Calculus for Engineering III SC402202

Lecture 25 Flux

Chapter 4 Vector Calculus

[1] ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการประยุกต์ใช้ปริพันธ์ตามผิวในการไหล (flow) ของสนามเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ เช่นการไหลของของของเหลว และการไหลของประจุในสนามแม่เหล็กไฟฟ้า เป็นต้น

เนื่องจากจุดมุ่งหมายหลักของเราคือ การศึกษาการไหลของสนามเวกเตอร์ผ่านพื้นผิว ซึ่งพื้นผิวส่วนใหญ่ในปริภูมิ 3 มิติมักเป็นพื้นผิวสองด้าน เช่น ทรงกลม (sphere) จะมีด้านใน (inside) และด้านนอก (outside) หรือระนาบ $z = c$ ในปริภูมิ 3 มิติจะมีด้านบน (top side) และด้านล่าง (bottom side) เสนอ อย่างไรก็ตาม ในทางคณิตศาสตร์ยังมีพื้นผิวที่มีด้านเดียวเท่านั้นด้วย ซึ่งเรารู้จักกันในชื่อ แถบโมบิอุส (Möbius strip)

บทนิยาม 1. ให้ σ เป็นพื้นผิวในปริภูมิ 3 มิติ เราจะกล่าวว่า σ เป็น

1. **พื้นผิวมีทิศทาง** (orientable surface) ถ้า σ เป็นพื้นผิวสองด้าน
2. **พื้นผิวไม่มีทิศทาง** (non-orientable surface) ถ้า σ เป็นพื้นผิวด้านเดียว

ในการประยุกต์ใช้ปริพันธ์ตามผิวนั้น เราจำเป็นต้องระบุทิศทางของพื้นผิวให้ได้ กล่าวคือ สมมติให้ σ เป็นพื้นผิวมีทิศทางที่แต่ละจุดบน σ เราสามารถหาเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วย (unit normal vector) $\mathbf{n}$ ได้เสมอ และเราจะกำหนดทิศทางของเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยนี้เป็น**ทิศทางของพื้นผิว** (orientation of the surface) σ

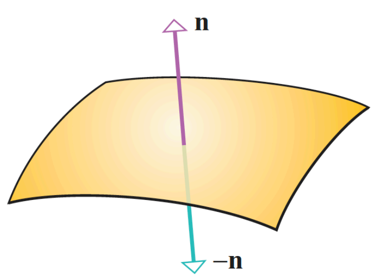


Figure 1: เวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วย. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1139)

ตัวอย่างเช่น พิจารณาเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยใน Figure 1 จะพบว่า เวกเตอร์ $\mathbf{n}$ และเวกเตอร์ $-\mathbf{n}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกัน และในที่นี้เราจะ

[1] **ABD12** : Section 15.6 : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9-16, 17-20, 21, 22, 23-26, 27-28, 29, 30, 31, 32, 33

เรียกเวกเตอร์ $\mathbf{n}$ นี้ว่า**เวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยด้านบน** (upward unit normal vector) และเราจะเรียกเวกเตอร์ $-\mathbf{n}$ นี้ว่า**เวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยด้านล่าง** (downward unit normal vector) นอกจากนี้ เราจะกล่าวว่าเวกเตอร์ $\mathbf{n}$ ชี้ในทิศทางบวก (positive direction) จากพื้นผิว ในทำนองเดียวกัน เราจะกล่าวว่าเวกเตอร์ $-\mathbf{n}$ ชี้ในทิศทางลบ (negative direction) จากพื้นผิว

ทั้งนี้ สำหรับพื้นผิวมีทิศทางปรับเรียบ σ ใด ๆ เราสามารถหาทิศทางของเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยที่แต่ละจุดบน σ ได้เสมอ นอกจากนี้ สำหรับพื้นผิวมีทิศทางปรับเรียบใด ๆ เราสามารถหาทิศทางของเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยได้เพียงสองทิศทางเท่านั้น คือ $\mathbf{n}$ และ $-\mathbf{n}$ ดัง Figure 2

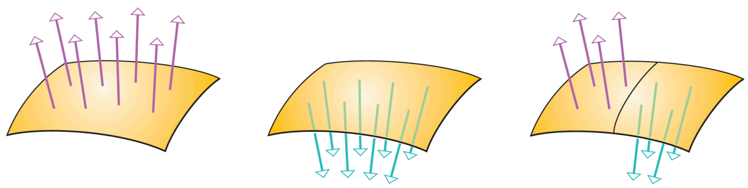


Figure 2: เวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วย. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1139)

สมมติว่าพื้นผิวมีทิศทางปรับเรียบ σ สามารถเขียนในรูปของฟังก์ชัน $z = g(x,y), y = g(x,z)$ หรือ $x = g(y,z)$ ได้ เราสามารถคำนวณเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วย $\mathbf{n}$ หรือ $\mathbf{n}$ ณ แต่ละจุด (x,y,z) บน σ ได้ดังตารางใน Figure 3

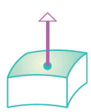
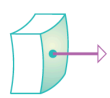
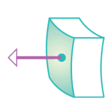
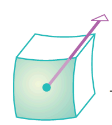
$z = g(x, y)$	$y = g(z, x)$	$x = g(y, z)$
 $\mathbf{n} = \dfrac{-\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$ Positive **k**-component Positive orientation	 $\mathbf{n} = \dfrac{-\frac{\partial y}{\partial x}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{\partial y}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}}$ Positive **j**-component Positive orientation	 $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{i} - \frac{\partial x}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial x}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}}$ Positive **i**-component Positive orientation
 $-\mathbf{n} = \dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$ Negative **k**-component Negative orientation	 $-\mathbf{n} = \dfrac{\frac{\partial y}{\partial x}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{\partial y}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}}$ Negative **j**-component Negative orientation	 $-\mathbf{n} = \dfrac{-\mathbf{i} + \frac{\partial x}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial x}{\partial z}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1}}$ Negative **i**-component Negative orientation

Figure 3: สูตรการคำนวณเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วย. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1144)

ตัวอย่าง 1. จงหาเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยในทิศทางบวกและทิศทางลบของพื้นผิวระนาบต่อไปนี้

1. $z = 1$
2. $y = 2$
3. $x = 3$
4. $x + 2y + 3z = 6$

ในทางฟิสิกส์ เราจะใช้คำว่า **ของไหล** (fluid) แทนทั้งของเหลว (liquid) และก๊าซ (gas) สังเกตว่าของเหลวจะมีลักษณะบีบอัดไม่ได้ (incompressible) กล่าวคือ เราไม่สามารถเปลี่ยนความหนาแน่นของของไหลได้ด้วยการบีบอัด อย่างไรก็ตาม ก๊าซมีลักษณะบีบอัดได้ (compressible) กล่าวคือ ความหนาแน่นของก๊าซจะเปลี่ยนถ้าเราเปลี่ยน (เพิ่ม/ลด) การบีบอัดในแต่ละจุดนั่นเอง ซึ่งในหัวข้อนี้ เราจะให้ความสนใจเฉพาะของไหลที่มีลักษณะบีบอัดไม่ได้เท่านั้น และเราจะสมมติว่าความเร็วของของไหล ณ แต่ละจุดไม่เปลี่ยนไปตามเวลา โดยเราจะเรียกสมบัตินี้ว่า **สถานะคงตัว** (steady state)

ทบทวนอีกครั้ง ในหัวข้อนี้ เราต้องการศึกษาสมบัติทางฟิสิกส์ที่เรียกว่า **ฟลักซ์** (flux) สำหรับคำว่าฟลักซ์มีที่มาจากภาษาละตินที่ว่า fluxus ซึ่งหมายความว่าของไหล (flowing) และเพื่อที่จะทำความเข้าใจฟลักซ์ ให้เราลองจินตนาการการไหลของของไหลที่บีบอัดไม่ได้และในสถานะคงตัว ถ้าของไหลนี้ไหลอย่างอิสระผ่านพื้นผิวที่ไหลผ่านได้ (permable surface) จากด้านหนึ่งของพื้นผิวไปยังอีกด้านหนึ่งของพื้นผิว ฟลักซ์ คือ ปริมาตรของของไหลที่ไหลผ่านพื้นผิวในหนึ่งหน่วยเวลา ดัง Figure 4

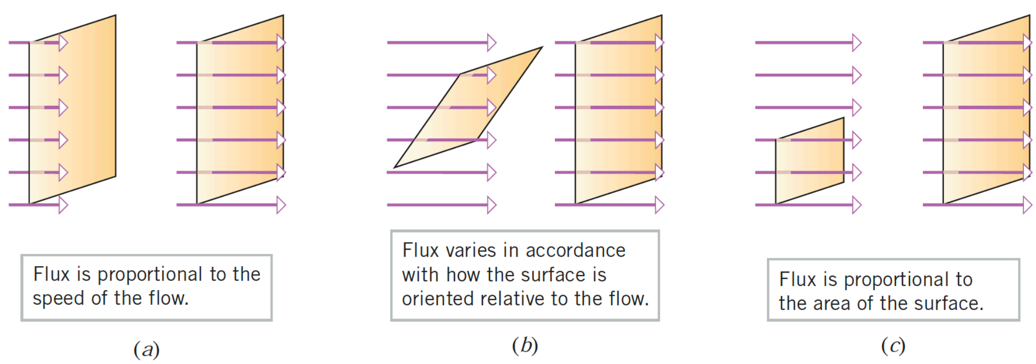


Figure 4: ฟลักซ์. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1141)

หมายเหตุ 1. จาก Figure 4 ข้างต้นนี้ จะพบว่าปริมาตรของของไหลที่ไหลผ่านพื้นผิวในหนึ่งหน่วยเวลามีสมบัติดังนี้

1. ของไหลที่มีความเร็วมากกว่า จะมีปริมาตรของของไหลที่ผ่านพื้นผิวมากกว่า
2. ทิศทางการไหลของของไหลที่ทำมุมใกล้มุมฉากกับพื้นผิวมากกว่า จะมีปริมาตรของของไหลที่ไหลผ่านพื้นผิวมากกว่า
3. พื้นผิวที่มีขนาดใหญ่กว่า จะมีปริมาตรของของไหลที่ไหลผ่านพื้นผิวมากกว่า

บทนิยาม 2. ให้ σ เป็นพื้นผิวมีทิศทาง และของไหลมีความเร็ว ณ จุด (x,y,z) บนพื้นผิว σ เป็นสนามเวกเตอร์

$$\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$$

ให้ $\mathbf{n}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยที่ชี้ในทิศทางบวกของพื้นผิว σ

ปริมาตรของของไหลที่ไหลผ่านพื้นผิว σ ในทิศทางของ $\mathbf{n}$ ในหนึ่งหน่วยเวลาเขียนแทนด้วย Φ และกำหนดโดย

$$\Phi = \iint_{\sigma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$

ซึ่งเราจะเรียก Φ ว่า **ฟลักซ์ของ $\mathbf{F}$ ที่ผ่าน σ** (flux of $\mathbf{F}$ across σ) และเรียกปริพันธ์นี้ว่า **ปริพันธ์ฟลักซ์** (flux integral)

หมายเหตุ 2. จากบทนิยามข้างต้น จะได้สมบัติฟลักซ์ดังนี้

1. ฟลักซ์มีค่าเป็นบวก หมายความว่า ในหนึ่งหน่วยเวลา ปริมาตรของของไหลที่ไหลผ่าน σ ในทิศทางบวกมีมากกว่าในทิศทางลบ
2. ฟลักซ์มีค่าเป็นลบ หมายความว่า ในหนึ่งหน่วยเวลา ปริมาตรของของไหลที่ไหลผ่าน σ ในทิศทางบวกมีน้อยกว่าในทิศทางลบ
3. ฟลักซ์มีค่าเป็นศูนย์ หมายความว่า ในหนึ่งหน่วยเวลา ปริมาตรของของไหลที่ไหลผ่าน σ ในทิศทางบวกมีเท่ากับในทิศทางลบ

จากการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของปริพันธ์ตามผิวใน Lecture 24 Surface Integrals จะได้ทฤษฎีบทการหาฟลักซ์ดังนี้

ทฤษฎีบท 1. *ให้ σ เป็นพื้นผิวมีทิศทางปรับเรียบในปริภูมิ 3 มิติ และ $\mathbf{F}(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่มีความต่อเนื่องบน σ*

1. *พื้นผิว σ กำหนดโดย $z = g(x,y)$ และ R เป็นภาพฉายของ σ ไปยังระนาบ xy และกำหนดให้ฟังก์ชัน $G(x,y,z) := z - g(x,y)$ จะได้ว่า*

   ถ้า σ มีทิศทางบวก (ส.ป.ส. หน้า $\mathbf{k}$ เป็นบวก) แล้ว

   $$\iint_{\sigma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_{R} \mathbf{F}\cdot\nabla G dA$$

   ถ้า σ มีทิศทางลบ (ส.ป.ส. หน้า $\mathbf{k}$ เป็นลบ) แล้ว

   $$\iint_{\sigma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_{R} \mathbf{F}\cdot(-\nabla G)dA$$

2. *พื้นผิว* $\boldsymbol{\sigma}$ *กำหนดโดย* $y = g(x,z)$ *และ* R *เป็นภาพฉายของ* $\boldsymbol{\sigma}$ *ไปยังระนาบ* xz *และกำหนดให้ฟังก์ชัน* $G(x,y,z) := y - g(x,z)$ *จะได้ว่า*

   ถ้า $\boldsymbol{\sigma}$ *มีทิศทางบวก (ส.ป.ส. หน้า* $\mathbf{j}$ *เป็นบวก) แล้ว*

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_R \mathbf{F}\cdot\nabla G dA$$

   ถ้า $\boldsymbol{\sigma}$ *มีทิศทางลบ (ส.ป.ส. หน้า* $\mathbf{j}$ *เป็นลบ) แล้ว*

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_R \mathbf{F}\cdot(-\nabla G)dA$$

3. *พื้นผิว* $\boldsymbol{\sigma}$ *กำหนดโดย* $x = g(y,z)$ *และ* R *เป็นภาพฉายของ* $\boldsymbol{\sigma}$ *ไปยังระนาบ* yz *และกำหนดให้ฟังก์ชัน* $G(x,y,z) := x - g(y,z)$ *จะได้ว่า*

   ถ้า $\boldsymbol{\sigma}$ *มีทิศทางบวก (ส.ป.ส. หน้า* $\mathbf{i}$ *เป็นบวก) แล้ว*

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_R \mathbf{F}\cdot\nabla G dA$$

   ถ้า $\boldsymbol{\sigma}$ *มีทิศทางลบ (ส.ป.ส. หน้า* $\mathbf{i}$ *เป็นลบ) แล้ว*

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iint_R \mathbf{F}\cdot(-\nabla G)dA$$

ตัวอย่าง 2. จงหาค่าฟลักซ์

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS$$

ของ $\mathbf{F}(x,y,z) = 5z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$ ที่ผ่านพื้นผิว $\boldsymbol{\sigma}$ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $\{(x,y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3\}$ บนระนาบ $z = 1$ โดยกำหนดทิศทางของ $\boldsymbol{\sigma}$ ดังนี้

1. เวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยด้านบน
2. เวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยด้านล่าง

แบบฝึกหัด 1. ส่งที่ https://forms.gle/ETXTGmtVrSvixskUA
จงหาค่าฟลักซ์

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

ของ $\mathbf{F}(x,y,z) = xy\mathbf{i} + z\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$ ที่ผ่านพื้นผิว σ ที่เป็นส่วนของระนาบ $x+y+z=1$ ในอัฐภาคที่ 1 โดยกำหนดทิศทางของ σ ตามทิศทางของเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยด้านบน

ตัวอย่าง 3. จงหาค่าฟลักซ์

$$\iint_\sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

ของ $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ที่ผ่านพื้นผิว σ ที่เป็นส่วนของพื้นผิว $z = 1 - x^2 - y^2$ บนระนาบ xy โดยกำหนดทิศทางของ σ ตามทิศทางของเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยด้านบน

ตัวอย่าง 4. กำหนดให้ σ เป็นพื้นผิวลูกบาศก์และมีทิศทางออกดัง Figure 5

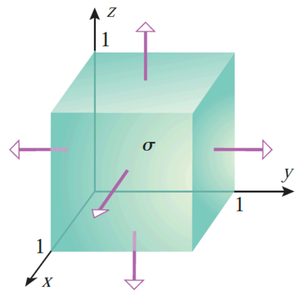


Figure 5: ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1141)

จงหาค่าฟลักซ์

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

ของ $\mathbf{F}(x,y,z) = z\mathbf{j}$ ที่ผ่านส่วนของพื้นผิว σ ดังนี้

1. ระนาบ $x = 1$
2. ระนาบ $x = 0$
3. ระนาบ $y = 1$
4. ระนาบ $y = 0$
5. ระนาบ $z = 1$
6. ระนาบ $z = 0$