บทที่ 1 เทคนิคของการหาปริพันธ์

1.1 การหาปริพันธ์โดยการจัดรูปของปริพัทธ์เข้าสูตรพื้นฐานของการหาปริพันธ์

1.2 การหาปริพันธ์โดยใช้เทคนิคของการหาปริพันธ์

- 1.2.1 วิธีการแทนค่าหรือเปลี่ยนตัวแปร
  - 1.2.1.1 รูปแบบไม่แน่นอน
  - 1.2.1.2 รูปแบบแน่นอน
    - 1.2.1.2.1 ตรีโกณมิติ
    - 1.2.1.2.2 แทนค่าตรีโกณมิติ
- 1.2.2 วิธีแยกเศษส่วนย่อย
  - 1.2.2.1 ฟังก์ชันตรรกยะของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
  - ~~1.2.2.2 ฟังก์ชันอตรรกยะรูปแบบแน่นอน~~
- 1.2.3 การหาปริพันธ์ทีละส่วน (Integration by part)

1.3 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (Improper Integral)

สูตรการหาอนุพันธ์

กำหนดให้ u และ v เป็นฟังก์ชันซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้ และ c เป็นค่าคงตัว

$\frac{dc}{dx}=0$	$\frac{dx}{dx}=1$
$\frac{d(u\pm v)}{dx}=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}$	$\frac{d(u\cdot v)}{dx}=u\cdot\frac{du}{dx}+v\cdot\frac{dv}{dx}$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot\frac{du}{dx}-v\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}$, $v\neq 0$	$\frac{du^n}{dx}=nu^{n-1}\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(\ln u)}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(\log_a u)}{du}=\frac{1}{u}\cdot\log_a u\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(a^u)}{dx}=a^u\ln a\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(e^u)}{dx}=e^u\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(\sin u)}{dx}=\cos u\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(\cos u)}{dx}=-\sin u\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(\tan u)}{dx}=\sec^2 u\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(\cot u)}{dx}=-\mathrm{cosec}^2 u\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(\sec u)}{dx}=\sec u\tan u\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(\mathrm{cosec}\,u)}{dx}=-\mathrm{cosec}\,u\cot u\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(\arcsin u)}{du}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(\arccos u)}{du}=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(\arctan u)}{du}=\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(\mathrm{arccot}\,u)}{du}=-\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(\mathrm{arcsec}\,u)}{du}=\frac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(\mathrm{arccosec}\,u)}{du}=-\frac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(\sinh u)}{dx}=\cosh u\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(\cosh u)}{dx}=\sinh u\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(\tanh u)}{dx}=\mathrm{sech}^2 u\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(\coth u)}{dx}=-\mathrm{cosech}^2 u\cdot\frac{du}{dx}$
$\frac{d(\mathrm{sech}\,u)}{dx}=-\sec u\tanh u\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d(\mathrm{cosech}\,u)}{dx}=-\mathrm{cosech}\,u\cot u\cdot\frac{du}{dx}$

สูตรพื้นฐานของการหาปริพันธ์

กำหนดให้ c เป็นค่าคงตัวของการหาปริพันธ์

F1. $\int 0\,dx = c$

F2. $\int 1\,dx = x + c \Rightarrow \int k\,dx = kx + c$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

F3. $\int x^{n}dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$

F4. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

F5. $\int a^{u}du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1$

F6. $\int e^{u}du = e^{u} + c$

F7. $\int \sin u\,du = -\cos u + c \quad \Rightarrow \int \sin(ax)dx = \dfrac{-\cos(ax)}{a} + c, a \neq 0$

F8. $\int \cos u\,du = \sin u + c \quad \Rightarrow \int \cos(ax)dx = \dfrac{\sin(ax)}{a} + c, a \neq 0$

F9. $\int \sec^{2} u\,du = \tan u + c \quad \Rightarrow \int \sec^{2}(ax)dx = \dfrac{\tan(ax)}{a} + c, a \neq 0$

F10. $\int \csc^{2} u\,du = -\cot u + c \quad \Rightarrow \int \csc^{2}(ax)dx = \dfrac{-\cot(ax)}{a} + c, a \neq 0$

F11. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + c \quad \Rightarrow \int \sec(ax)\tan(ax)dx = \dfrac{\sec(ax)}{a} + c, a \neq 0$

F12. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + c \quad \Rightarrow \int \csc(ax)\cot(ax)dx = \dfrac{-\csc(ax)}{a} + c, a \neq 0$

F13. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + c = \ln|\sec u| + c$

$$\Rightarrow \int \tan(ax)dx = \frac{-\ln|\cos(ax)|}{a} + c = \frac{\ln|\sec(ax)|}{a} + c, a \neq 0$$

F14. $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + c = -\ln|\csc u| + c$

$$\Rightarrow \int \cot(ax)dx = \frac{\ln|\sin(ax)|}{a} + c = \frac{-\ln|\csc(ax)|}{a} + c, a \neq 0$$

F15. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + c \Rightarrow \int \sec(ax)\,dx = \dfrac{\ln|\sec(ax) + \tan(ax)|}{a} + c, a \neq 0$

F16. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + c \Rightarrow \int \csc(ax)\,dx = \dfrac{\ln|\csc(ax) - \cot(ax)|}{a} + c$

F17. $\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c \qquad \Rightarrow \int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right) + c, a > 0$

F18. $\int \dfrac{du}{1+u^2} = \arctan u + c \qquad \Rightarrow \int \dfrac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \dfrac{1}{a} \cdot \arctan\left(\dfrac{x}{a}\right) + c, a > 0$

F19. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}} = \operatorname{arcsec}|u| + c \qquad \Rightarrow \int \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = \dfrac{1}{a} \cdot \operatorname{arcsec}\left(\left|\dfrac{x}{a}\right|\right) + c, 0 < a < |x|$

1.1 การหาปริพันธ์โดยการจัดรูปปริพันธ์เข้าสูตรพื้นฐาน

พยายามจัดรูปให้เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาปริพันธ์ได้

ตัวอย่าง จงหา $\int\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{x^3}-2x\right)dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int\left(\frac{4+\sqrt{x}-x^{\frac{2}{3}}}{x^{3}}\right)dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int\left(1+\sin^2 x\csc x\right)dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int\left(\frac{\csc x}{\csc x - \sin x}\right)dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\cos x} dx$

วิธีทำ

1.2 การหาปริพันธ์โดยใช้เทคนิคของการหาปริพันธ์

1.2.1.1 วิธีการแทนค่าหรือเปลี่ยนตัวแปรที่มีรูปแบบไม่แน่นอน

พิจารณาปริพันธ์ในรูป $\int f\big(g(x)\big)dx$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้และ g เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้ แล้วเราสามารถหาปริพันธ์ได้ดังนี้

กำหนดให้ $u=g(x)$ จะได้ $dx=\frac{du}{g'(x)}$ จากนั้นแทนค่าตัวแปร u และ dx จะได้<u>ปริพันธ์ในรูปของตัวแปร u เท่านั้น</u> (ไม่มี x แล้ว) <u>หาก</u>ยังไม่เป็นปริพันธ์ในรูปของตัวแปร u เท่านั้น ให้พยายามจัดรูปต่อไป และเมื่อทำการหาปริพันธ์ของตัวแปร u เรียบร้อยแล้วให้แทนค่า $u=g(x)$ จนเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เท่านั้น

ตัวอย่าง จงหา $\int (x-1)^{2019}dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int 2y\sqrt{1+y^2}\,dy$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \cos^4 x \sin x dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int (x-2)^2 \left(\sqrt[3]{x+1}\right) dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int e^{\tan 2x} \sec^2 2x dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

วิธีทำ

1.2.1.2.1 ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติรูปแบบแน่นอน

พิจารณา 3 รูปแบบดังต่อไปนี้

1. $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$
2. $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ หรือ $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$
3. $\int \sin(mx)\cos(nx)\,dx,$ $\int \sin(mx)\sin(nx)\,dx,$ และ $\int \cos(mx)\cos(nx)\,dx$

สูตรพื้นฐานที่ควรทราบ

$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	$1 + \cot^2 u = \csc^2 x$ $\tan^2 u + 1 = \sec^2 u$
$\cos 2u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\sin^2 u$ $\sin(2u) = 2\sin u \cos u$	$\sin(-u) = -\sin u$ $\cos(-u) = \cos u$

หมายเหตุ เราสามารถจัดกลุ่มของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้เป็น 3 วงศ์ โดยแต่ละวงศ์จะมีความสัมพันธ์เชิงอนุพันธ์ และมีเอกลักษณ์ของพีทากอรัส ดังตารางต่อไปนี้

วงศ์ I	วงศ์ II	วงศ์ III
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$	$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

1.2.1) $\int \sin^m x \cos^n x dx$ (ดูตาราง หน้า 23)

กรณี	วิธีการแทนค่า	เอกลักษณ์ที่ต้องใช้
m เป็นจำนวนเต็มบวกคี่	ให้ $u = \cos x$ และ $\sin^m x = \sin^{m-1} x \sin x$ ได้ $dx = \frac{dx}{-\sin x}$	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่	ให้ $u = \sin x$ และ $\cos^m x = \cos^{m-1} x \cos x$ ได้ $dx = \frac{du}{\cos x}$	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่	ลดกำลังของ $\cos x$ และ $\sin x$	$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ $\sin x \cos x = \frac{\sin(2x)}{2}$
(m + n เป็นจำนวนเต็มลบคู่) **หรือ** (m, n เป็นจำนวนเต็มลบคู่ และ m หรือ n เป็นจำนวนลบ)	ให้ $u = \tan x$ ได้ $dx = \frac{du}{1+u^2}$ $\sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ **หรือ** ให้ $u = \cot x$ ได้ $dx = -\frac{du}{1+u^2}$ $\sin x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \cos x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

ก. $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ **เมื่อ m หรือ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่**

ก.1) <u>m เป็นจำนวนเต็มบวกคี่</u> $\Rightarrow \quad m = 2k+1,\ k \geq 0$

ให้ $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x\,dx$ ได้

$$\begin{aligned}\int \sin^m x \cos^n x\,dx &= \int \sin^{2k} x \sin x \cos^n x\,dx \\ &= \int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x\,d(-\cos x) \\ &= -\int (1-u^2)^k u^n\,du\end{aligned}$$

ก.2) <u>n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่</u> $\Rightarrow n = 2k+1,\ k \geq 0$

ให้ $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\,dx$ ได้

$$\begin{aligned}\int \sin^m x \cos^n x\,dx &= \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x\,dx \\ &= \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^k d(\sin x) \\ &= \int u^m (1-u^2)^k du\end{aligned}$$

ข้อสังเกต ใช้ทฤษฎีบททวินาม กระจายพจน์ $(1-u^2)^k$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}(1-u^2)^k &= \binom{k}{0} 1^k (u^2)^0 - \binom{k}{1} 1^{k-1} (u^2)^1 + \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} 1^0 (u^2)^k \\ &= \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} 1^{k-p} (u^2)^p\end{aligned}$$

สรุป เราจะประยุกต์ใช้เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปรโดยปรับฟังก์ชัน sine และ cosine ที่มีเลขชี้กำลังเป็น<u>จำนวนคี่บวก</u> พร้อมทั้งข้อสังเกตต่อไปนี้

$$\cos x\,dx = d(\sin x) \quad \text{และ} \quad -\sin x\,dx = d(\cos x)$$

ตัวอย่าง จงหา $\int \sin^3 x \cos^{-5} x \, dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \sin^8 x \cos^7 x\, dx$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 1.2.8 (หน้า 12) จงหา $\int \cos^7\left(\frac{3x}{2}\right)dx$

วิธีทำ

ข. $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ **เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ หรือ ตัวใดตัวหนึ่งเป็นศูนย์**

$\Rightarrow m = 2p,\ p \geq 0$ และ $n = 2q,\ q \geq 0$

หาค่า $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ โดยลดกำลังของ $\cos x$ และ $\sin x$

และใช้เอกลักษณ์ $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}, \sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$,

และ $\sin x \cos x = \dfrac{\sin(2x)}{2}$

ได้

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \int \sin^{2p} x \cos^{2q} x\,dx$$
$$= \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^p \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^q dx$$

จากนั้นใช้ทฤษฎีบททวินามกระจายและถอดวงเล็บ จะได้ปริพัทธ์ในรูปของ $\cos(2x)$ ยกกำลังเต็มบวกคู่บ้าง คี่บ้าง แล้วให้ดำเนินการซ้ำเพื่อลดกำลังของ $\cos(2x)$ ที่มีกำลังเป็นจำนวนบวกคู่ต่อไป ส่วนพจน์ $\cos(2x)$ ที่มีกำลังเป็นจำนวนเต็มบวกคี่จะอยู่ในกรณี ก.

สรุป ลดทอนกำลังคู่ด้วยสูตรต่อไปนี้

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$ และ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$

ตัวอย่าง จงหา $\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 1.2.10 (หน้า 15) จงหา $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^4(2x)\,dx$

วิธีทำ

ค. พิจารณา $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ เมื่อ ($m+n$ เป็นจำนวนเต็มลบคู่) หรือ (m, n เป็นจำนวนเต็มลบคู่ และ m หรือ n เป็นจำนวนลบ)

ให้ $m+n=-2p,\ p>0$ และ

ให้ $u=\tan x \ \Rightarrow\ \sec^2 x\,dx=du \Rightarrow dx=\dfrac{1}{1+u^2}du$

และ $\sin x=\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}},\ \ \cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$

หรือ

$u=\cot x \ \Rightarrow\ -\csc^2 x\,dx=du \Rightarrow dx=-\dfrac{1}{1+u^2}du$

และ $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}},\ \ \cos x=\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$

ได้

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx=\int\left(\frac{u^m}{(1+u^2)^{\frac{m}{2}}}\right)\left(\frac{1}{(1+u^2)^{\frac{n}{2}}}\right)\cdot\frac{du}{\left(1+u^2\right)}$$

$$=\int \frac{u^m}{(1+u^2)^{\frac{m+n+2}{2}}}du$$

$$=\int u^m(1+u^2)^{p-1}du$$

$$
\begin{aligned}
(1+u^2)^k &= \binom{k}{0}1^k(u^2)^0 + \binom{k}{1}1^{k-1}(u^2)^1 + \cdots + \binom{k}{k}1^0(u^2)^k \\
&= \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}u^{2p}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^{11}x\cos x}}dx$

ตัวอย่างที่ 1.2.12 (หน้า 17) จงหา $\int \frac{\sin^2(3x)}{\cos^4(3x)}dx$

วิธีทำ

1.2.2 $\int \tan^{m} x \sec^{n} x\,dx$ **หรือ** $\int \cot^{m} x \csc^{n} x\,dx$ **(หน้า 33)**

กรณี	**วิธีการแทนค่า**	**เอกลักษณ์ที่ใช้**
n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่	ให้ $u=\tan x \Rightarrow du=\sec^{2} x\,dx$ **หรือ** $u=\cot x \Rightarrow du=-\csc^{2} x\,dx$	$\sec^{2} x=1+\tan^{2} x$ $\csc^{2} x=1+\cot^{2} x$
m เป็นจำนวนเต็มบวกคี่	ให้ $u=\sec x \Rightarrow du=\sec x\tan x\,dx$ **หรือ** $u=\csc x \Rightarrow du=-\csc x\cot x\,dx$	$\tan^{2} x=\sec^{2} x-1$ $\cot^{2} x=\csc^{2} x-1$
m เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่	ใช้วิธีการหาปริพันธ์ทีละส่วน	
$n=0,\ m\in\mathbb{Z}^{+}$	**1.** ใช้สูตรลดทอน $\int \tan^{m} x\,dx=\frac{\tan^{m-1} x}{m-1}-\int \tan^{m-2} x\,dx$ $\int \cot^{m} x\,dx=-\frac{\cot^{m-1} x}{m-1}-\int \cot^{m-2} x\,dx$ **2.** แทนค่าด้วย $u=\tan x$ $\frac{1}{\cos^{2} x}=1+u^{2};\quad \frac{dx}{\cos^{2} x}=du$ **3.** เปลี่ยนปริพัทธ์เป็น $\sin^{p} x\cos^{p} x$	$\tan^{2} x=\sec^{2} x-1$

ก. $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ **หรือ** $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่

ก.1) ให้ $u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x\,dx$

และใช้เอกลักษณ์ $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ ได้

$$\begin{aligned}\int \tan^m x \sec^n x\,dx &= \int \tan^m x \sec^{n-2} x \sec^2 x\,dx \\ &= \int \tan^m x (1+\tan^2 x)^{\frac{n-2}{2}}\, d(\tan x) \\ &= \int u^m (1+u^2)^{\frac{n-2}{2}}\, du\end{aligned}$$

ก.2) ให้ $u = \cot x \Rightarrow du = -\csc^2 x\,dx$

และใช้เอกลักษณ์ $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$ ได้

$$\begin{aligned}\int \cot^m x \csc^n x\,dx &= \int \cot^m x \csc^{n-2} x \csc^2 x\,dx \\ &= \int \cot^m x (1+\cot^2 x)^{\frac{n-2}{2}}\, [-d(\cot x)] \\ &= -\int u^m (1+u^2)^{\frac{n-2}{2}}\, du\end{aligned}$$

สรุป ลดทอนกำลังด้วยสูตรต่อไปนี้

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ และ $d(\tan x) = \sec^2 x\,dx$

$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$ และ $d(\cot x) = (-\csc^2 x)\,dx$

ตัวอย่าง จงหา $\int \tan^4 x \sec^2 x \, dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \sec^4 x\,dx$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 1.2.16 (หน้า 25) จงหา $\displaystyle\int_{3\pi/4}^{3\pi/2} \csc^4(3x)\cot^{\frac{3}{2}}(3x)\,dx$

วิธีทำ

ข. $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$ **หรือ** $\int \cot^m x \csc^n x\, dx$

เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกคี่

สามารถทำได้โดยเปลี่ยนให้อยู่ในรูป $\int \sin^p x \cos^q x\, dx$ แล้วดำเนินการตามหัวข้อ 1.2.1

ข.1) แยกพจน์ $\sec x \tan x$ ออกแล้วแทนค่า

$$u = \sec x \Rightarrow du = \sec x \tan x\, dx$$ ได้

และใช้เอกลักษณ์ $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$$\begin{aligned}\int \tan^m x \sec^n x\, dx &= \int \tan^{m-1} x \tan x \sec^{n-1} x \sec x\, dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^{\frac{m-1}{2}} \sec^{n-1} x\, d(\sec x) \\ &= \int (u^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} u^{n-1} du\end{aligned}$$

ข.2) แยกพจน์ $\cot x \csc x$ ออกแล้วแทนค่า

$$u = \csc x \Rightarrow du = -\csc x \cot x\, dx$$ ได้

และใช้เอกลักษณ์ $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

$$\begin{aligned}\int \cot^m x \csc^n x\, dx &= \int \cot^{m-1} x \cot x \csc^{n-1} x \csc x\, dx \\ &= \int (\csc^2 x - 1)^{\frac{m-1}{2}} \csc^{n-1} x [-d(\csc x)] \\ &= -\int (u^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} u^{n-1} du\end{aligned}$$

สรุป ลดทอนกำลังคู่ด้วยสูตรต่อไปนี้

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 \quad \text{และ} \quad d(\sec x) = \sec x \tan x\, dx$$

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1 \quad \text{และ} \quad d(\csc x) = (-\csc x \cot x)\, dx$$

ตัวอย่าง จงหา $\int \tan^3 x \sec^5 x\, dx$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 1.2.19 (หน้า 28) จงหา $\int \cot^{5}(5x)\csc^{-3}(5x)dx$

วิธีทำ

ค. $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ **หรือ** $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$

เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่

สามารถหาค่าได้โดยใช้เทคนิคการหาปริพันธ์ทีละส่วน ซึ่งจะศึกษาในหัวข้อต่อไป

ง. $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ **หรือ** $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$

เมื่อ $n = 0,\ m \in \mathbb{Z}^+$

พิจารณา $\int \tan^m x\,dx$ **หรือ** $\int \cot^m x\,dx$

<u>**วิธีที่ 1** โดยการสร้างสูตรลดทอน (Reduction formula)</u>

$$
\begin{aligned}
\int \tan^m x\,dx &= \int \tan^{m-2} x \tan^2 x\,dx \\
&= \int \tan^{m-2} x(\sec^2 x - 1)dx \\
&= \int \tan^{m-2} x \sec^2 x\,dx - \int \tan^{m-2} x\,dx \\
&= \int \tan^{m-2} x\,d(\tan x) - \int \tan^{m-2} x\,dx \\
&= \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - \int \tan^{m-2} x\,dx
\end{aligned}
$$

และ

$$\begin{aligned}\int \cot^{m} x\,dx &= \int \cot^{m-2} x \cot^{2} x\,dx \\ &= \int \cot^{m-2} x(\csc^{2} x - 1)\,dx \\ &= \int \cot^{m-2} x \csc^{2} x\,dx - \int \cot^{m-2} x\,dx \\ &= \int \cot^{m-2} x[-d(\cot x)] - \int \cot^{m-2} x\,dx \\ &= -\frac{\cot^{m-1} x}{m-1} - \int \cot^{m-2} x\,dx\end{aligned}$$

วิธีที่ 2 หาค่า $\int \tan^{m} x\,dx$ โดยการคูณด้วย $\frac{\sec^{2} x}{\sec^{2} x}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\int \tan^{m} x\,dx &= \int \tan^{m} x \cdot \frac{\sec^{2} x}{\sec^{2} x}\,dx \\ &= \int \frac{\tan^{m} x}{1+\tan^{2} x} \cdot \sec^{2} x\,dx \\ &= \int \frac{u^{m}}{1+u^{2}}\,du \quad \text{เมื่อ} \quad u = \tan x\end{aligned}$$

จากนั้นทำการหารยาว $\frac{u^{m}}{1+u^{2}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายต่อการหาค่าต่อไป

และหาค่า $\int \cot^{m} x\,dx$ โดยการคูณด้วย $\frac{\csc^{2} x}{\csc^{2} x}$ ได้ดังนี้

$$\int \cot^m x\,dx = \int \cot^m x \cdot \frac{\csc^2 x}{\csc^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{\cot^m x}{1+\cot^2 x} \cdot \csc^2 x\,dx$$

$$= -\int \frac{u^m}{1+u^2}\,du \qquad \text{เมื่อ} \quad u = \cot x$$

จากนั้นทำการหารยาว $\frac{u^m}{1+u^2}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายต่อการหาค่าต่อไป

วิธีที่ 3 เปลี่ยน

$$\int \tan^m x dx = \int \frac{\sin^m x}{\cos^m x}\,dx = \int \sin^m x \cos^{-m} x\,dx$$

แล้วหาค่าตามกรณีที่ 1

ตัวอย่าง (สูตรลดทอน) จงหา $\int \tan^5 x\,dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง (สูตรลดทอน) จงหา $\int \cot^{6}(4x)\,dx$

วิธีทำ

1.2.3) $\int \sin(mx)\cos(nx)dx$, $\int \sin(mx)\sin(nx)dx$, และ $\int \cos(mx)\cos(nx)dx$

สามารถหาค่าได้โดยใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติต่อไปนี้

$$\sin(m+n)x = \sin(mx)\cos(nx) + \sin(nx)\cos(mx) \quad (1)$$

$$\sin(m-n)x = \sin(mx)\cos(nx) - \sin(nx)\cos(mx) \quad (2)$$

$$\cos(m+n)x = \cos(mx)\cos(nx) - \sin(mx)\sin(nx) \quad (3)$$

$$\cos(m-n)x = \cos(mx)\cos(nx) + \sin(mx)\sin(nx) \quad (4)$$

(1)+(2): $\Longrightarrow \sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]$

(4)-(3): $\Longrightarrow \sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$

(3)+(4): $\Longrightarrow \cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]$

เพื่อเปลี่ยนตัวปริพัทธ์ซึ่งอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติให้อยู่ในรูปผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ตัวอย่าง จงหา $\int \sin(3x)\cos(2x)dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \cos(4x)\cos(7x)dx$

วิธีทำ

ตัวอย่าง จงหา $\int \sin(3x)\sin(4x)dx$

วิธีทำ