Calculus for Engineering III	SC402202

Lecture 2.2 Surfaces

Chapter 1 Surfaces and Coordinate Systems

พิจารณาความสัมพันธ์ $f(x,y,z)=0$ ในระบบพิกัดฉาก xyz เราจะเรียก กราฟ (graph) ของความสัมพันธ์นี้ว่า **ผิว** (surface)

บทนิยาม 1. ให้ S เป็นผิวของความสัมพันธ์ $f(x,y,z)=0$ ในระบบพิกัดฉาก xyz เราจะกล่าวว่า

- $x=a$ เป็น **ค่าตัดแกน** x (x-intercept) ถ้า $f(a,0,0)=0$
- $y=b$ เป็น **ค่าตัดแกน** y (y-intercept) ถ้า $f(0,b,0)=0$
- $z=c$ เป็น **ค่าตัดแกน** z (z-intercept) ถ้า $f(0,0,c)=0$

เราจะเรียกจุด $(a,0,0),(0,b,0)$ และ $(0,0,c)$ ข้างต้นว่า **จุดตัดแกน** x,y และ z ตามลำดับ

ตัวอย่าง 1. จงหาค่าตัดแกน x ค่าตัดแกน y ค่าตัดแกน z และจุดตัดแกน x,y และ z ของผิว S ที่กำหนดโดยความสัมพันธ์ต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1. $x+2y+3z-12=0$
2. $4x^2+y^2+z^2-16=0$
3. $x^2+y^2-z-1=0$

วิธีทำ (1) $x+2y+3z-12=0$

ค่าตัดแกน x : แทน $y=z=0$

$0=f(x,0,0)$

$=x+2(0)+3(0)-12$

$=x-12$ $\Rightarrow$ ค่าตัดแกน x คือ $x=12$
และจุดตัดแกน x คือ $(12,0,0)$

ค่าตัดแกน y : แทน $x=z=0$

$0=f(0,y,0)$

$=0+2y+3(0)-12$

$= 2y - 12 \Rightarrow$ ค่าตัดแกน y คือ $y = 6$

และจุดตัดแกน y คือ $(0,6,0)$

<u>ค่าตัดแกน z</u> : แทน $x = y = 0$

$0 = f(0,0,z)$

$= 0 + 2(0) + 3z - 12$

$= 3z - 12 \Rightarrow$ ค่าตัดแกน z คือ $z = 4$

และจุดตัดแกน z คือ $(0,0,4)$

(3) $x^2 + y^2 - z - 1 = 0$

<u>ค่าตัดแกน x</u> :

$0 = f(x,0,0)$

$= x^2 + 0^2 - 0 - 1 = x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm 1$

ดังนั้น ค่าตัดแกน x คือ $x = 1$ และ $x = -1$

และจุดแกน x คือ $(1,0,0)$ และ $(-1,0,0)$

<u>ค่าตัดแกน y</u> :

$0 = f(0,y,0)$

$= 0^2 + y^2 - 0 - 1 = y^2 - 1 \Rightarrow y = \pm 1$

ดังนั้น ค่าตัดแกน y คือ $y = 1$ และ $y = -1$

และจุดตัดแกน y คือ $(0,1,0)$ และ $(0,-1,0)$

<u>ค่าตัดแกน z</u> :

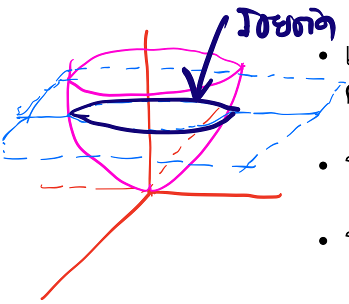
$0 = f(0,0,z)$

$= 0^2 + 0^2 - z - 1 = -z - 1 \Rightarrow z = -1$

ดังนั้นค่าตัดแกน z คือ $z = -1$

และ จุดตัดแกน z คือ $(0,0,-1)$

บทนิยาม 2. ให้ S เป็นผิวของความสัมพันธ์ $f(x,y,z)=0$ ในระบบพิกัดฉาก xyz เราจะเรียก



- เส้นโค้งที่เกิดจากการตัดตัดกันของผิว S กับระนาบในระบบพิกัดฉาก xyz ว่า **รอยตัด** (trace) ของ S บนระนาบดังกล่าว
- รอยตัดที่เกิดจากผิว S กับระนาบพิกัด xy ว่า **รอบตัดบนระนาบ** xy (xy-trace) [แทน $f(x,y,0)$]
- รอยตัดที่เกิดจากผิว S กับระนาบพิกัด yz ว่า **รอบตัดบนระนาบ** yz (yz-trace) [แทน $f(0,y,z)$]
- รอยตัดที่เกิดจากผิว S กับระนาบพิกัด xz ว่า **รอบตัดบนระนาบ** xz (xz-trace) [แทน $f(x,0,z)$]

ตัวอย่าง 2. ให้ S เป็นผิวที่กำหนดโดยความสัมพันธ์ $x^2+2y^2-4y+3z-7=0$ จงหารอยตัดของ S บนระนาบ xy รอยตัดของ S บนระนาบ $x=2$ และรอยตัดของ S บนระนาบ $z=3$

แทน $z=0$ แทน $x=2$ แทน $z=3$

วิธีทำ (1) รอยตัดของ S บนระนาบ xy : แทน $z=0$

$$0 = x^2+2y^2-4y+3(0)-7$$
$$= x^2+2y^2-4y-7$$
$$= x^2+2(y^2-2y+1)-7-2$$
$$= x^2+2(y-1)^2-9$$
$$\Rightarrow x^2+2(y-1)^2=9$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{3^2}+\frac{2(y-1)^2}{3^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{3^2}+\frac{(y-1)^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$

: รอยตัดเป็นวงรี
จุดศก. $(0,1)$
แกนเอก $x=0$
แกนโท $y=1$

(3) รอยตัดบนระนาบ $z=3$

$$0 = x^2+2y^2-4y+9-7$$
$$= x^2+2y^2-4y+2 = \cdots$$

โจทย์ใน Homework 1:

ตัวอย่าง 3. ให้ S เป็นผิวที่กำหนดโดยความสัมพันธ์ $x^2+y^2+z^2+4x-6y+8z-7=0$ จงหารอยตัดของ S บนระนาบ xy รอยตัดของ S บนระนาบ $x=-2$ และรอยตัดของ S บนระนาบ $y=3$

บทนิยาม 3. ให้ S เป็นผิวของความสัมพันธ์ $f(x,y,z)=0$ ในระบบพิกัดฉาก xyz เราจะกล่าวว่า

๑
- S **สมมาตรโดยจุดกำเนิด** (symmetry with respect to the origin) ถ้า $f(x,y,z) = f(-x,-y,-z)$ สำหรับทุก (x,y,z) ในโดเมนของ f

๒
- S **สมมาตรโดยแกน** x (symmetry with respect to x-axis) ถ้า $f(x,y,z) = f(x,-y,-z)$ สำหรับทุก (x,y,z) ในโดเมนของ f
- S **สมมาตรโดยแกน** y (symmetry with respect to y-axis) ถ้า $f(x,y,z) = f(-x,y,-z)$ สำหรับทุก (x,y,z) ในโดเมนของ f
- S **สมมาตรโดยแกน** z (symmetry with respect to z-axis) ถ้า $f(x,y,z) = f(-x,-y,z)$ สำหรับทุก (x,y,z) ในโดเมนของ f

๓
- S **สมมาตรโดยระนาบ** xy (symmetry with respect to xy-plane) ถ้า $f(x,y,z) = f(x,y,-z)$ สำหรับทุก (x,y,z) ในโดเมนของ f
- S **สมมาตรโดยระนาบ** yz (symmetry with respect to yz-plane) ถ้า $f(x,y,z) = f(-x,y,z)$ สำหรับทุก (x,y,z) ในโดเมนของ f
- S **สมมาตรโดยระนาบ** xz (symmetry with respect to xz-plane) ถ้า $f(x,y,z) = f(x,-y,z)$ สำหรับทุก (x,y,z) ในโดเมนของ f

ตัวอย่าง 4. ให้ S เป็นผิวที่กำหนดโดยความสัมพันธ์ $x^2-y^2+z^2+2x-5=0$ จงตรวจสอบว่า S สมมาตรโดยจุดกำเนิด สมมาตรโดยแกน x และสมมาตรโดยระนาบ xz หรือไม่

วิธีทำ

(1) สมมาตรโดยจุดกำเนิด : $f(-x,-y,-z) \stackrel{?}{=} f(x,y,z)$

พิจารณา $f(-x,-y,-z) = (-x)^2-(-y)^2+(-z)^2+2(-x)-5$

$$= x^2-y^2+z^2-2x-5$$

$$\neq x^2-y^2+z^2+2x-5$$

$$= f(x,y,z)$$

ดังนั้น S ไม่สมมาตรที่จุดกำเนิด

(2) สมมาตรโดยแกน x : $f(x,-y,-z) \overset{?}{=} f(x,y,z)$

พิจารณา $f(x,-y,-z) = x^2 - y^2 + z^2 + 2x - 5$

$= f(x,y,z)$

ดังนั้น S สมมาตรโดยแกน x