

Lecture 26 The Divergence Theorem and Stokes' Theorem

Chapter 4 Vector Calculus

¹ ในส่วนแรกนี้ เราจะศึกษาทฤษฎีบทที่ช่วยในการคำนวณฟลักซ์ที่ผ่านออกจากพื้นผิวซึ่งปิดล้อมบริเวณในปริภูมิ 3 มิติ ซึ่งเรารู้จักกันในชื่อทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ จากนั้นเราจะศึกษาทฤษฎีบทที่ช่วยในการคำนวณหางานที่เกิดจากการเคลื่อนที่อนุภาคตามเส้นโค้งในปริภูมิ 3 มิติภายใต้สนามแรงที่กำหนดให้ ซึ่งเรารู้จักกันในชื่อทฤษฎีบทของสโตกส์

บทนิยาม 1. ให้ $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ

1. **ตัวดำเนินการไดเวอร์เจนซ์** (Divergence operator) ของ \mathbf{F} เขียนแทนด้วย $\text{div}\mathbf{F}$ และกำหนดโดย

$$\text{div}\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

2. **ตัวดำเนินการเคิร์ล** (Curl operator) ของ \mathbf{F} เขียนแทนด้วย $\text{curl}\mathbf{F}$ และกำหนดโดย

$$\text{curl}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

หมายเหตุ 1. 1. เราสามารถจำตัวดำเนินการเคิร์ลได้ดังนี้

$$\text{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

2. ตัวดำเนินการไดเวอร์เจนซ์จะเกี่ยวข้องกับการไหลของของไหลซึ่งไหลออกจากจุดหนึ่ง ๆ ในปริภูมิ 3 มิติ ส่วนตัวดำเนินการเคิร์ลจะเกี่ยวข้องกับการหมุนของของไหลรอบจุดหนึ่ง ๆ ในปริภูมิ 3 มิติ

¹ABD12 : Section 15.7 : 1-4, 5-7, 9-19, 20, 21, 22,
Section 15.8 : 1-4, 5-12, 13-16, 17

ตัวอย่าง 1. จงหาตัวดำเนินการไดเวอร์เจนซ์และตัวดำเนินการเคิร์ลของสนามเวกเตอร์

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\mathbf{i} + 2y^3z\mathbf{j} + 3zk\mathbf{k}$$

ทฤษฎีบท 1 (ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์/ ทฤษฎีบทของเกาส์). ให้ G เป็นทรงตันที่มีพื้นผิวเป็น σ ซึ่งมีทิศทางด้านนอก ถ้าฟังก์ชันส่วนประกอบของ

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตเปิดที่บรรจุ σ แล้ว

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$

หมายเหตุ 2. จากทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์จะได้ว่าฟลักซ์ของสนามเวกเตอร์ที่ไหลออกจากพื้นผิวปิดหาได้จากปริพันธ์สามชั้นของตัวดำเนินการไดเวอร์เจนซ์บนทรงตันซึ่งถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิวปิดนั้น ๆ นั่นเอง

ตัวอย่าง 2. กำหนดให้ σ เป็นพื้นผิวลูกบาศก์และมีทิศทางออกดัง Figure 1

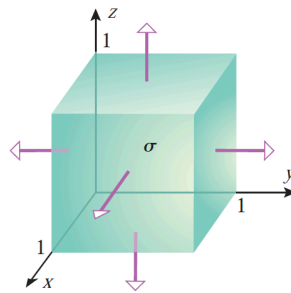


Figure 1: ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1141)

จงใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์หาค่าฟลักซ์

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

ของสนามแรง $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ที่ผ่านออกจากพื้นผิว σ

ตัวอย่าง 3. กำหนดให้ $a > 0$ จงใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์หาค่าฟลักซ์ด้านนอก

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

ของสนามเวกเตอร์ $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} + 5z\mathbf{k}$ ที่ผ่านพื้นผิวของบริเวณ G ที่ปิดล้อมด้วย
ครึ่งวงกลม $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ และระนาบ $z = 0$

ตัวอย่าง 4. จงใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์หาค่าฟลักซ์ด้านนอก

$$\iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

ของสนามเวกเตอร์ $\mathbf{F}(x, y, z) = (5x^3 + 12xy^2)\mathbf{i} + (y^3 + e^y \sin z)\mathbf{j} + (5z^3 + e^y \cos z)\mathbf{k}$ ที่ผ่าน
พื้นผิวของบริเวณ G ที่ปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ และ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ เหนือ
ระนาบ $z = 0$

ในลำดับต่อไปนี้จะศึกษาทฤษฎีบทซึ่งเป็นกรณีทั่วไปของทฤษฎีบทของกรีนในบริบทของปริภูมิ 3 มิติซึ่งเกี่ยวข้องกับการหมุนของของไหลดังนี้

ให้ σ เป็นพื้นผิวมีทิศทางซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง C ที่เป็นเส้นโค้งอย่างง่ายและปิด ดัง Figure 2 (a)

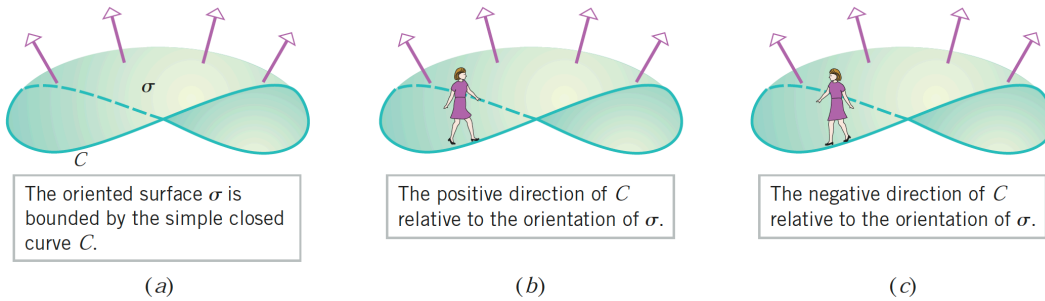


Figure 2: ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1159)

เราจะพบความสัมพันธ์ของ σ และ C ได้เป็น 2 ลักษณะดังนี้

สมมติให้ น.ส.เอ เดินไปตามเส้นโค้ง C โดยที่ศีรษะของเธออยู่ในทิศทางเดียวกับทิศทางของ σ เราจะกล่าวว่า น.ส.เอเดินไปใน

1. **ทิศทางบวก** (positive orientation) ของ σ ถ้าพื้นผิว σ อยู่ด้านซ้ายมือของน.ส.เอ ดัง Figure 2 (b)
2. **ทิศทางลบ** (negative orientation) ของ σ ถ้าพื้นผิว σ อยู่ด้านขวามือของน.ส.เอ ดัง Figure 2 (c)

ทฤษฎีบท 2 (ทฤษฎีบทของสโตกส์). ให้ σ เป็นพื้นผิวในปริภูมิ 3 มิติที่มีทิศทางและปรับเรียบเป็นช่วง และมีขอบเป็นเส้นโค้ง C ที่เป็นเส้นโค้งอย่างง่าย ปิด ปรับเรียบเป็นช่วง และมีทิศทางบวก ถ้าฟังก์ชันส่วนประกอบของ

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตเปิดที่บรรจุ σ แล้ว งานที่เกิดจากการเคลื่อนที่อนุภาคไปตามเส้นโค้ง C ภายใต้สนามแรง \mathbf{F} คือ

$$\iint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\sigma} (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

หมายเหตุ 3. สังเกตว่าทฤษฎีบทของสโตกส์ช่วยในการคำนวณงานของการเคลื่อนที่รอบเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงในปริภูมิ 3 มิติได้สะดวกขึ้น

ตัวอย่าง 5. กำหนดให้ C เป็นเส้นโค้งที่เป็นขอบเขตของบริเวณซึ่งเป็นส่วนของระนาบ $2x + y + z = 2$ ในอัฐภาคที่ 1 และ $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}$ จงหางาน $\iint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ของการเคลื่อนที่ของอนุภาคตามเส้นโค้ง C ภายใต้สนามแรง \mathbf{F}

ตัวอย่าง 6. จงหา $\iint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ของการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายใต้สนามแรง $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + 4xy^3\mathbf{j} + xy^2\mathbf{k}$ ตามเส้นโค้ง C ที่เป็นขอบเขตของบริเวณซึ่งเป็นส่วนของระนาบ $z = y$ ดัง Figure 3

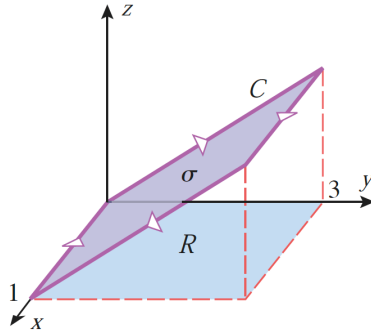


Figure 3: ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1159)