

# Lecture Conic Sections

## Chapter 1 Surfaces and Coordinate Systems

ในหัวข้อนี้ เราจะทบทวนเรื่องภาคตัดกรวยซึ่งมีความสำคัญมากในการศึกษาวิชาแคลคูลัสสำหรับวิศวกรรมศาสตร์ 3 นี้

### บทนิยาม 1. วงกลม (circle)

- วงกลม (circle) คือเซตของจุดใด ๆ บนระนาบที่มีระยะห่างจากจุดที่ตรึงไว้ (fixed point) เป็นค่าคงตัว
- เราเรียกจุดที่ตรึงไว้ว่า **จุดศูนย์กลาง** (center) ของวงกลม
- เราเรียกระยะห่างที่เป็นค่าคงตัวนี้ว่า **รัศมี** (radius) ของวงกลม

สมการมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง  $(h, k)$  และรัศมี  $r$  หน่วย คือ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

ตัวอย่าง 1. จงหาสมการมาตรฐานของวงกลมที่มีสมบัติต่อไปนี้

1. จุดศูนย์กลางที่  $(1, 1)$  และรัศมี 3 หน่วย
2. จุดศูนย์กลางที่  $(3, -2)$  และสัมผัสกับเส้นตรง  $x = 1$

① วิธีทำ. จากสมการมาตรฐานของวงกลมคือ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

คือ  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$

② ผก!

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

ตัวอย่าง 2. จงหาจุดศูนย์กลาง รัศมี และร่างกราฟของวงกลมต่อไปนี้ (ถ้ามี)

ฝึก! 1.  $2x^2 + 2y^2 + 16x + 8y + 22 = 0$

2.  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$

๒) ฝึกหัด  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$

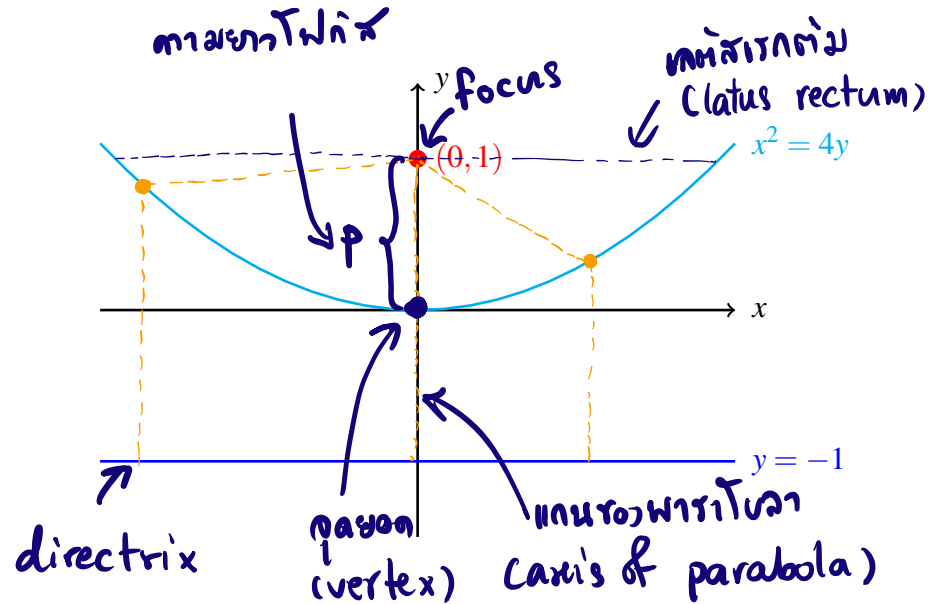
$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 2^2 = -9 + 1 + 2^2$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = -4$$

เนื่องจาก รัศมีเป็นลบไม่ได้ สมการนี้จึงไม่มีกราฟ

## บทนิยาม 2. พาราโบลา (parabola)

- พาราโบลา (parabola) คือเซตของจุดใด ๆ บนระนาบที่มีระยะห่างจากจุดที่ตรึงไว้ (fixed point) และเส้นที่ตรึงไว้ (fixed line) เป็นค่าคงตัว
- เราเรียกจุดที่ตรึงไว้นี้ว่า โฟกัส (focus) ของพาราโบลา
- เราเรียกเส้นที่ตรึงไว้นี้ว่า เส้นบังค้ำ (directrix) ของพาราโบลา



สมการมาตรฐาน	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$	$(x - h)^2 = 4p(y - k)$
จุดยอด	$(h, k)$	$(h, k)$
โฟกัส	$(h + p, k)$	$(h, k + p)$
เส้นบังค้ำ	$x = h - p$	$y = k - p$
ความยาวเลตัสเรกตัม	$4 p $	$4 p $
แกนพาราโบลา	ขนานแกน $x$	ขนานแกน $y$

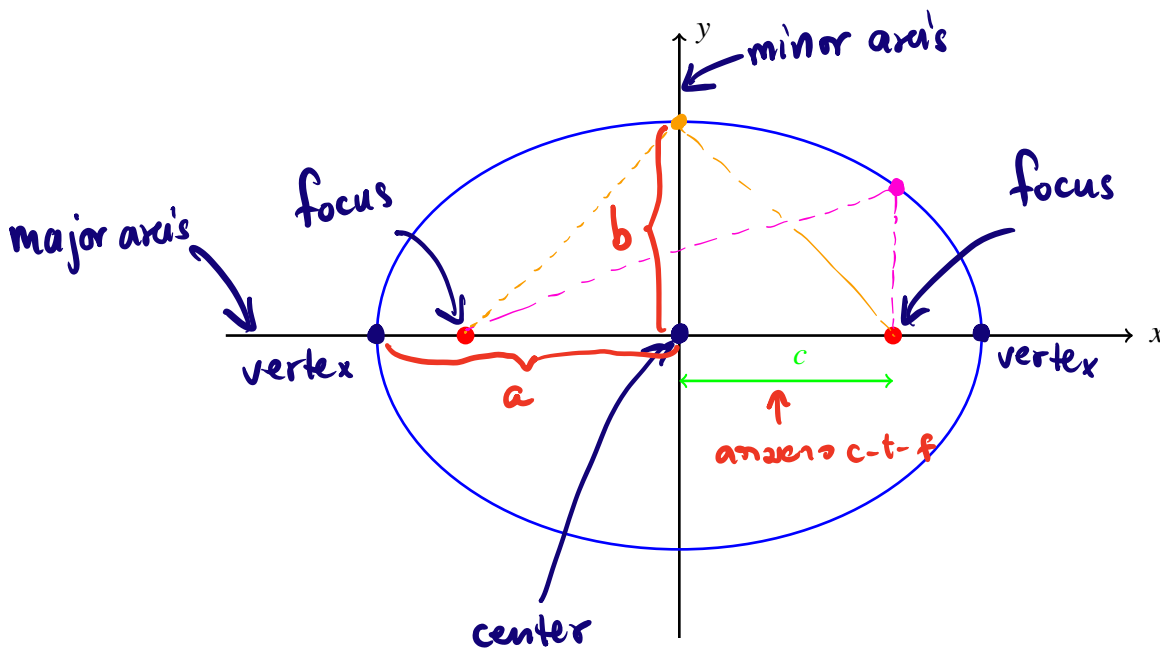
ตัวอย่าง 3. จงหาพิกัดของจุดยอด โฟกัส สมการเส้นบังคับ ความยาวเลตัสเรกตัม และร่างกราฟของพาราโบลาต่อไปนี้

1.  $x^2 = 10y$

2.  $y^2 - 8x - 6y - 23 = 0$

### บทนิยาม 3. วงรี (ellipse)

- วงรี (ellipse) คือเซตของจุดใด ๆ บนระนาบที่มีผลรวมของระยะห่างจากจุดที่ตรึงไว้ (fixed point) สองจุดเป็นค่าคงตัว
- เราเรียกจุดที่ตรึงไว้ทั้งสองจุดนี้ว่า โฟกัส (focus) ของวงรี



สมมติให้  $a \geq b > 0$

สมการมาตรฐาน	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
แกนเอก	$x = h$	$y = k$
แกนโท	$y = k$	$x = h$
ความยาวแกนเอก	$2a$	$2a$
ความยาวแกนโท	$2b$	$2b$
จุดศูนย์กลาง	$(h, k)$	$(h, k)$
ความยาวจุดศูนย์กลางสู่โฟกัส	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$
โฟกัส	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$

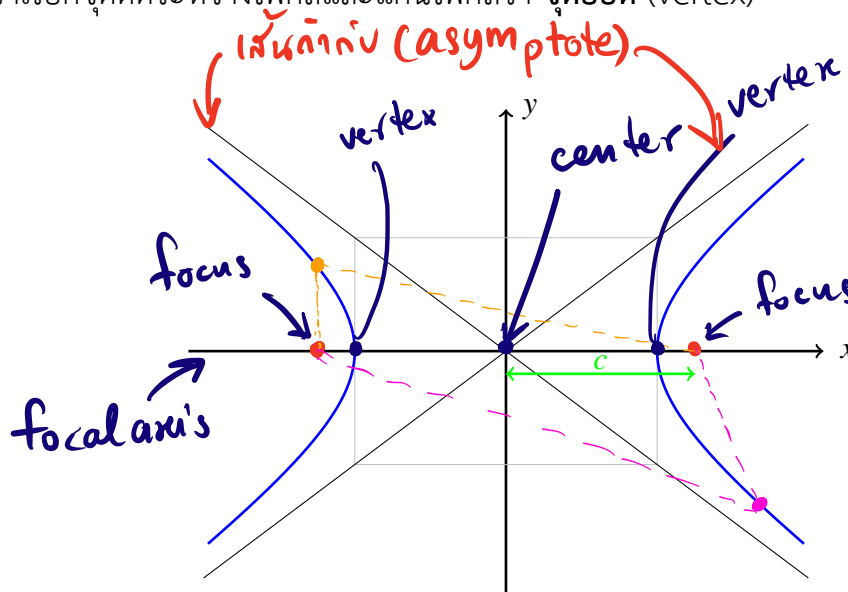
**ตัวอย่าง 4.** จงหาแกนเอก แกนโท ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท จุดศูนย์กลาง จุดยอด ความยาวจุดศูนย์กลางสู่อีพอกัส ีพอกัส และร่างกราฟของวงรีต่อไปนี้

1.  $x^2 + 2y^2 = 4$

2.  $5x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$

#### บทนิยาม 4. ไฮเพอร์โบลา (hyperbola)

- ไฮเพอร์โบลา (hyperbola) คือเซตของจุดใด ๆ บนระนาบที่มีผลต่างของระยะห่างจากจุดที่ตรึงไว้ (fixed point) สองจุดเป็นค่าคงตัว
- เราเรียกจุดที่ตรึงไว้ทั้งสองจุดนี้ว่า **โฟกัส** (focus) ของไฮเพอร์โบลา
- เราเรียกเส้นที่ผ่านโฟกัสทั้งสองของไฮเพอร์โบลาว่า **แกนโฟกัส** (focal axis) หรือ **แกนตามขวาง** (transverse axis) ของไฮเพอร์โบลา
- เราเรียกจุดบนแกนโฟกัสที่อยู่กึ่งกลางระหว่างโฟกัสว่า **จุดศูนย์กลาง** (center)
- เราเรียกจุดตัดระหว่างโฟกัสและแกนโฟกัสว่า **จุดยอด** (vertex)



สมมติให้  $a \geq b > 0$

สมการมาตรฐาน

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

จุดศูนย์กลาง

$$(h, k)$$

$$(h, k)$$

จุดยอด

$$(h \pm a, k)$$

$$(h, k \pm a)$$

ความยาวจุดศูนย์กลางสู่โฟกัส

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

โฟกัส

$$(h \pm c, k)$$

$$(h, k \pm c)$$

แกนโฟกัส

$$y = k$$

$$x = h$$

**หมายเหตุ 1.** เราสามารถหาสมการของเส้นกำกับได้โดยการแทน 1 ทางฝั่งขวามือของสมการมาตรฐานด้วย 0 จากนั้นจัดรูปสมการใหม่เป็น  $y = \pm rx + s$

**ตัวอย่าง 5.** จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด ความยาวจุดศูนย์กลางสู่อะกาศ โฟกัส แกนโพนัส สมการเส้นกำกับ และร่างกราฟของวงรีต่อไปนี้

1.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

2.  $x^2 - 4y^2 - 2x + 8y - 7 = 0$