธ์ตามเส้นคำนวณหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีจุดยอดเป็น $(0,0)$, $(a,0)$ และ $(0,b)$ โดยที่ $a,b>0$