

Lecture 6 Polar Coordinate System

Chapter 1 Surfaces and Coordinate Systems

¹ ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการระบุพิกัดของจุดโดยใช้การวัดระยะห่างจากจุดและการวัดมุมที่เกิดจากรังสีที่กำหนดให้ดังนี้

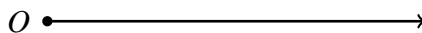
บทนิยาม 1. ระบบพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate) บนระนาบประกอบด้วยจุด O ซึ่งตั้งอยู่อยู่กับที่ และรังสีที่มีจุดเริ่มต้นที่ O เราจะเรียก

- จุด O ว่า **ขั้ว** (pole) หรือจุดกำเนิด (origin)
- รังสีที่ยื่นออกมาจากจุด O ว่า **แกนเชิงขั้ว** (polar axis)

หมายเหตุ 1. โดยทั่วไปแล้วเราจะให้แกนเชิงขั้วเป็นฝั่งบวกของแกน x

บทนิยาม 2. ให้ $P(r, \theta)$ เป็นจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยที่ r เป็นระยะห่างจากจุดขั้ว O ไปยังจุด P และ θ เป็นมุมจากแกนเชิงขั้วไปยังรังสี (ส่วนของเส้นตรง) OP เราจะเรียก

- ระยะห่าง r ว่า **พิกัดเชิงรัศมี** (radial coordinate) ของจุด P
- มุม θ ว่า **พิกัดเชิงมุม** (angular coordinate) หรือมุมเชิงขั้ว (polar angle) ของจุด P

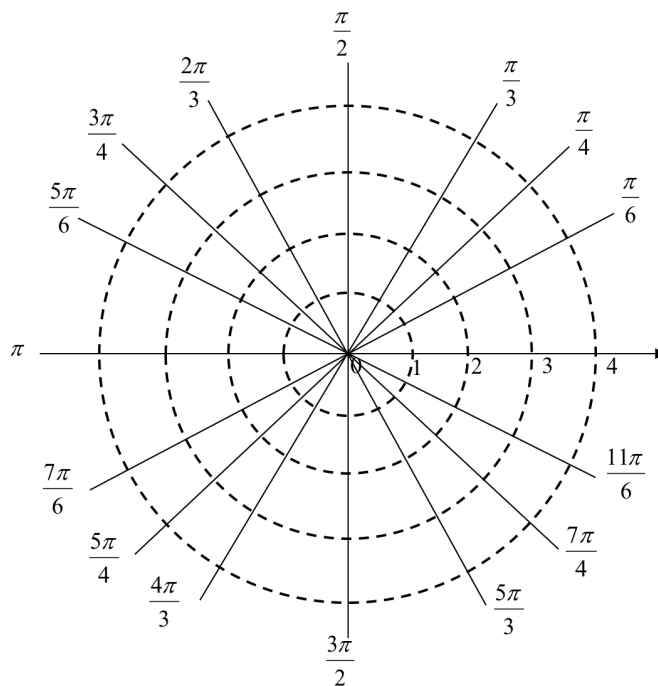


¹ABD12 : Section 10.2 : 1-12
TWH14 : Section 11.3 : 1-10, 27-67

ตัวอย่าง 1. จงแสดงตำแหน่งของจุดซึ่งมีพิกัดในระบบพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้

$$A\left(1, \frac{\pi}{4}\right) \quad B\left(2, \frac{5\pi}{3}\right) \quad C\left(1, -\frac{\pi}{2}\right) \quad D(4, \pi) \quad E\left(2, \frac{-\pi}{3}\right)$$

$$F\left(-1, \frac{9\pi}{4}\right) \quad G(-4, -\pi) \quad H\left(-3, -\frac{\pi}{6}\right) \quad I(0, \pi) \quad J(2, 0)$$

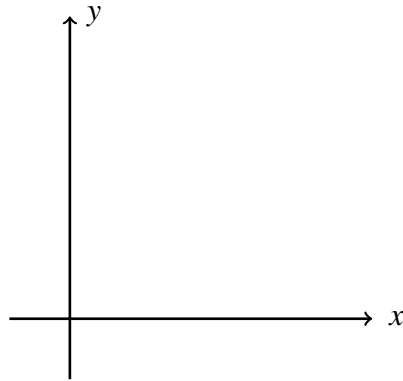


หมายเหตุ 2. สังเกตว่าตำแหน่งของจุด $(-r, \theta)$ และ $(r, \theta + \pi)$ อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน

ตัวอย่าง 2. จงหาพิกัดเชิงขั้วทั้งหมดของจุดต่อไปนี้

1. $P\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$
2. $Q\left(-2, \frac{\pi}{4}\right)$

พิจารณาระบบพิกัดเชิงขั้วและระบบพิกัดฉากบนระนาบ xy โดยที่จุดกำเนิดของทั้งสองระบบเป็นจุดเดียวกัน และแกนเชิงขั้วเป็นฝั่งบวกของแกน x จะพบว่า รัศมี $\theta = \frac{\pi}{2}, r > 0$ เป็นฝั่งบวกของแกน y และทั้งสองระบบมีความสัมพันธ์กันดังนี้



พิกัดเชิงขั้ว เป็น พิกัดฉาก

$$x = \dots\dots\dots \quad \text{และ} \quad y = \dots\dots\dots$$

พิกัดฉาก เป็น พิกัดเชิงขั้ว

$$r^2 = \dots\dots\dots \quad \text{และ} \quad \tan \theta = \dots\dots\dots$$

ตัวอย่าง 3. จงหาตำแหน่งในระบบพิกัดฉากของจุดในระบบพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้
 $A(1, \frac{\pi}{4}) \quad B(2, \frac{-\pi}{3}) \quad C(-1, \frac{9\pi}{4}) \quad D(-2, \frac{-\pi}{6})$

ตัวอย่าง 4. จงหาตำแหน่งในระบบพิกัดเชิงขั้วของจุด $P(\sqrt{3}, -1)$ ในระบบพิกัดฉากที่สอดคล้องกับเงื่อนไขแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $r \geq 0$ และ $\theta \in [0, 2\pi)$
2. $r \leq 0$ และ $\theta \in [0, 2\pi)$
3. $r \geq 0$ และ $\theta \in (-2\pi, 0]$
4. $r \leq 0$ และ $\theta \in (-2\pi, 0]$

ตัวอย่าง 5. จงเขียนสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

1. $(x - 1)^2 + y^2 = 4$

2. $x^2 - y^2 = 2$

3. $x^2 + y^2 - 3y = 0$

ตัวอย่าง 6. จงเขียนสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วต่อไปนีในระบบพิกัดฉาก

1. $r = \frac{4}{2\cos\theta - \sin\theta}$

2. $r = \frac{1}{1 + \sin\theta}$

3. $r^2 = \cos 2\theta$

4. $r^2 = \sin 4\theta$