Calculus for Engineering III SC402202

Lecture 4 Equations of Surfaces

Chapter 1 Surfaces and Coordinate Systems

[1] ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาสมการของผิวที่สำคัญ ได้แก่ ทรงกลม และทรงกระบอก ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

บทนิยาม 1. ทรงกลม คือ เซตของจุดใด ๆ ในปริภูมิ xyz ที่มีระยะห่างจากจุดที่ตรึงไว้ (fixed point) เป็นค่าคงตัว

เราจะเรียกจุดที่ตรึงไว้นี้ว่า **จุดศูนย์กลาง** (radius) และ เรียกระยะห่างที่เป็นค่าคงตัวนี้ว่า **รัศมี** (radius) ของทรงกลม

สมการมาตรฐานของทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง (x_0, y_0, z_0) และรัศมี $r > 0$ คือ

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$$

ตัวอย่าง 1. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของทรงกลมต่อไปนี้

- $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 8z - 7 = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10y + 14z - 6 = 0$

[1] **ABD12** : Section 11.1 : 9, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19-22, 23-28, 34, 47

ตัวอย่าง 2. จงหาสมการของทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(1,1,13)$ และสัมผัสกับระนาบ $4x+3y+12z-59=0$

บทนิยาม 2. กำหนดให้ $\mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ และ C เป็นเส้นโค้งในปริภูมิ 2 มิติ **ทรงกระบอก** (cylinder) คือ ผิวที่เกิดจากการขยายเส้นโค้ง C ขนานไปตามเวกเตอร์ $\mathbf{v}$

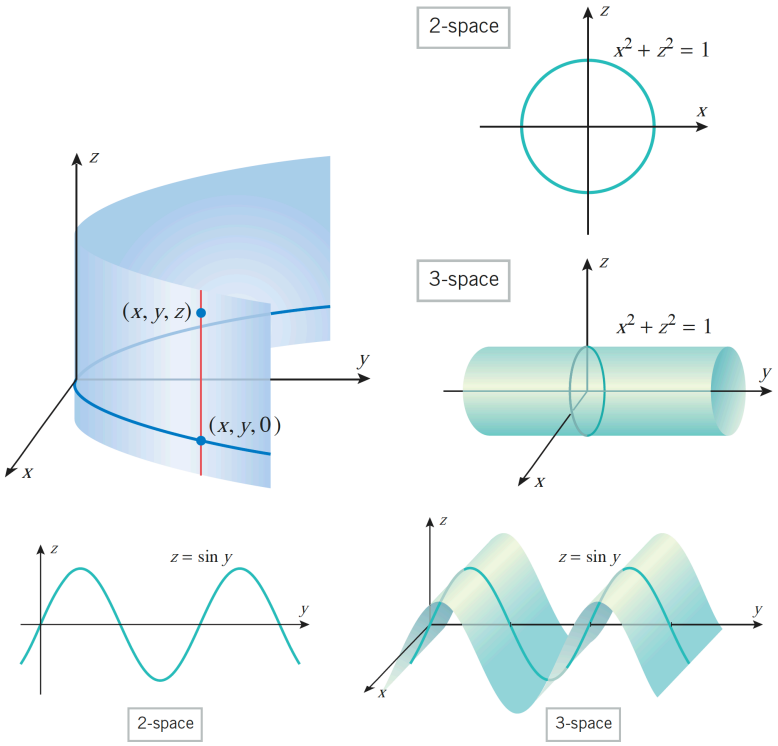

Figure 1: ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 770-771)

กำหนดให้ C เป็นเส้นโค้งในปริภูมิ 2 มิติ และ $\mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ เราสามารถหาสมการของทรงกระบอกซึ่งก่อกำเนิดโดยเส้นโค้ง C และเวกเตอร์ $\mathbf{v}$ ได้ดังนี้

1. กำหนดให้ $P(x,y,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนทรงกระบอก
2. ให้ $Q(x',y',z')$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง C จะได้ว่า PQ ขนานกับ $\mathbf{v}$ นั่นคือ จะมี $m \in \mathbb{R}$ ที่ซึ่ง $PQ = m\mathbf{v}$
3. จาก 2. จัดรูป x',y' และ z' ให้อยู่ในรูปของ x,y และ z
4. แทนค่า x',y' และ z' จาก 3. ในสมการของเส้นโค้ง C

ตัวอย่าง 3. จงหาสมการของทรงกระบอกซึ่งเกิดจากเส้นโค้ง $4x^2 + y^2 = 1, z = 0$ และเวกเตอร์ $\mathbf{v} = \mathbf{3i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

ตัวอย่าง 4. จงหาสมการของทรงกระบอกซึ่งเกิดจากเส้นโค้ง $z = y^2, x = 0$ และแกน x

ตัวอย่าง 5. จงหาสมการของทรงกระบอกซึ่งเกิดจากเส้นโค้ง $x^2+4z^2=9, y=0$ และเวกเตอร์ $\mathbf{v}=\mathbf{2i}+\mathbf{3j}+\mathbf{k}$