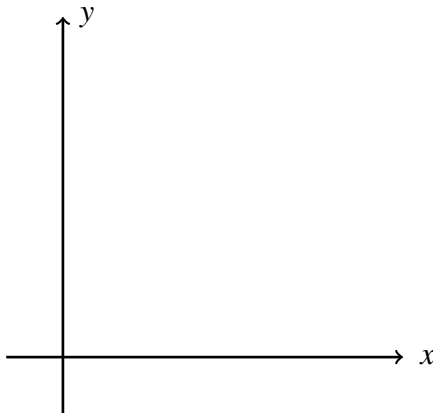


## Lecture 2.1 Parametric Equations

Chapter 1 Surfaces and Coordinate Systems

<sup>1</sup> พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคตามเส้นโค้ง  $C$  ดังรูปต่อไปนี้



สังเกตว่าเราไม่สามารถอธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคนี้ในรูปฟังก์ชันบนระบบพิกัดฉาก  $xy$  ได้ (Why?) อย่างไรก็ตาม เราสามารถระบุตำแหน่งของอนุภาคบนระบบพิกัดฉาก  $xy$  ในรูปฟังก์ชันของเวลา  $t$  (function of time) โดยอธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคนี้ด้วยฟังก์ชัน  $x = f(t)$  และ  $y = g(t)$  แทน

**บทนิยาม 1.** ให้  $I$  เป็นช่วงของจำนวนจริงใด ๆ และ  $f$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $I$  กำหนดให้

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad \text{สำหรับทุก } t \in I \quad (1)$$

เราจะเรียก

- สมการ (1) ว่า **สมการอิงตัวแปรเสริม** (parametric equations)
- เซตของจุด  $(x, y) = (f(t), g(t))$  ที่กำหนดโดย (1) ว่า **เส้นโค้งอิงตัวแปรเสริม** (parametric curve) หรือ **กราฟ** (graph) ของสมการอิงตัวแปรเสริม
- ตัวแปร  $t \in I$  ว่า **ตัวแปรเสริม** (parameter) ของสมการอิงตัวแปรเสริม

<sup>1</sup>ABD12 : Section 10.1 : 2, 3-12, 13-18, 20, 23, 24(a), 25, 26, 27, 28, 33, 34, 37, 38, 39, 40  
TWH14 : Section 11.1 : 1-18, 19-20, 21-24, 26, 27, 28

- ช่วง  $I \subset \mathbb{R}$  ว่า ช่วงอิงตัวแปรเสริม (parametric interval)

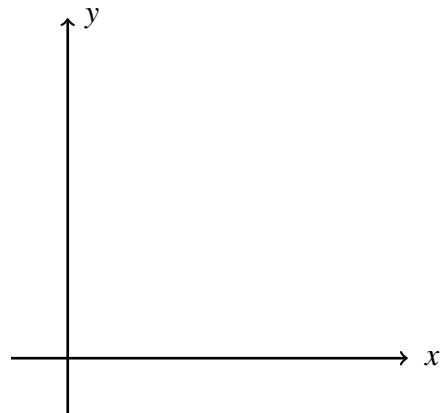
**หมายเหตุ 1.** ในกรณีที่ช่วง  $I$  เป็นช่วงปิด กล่าวคือ  $I = [a, b] := \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$  เราจะเรียก จุด  $(f(a), g(a))$  และ จุด  $(f(b), g(b))$  ว่า จุดเริ่มต้น (initial point) และจุดปลาย (terminal point) ตามลำดับ และในกรณีที่ไม่วัดช่วง  $I$  ให้เป็นข้อตกลงว่า  $I = \mathbb{R}$

**หมายเหตุ 2.** ในกรณีที่เส้นโค้ง  $C$  เป็นการเคลื่อนที่ของอนุภาคบนระนาบ  $xy$  ที่เขียนในรูปสมการอิงตัวแปรเสริมดังสมการ (1) เราจะเรียกเส้นโค้ง  $C$  ว่า แนววิถี (trajectory) ของอนุภาค

**ตัวอย่าง 1.** พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่กำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = t - 1, \quad y = t + 1 \quad \text{สำหรับทุก } t \in [0, 5]$$

1. จงพิจารณาพิกัดของอนุภาคเมื่อ  $t = 0, 1, 2, 3, 4$  และ  $5$
2. จงวาดแนววิถีการเคลื่อนที่ของอนุภาค
3. จงระบุทิศทางของการเคลื่อนที่ของอนุภาค



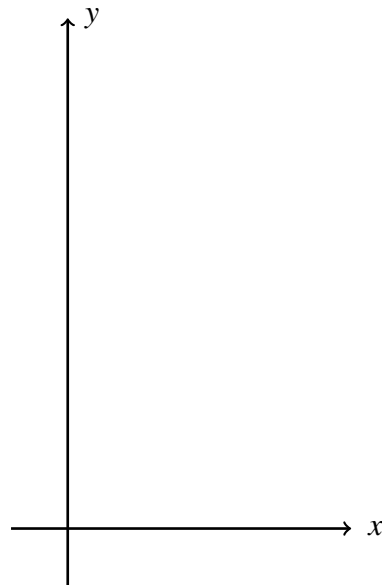
สังเกตว่ากราฟของสมการอิงตัวแปรเสริมหรือแนววิถีการเคลื่อนที่ของอนุภาคจะไม่ปรากฏตัวแปรเสริม  $t$  บนกราฟหรือบนแนววิถี นอกจากนี้ ทิศทางของสมการอิงตัวแปรเสริมจะมีการเปลี่ยนแปลงตามตัวแปรเสริม  $t$  ที่มีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งเราเรียกการเพิ่มขึ้นของ  $t$  นี้ว่า **ทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริม** (direction of increasing parameter) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า **มีการกำหนดทิศทาง** (orientation) ให้กับกราฟโดยสมการอิงตัวแปรเสริม

**หมายเหตุ 3.** เส้นโค้งอิงตัวแปรเสริมหรือกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริมมีความแตกต่างจากเส้นโค้งหรือกราฟที่เรารู้จักโดยทั่วไป กล่าวคือ เส้นโค้งอิงตัวแปรเสริมเป็นเส้นโค้งที่มีการกำหนดทิศทางด้วย

**ตัวอย่าง 2.** จงเขียนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = \sqrt{t}, \quad y = t \quad \text{สำหรับทุก } t \geq 0$$

พร้อมทั้งระบุทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริม



ตัวอย่าง 3. 1. จงเขียนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

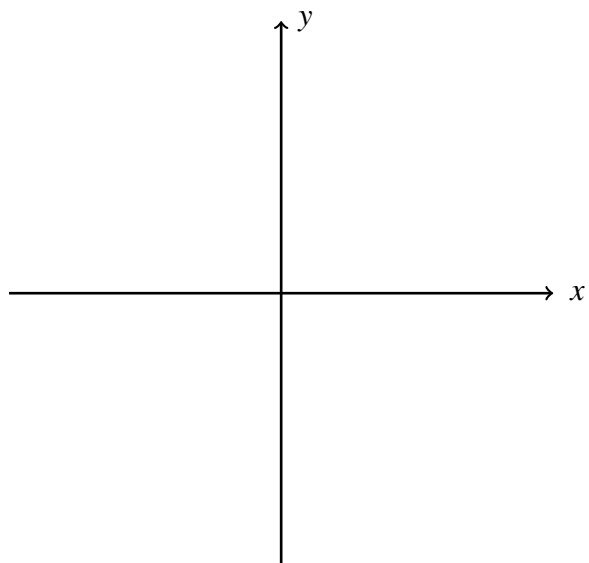
$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad \text{สำหรับทุก } t \in [0, 2\pi]$$

พร้อมทั้งระบุทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริม

**ฝาก!** 2. กำหนดให้  $h, k$  เป็นค่าคงตัว และ  $r > 0$  จงเขียนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = h + r \cos t, \quad y = k + r \sin t \quad \text{สำหรับทุก } t \in [0, 2\pi]$$

พร้อมทั้งระบุทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริม



ตัวอย่าง 4. 1. จงเขียนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

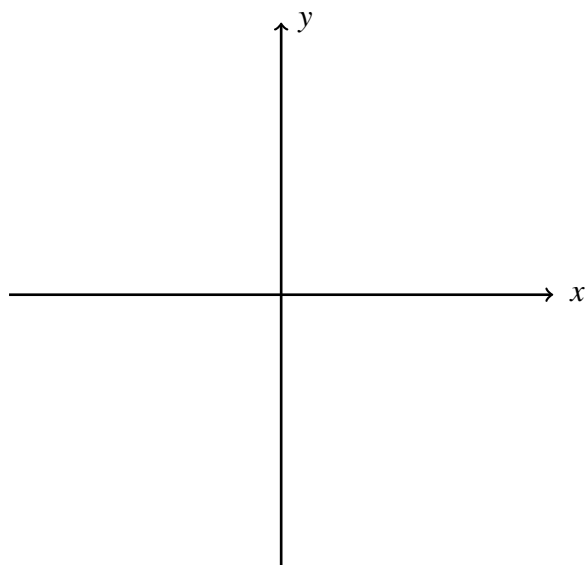
$$x = \sec t, \quad y = \tan t \quad \text{สำหรับทุก } t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

พร้อมทั้งระบุทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริม

**ฝาก!** 2. กำหนดให้  $h, k$  เป็นค่าคงตัว และ  $a, b > 0$  จงเขียนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = h + a \sec t, \quad y = k + b \tan t \quad \text{สำหรับทุก } t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

พร้อมทั้งระบุทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริม



ในบางครั้ง เราสามารถเขียนฟังก์ชัน  $y = h(x)$  ที่นิยามได้บนช่วง  $I$  ให้อยู่ในรูปของสมการอิงตัวแปรเสริมได้โดยการกำหนดตัวแปรเสริม  $t = x$  ซึ่งจะทำให้ได้ว่า  $y = h(t)$  สำหรับทุก  $t \in I$  ตามลำดับ

**ตัวอย่าง 5.** จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1.  $y = x^2 + 2x + 3$

2.  $y = \cos x$  สำหรับทุก  $x \in [-2\pi, 2\pi]$

**ตัวอย่าง 6.** จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของส่วนของเส้นตรงที่มีจุดเริ่มต้น  $P(x_0, y_0)$  และจุดปลาย  $Q(x_1, y_1)$

ตัวอย่าง 7. จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของรังสีที่มีจุดเริ่มต้น  $(2, 3)$  และผ่านจุด  $(-1, -1)$