Calculus for Engineering III	SC402202

Lecture 23 Surface Integrals

Chapter 4 Vector Calculus

[1] ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาปริพันธ์ของฟังก์ชันบนพื้นผิวปรับเรียบ (smooth surface) ในปริภูมิ 3 มิติ ซึ่งแนวคิดพื้นฐานของปริพันธ์ในลักษณะนี้เกิดจากความต้องการหามวล (mass) ของแผ่นบางโค้ง (curved lamina) ที่มีการกำหนดความหนาแน่นเป็นฟังก์ชันความหนาแน่น (density function)

แผ่นบางโค้ง คือวัตถุในอุดมคติที่มีความบาง (thin) จนสามารถมองเป็นพื้นผิวในปริภูมิ 3 มิติได้ ทั้งนี้ แผ่นบางโค้งอาจอยู่ในรูปของแผ่นงอ ดัง Figure 1 หรืออาจมีลักษณะเป็นพื้นผิวที่ปิดล้อมบริเวณในปริภูมิ 3 มิติ เช่น เปลือกไข่ เป็นต้น

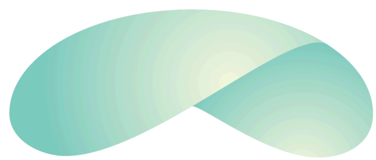

Figure 1: แผ่นบางโค้ง. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1130)

สมมติให้แผ่นบางโค้ง σ เป็นพื้นผิวปรับเรียบในปริภูมิ 3 มิติ และกำหนดให้ (x,y,z) เป็นจุดใด ๆ บน σ สมมติให้ $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่น ณ จุด (x,y,z) เราสามารถประมาณค่ามวล M ของแผ่นบางโค้ง σ ได้ดังนี้

ในลำดับแรก เราจะแบ่งแผ่นบางโค้ง σ ออกเป็นแผ่นบางโค้งขนาดเล็ก $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ที่มีพื้นที่เป็น $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ ตามลำดับ ดัง Figure 2

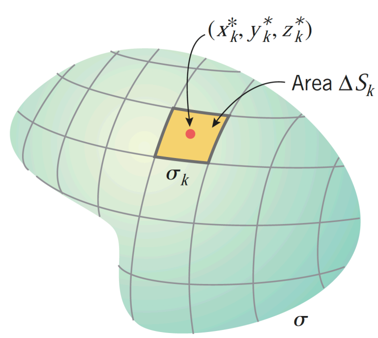

Figure 2: แผ่นบางโค้งขนาดเล็ก σ_k. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1130)

[1]**ABD12** : Section 15.5 : 1-8, 9-12, 20, 23-24, 27-28, 29, 30, 31, 32, 33-34, 35-38

สำหรับแต่ละแผ่นบางโค้งขนาดเล็ก σ_k กำหนดให้ (x_k^*, y_k^*, z_k^*) เป็นจุดบนแผ่นบางโค้งขนาดเล็ก σ_k ที่มีมวล ณ จุดดังกล่าวนี้เป็น ΔM_k

สังเกตว่า ถ้าแผ่นบางโค้งขนาดเล็ก σ_k มีขนาดเล็กมาก ๆ จะพบว่าค่าของฟังก์ชัน f ณ ทุกจุดบน σ_k สามารถประมาณค่าได้ด้วย $f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$ นั่นคือ มวลของ σ_k จึงสามารถประมาณได้โดย

$$\Delta M_k \approx f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$$

ส่งผลให้มวลของแผ่นบางโค้ง σ สามารถประมาณได้โดย

$$M = \sum_{k=1}^{n} \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$$

เมื่อเราแบ่งแผ่นบางโค้ง σ ให้เป็นแผ่นบางโค้งขนาดเล็กเป็นจำนวนมากขึ้นเรื่อย ๆ จนขนาดของแต่ละแผ่นบางโค้งขนาดเล็กนั้นเข้าใกล้ศูนย์ จะได้มวลของแผ่นบางโค้ง σ คือ

$$M = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$$

ซึ่งได้ในกรณีทั่วไปสามารถกำหนดเป็นบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1. ให้ σ เป็นพื้นผิวปรับเรียบในปริภูมิ 3 มิติ และ $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน σ **ปริพันธ์ตามผิว** (surface integral) ของ $f(x,y,z)$ บน σ กำหนดโดย

$$\iint_\sigma f(x,y,z)dS = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta S_k$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้

นั่นคือ ถ้า σ เป็นแผ่นบางโค้งปรับเรียบ และ $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของแผ่นบางโค้งที่ต่อเนื่องบน σ ทวลของแผ่นบางโค้ง σ คือ

$$M = \iint_\sigma f(x,y,z)dS$$

ทั้งนี้ เราสามารถคำนวณปริพันธ์ตามผิวได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1. *ให้ σ เป็นพื้นผิวปรับเรียบในปริภูมิ 3 มิติ และ $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน σ*

1. *พื้นผิว σ กำหนดโดย $z = g(x,y)$ และ R เป็นภาพฉายของ σ ไปยังระนาบ xy ถ้าอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน R แล้ว*

$$\iint_\sigma f(x,y,z)dS = \iint_R f(x,y,g(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}dA$$

2. *พื้นผิว* σ *กำหนดโดย* $y = g(x,z)$ *และ* R *เป็นภาพฉายของ* σ *ไปยังระนาบ* xz *ถ้าอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ* g *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน* R *แล้ว*

$$\iint_\sigma f(x,y,z)dS = \iint_R f(x,g(x,z),z)\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}dA$$

3. *พื้นผิว* σ *กำหนดโดย* $x = g(y,z)$ *และ* R *เป็นภาพฉายของ* σ *ไปยังระนาบ* yz *ถ้าอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ* g *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน* R *แล้ว*

$$\iint_\sigma f(x,y,z)dS = \iint_R f(g(x,z),y,z)\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}dA$$

ตัวอย่าง 1. จงหาค่าของ

$$\iint_\sigma xzdS$$

โดยที่ σ เป็นพื้นผิวระนาบ $x+y+z=1$ ในอัฐภาคที่ 1 โดยที่

1. R เป็นภาพฉายของ σ ไปยังระนาบ xy
2. R เป็นภาพฉายของ σ ไปยังระนาบ xz
3. R เป็นภาพฉายของ σ ไปยังระนาบ yz

แบบฝึกหัด 1. ส่งภายในวันพุธที่ 11 พฤศจิกายน 2563 โดยส่งที่
https://forms.gle/7f6YgkKwwwadj3UC8
จงหาค่าของ

$$\iint_{\sigma} xyz\,dS$$

โดยที่ σ เป็นพื้นผิวระนาบ $2x+3y+4z=12$ ในอัฐภาคที่ 1 โดยที่

1. R เป็นภาพฉายของ σ ไปยังระนาบ xy
2. R เป็นภาพฉายของ σ ไปยังระนาบ xz
3. R เป็นภาพฉายของ σ ไปยังระนาบ yz

ตัวอย่าง 2. ให้ σ เป็นแผ่นบางโค้งที่เป็นส่วนของทรงพาราโบลา $z = x^2 + y^2$ ที่อยู่ใต้ระนาบ $z = 1$ ถ้าแผ่นโค้งนี้มีความหนาแน่นคงตัว δ_0 จงหามวลของแผ่นบางโค้งนี้

ตัวอย่าง 3. ให้ σ เป็นแผ่นบางโค้งที่เป็นส่วนของกรวย $z = \sqrt{x^2+y^2}$ ที่อยู่ใต้ระนาบ $z = 2$ แต่อยู่เหนือระนาบ $z = 1$ ถ้าแผ่นโค้งนี้มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x,y,z) = y^2z^2$ จงหามวลของแผ่นบางโค้งนี้

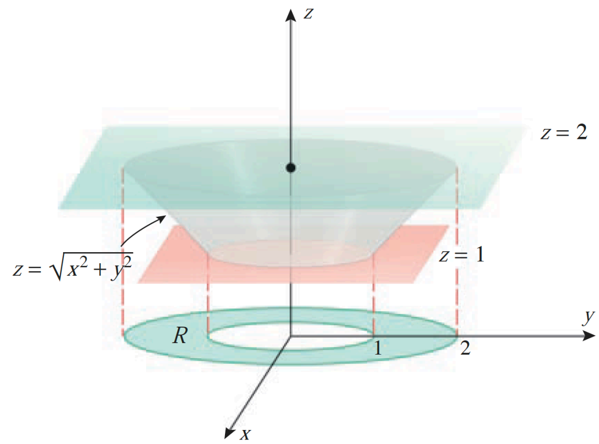

Figure 3: แผ่นบางโค้ง σ. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1134)