

Lecture 7 Cylindrical and Spherical Coordinate Systems

Chapter 1 Surfaces and Coordinate Systems

¹ ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาระบบพิกัดในปริภูมิสามมิติอีกสองระบบได้แก่ ระบบพิกัดทรงกระบอก และระบบพิกัดทรงกลม ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

บทนิยาม 1. ให้ P เป็นจุดในระบบพิกัดทรงกระบอก (cylindrical coordinate system) แล้ว P มีพิกัดในรูป (r, θ, z) โดยที่

i) $r \geq 0$ และ $\theta \in [0, 2\pi)$ เป็นตำแหน่งในระบบพิกัดเชิงขั้วของภาพฉาย (projection) ของจุด P บนระนาบ xy

ii) $z \in \mathbb{R}$ เป็นตำแหน่งของ z ในระบบพิกัดฉากของจุด P ตามแนวแกน z

ซึ่งสามารถอธิบายได้ดัง Figure 1

¹ABD12 : Section 11.8 : 1-2,3-4,5-6,7-8,15-18,19-26,27-34,35-46,47-50,51,52,53

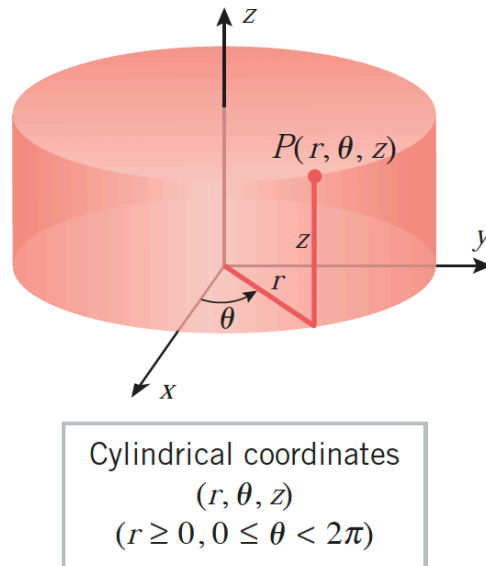


Figure 1: จุด P ในระบบพิกัดทรงกระบอก. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 832)

โดยปกติ เราทราบว่าพื้นผิวของสมการ

$$x = x_0 \quad y = y_0 \quad \text{และ} \quad z = z_0$$

โดยที่ x_0, y_0 และ z_0 เป็นค่าคงตัว เป็นระนาบที่ขนานกับระนาบ yz, xz และ xy ตามลำดับ ดัง Figure 2

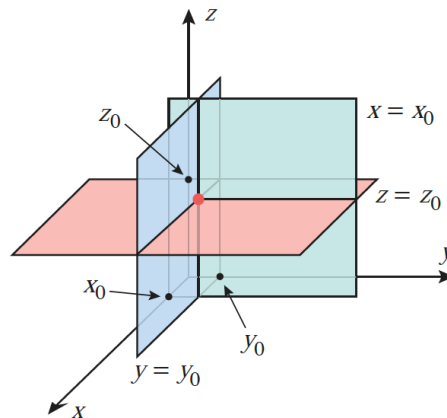


Figure 2: พื้นผิวของสมการ $x = x_0, y = y_0, z = z_0$. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 832)

อย่างไรก็ตาม ในระบบพิกัดทรงกระบอก พื้นผิวของสมการ

$$r = r_0 \quad \theta = \theta_0 \quad \text{และ} \quad z = z_0$$

โดยที่ $r_0 \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ และ $z_0 \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัว เป็นดัง Figure 3

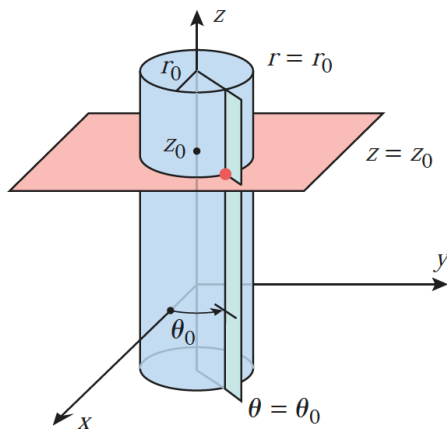


Figure 3: พื้นผิวของสมการ $r = r_0, \theta = \theta_0, z = z_0$. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 833)

หมายเหตุ 1. จากพื้นผิวของสมการ $r = r_0, \theta = \theta_0$ และ $z = z_0$ สามารถสรุปลักษณะได้ดังนี้

- i) พื้นผิว $r = r_0$ เป็นพื้นผิวทรงกระบอกตั้งตรงที่มีรัศมี r_0 และจุดศูนย์กลางเป็นแกน z
- ii) พื้นผิว $\theta = \theta_0$ เป็นครึ่งระนาบตั้งตรงตามแนวแกน z และทำมุม θ_0 กับผังบวกของแกน x
- iii) พื้นผิว $z = z_0$ เป็นระนาบขนานกับระนาบ xy

บทนิยาม 2. ให้ P เป็นจุดในระบบพิกัดทรงกลม (spherical coordinate system) แล้ว P มีพิกัดในรูป (ρ, θ, ϕ) โดยที่

- i) $\rho \geq 0$ เป็นระยะห่างของจุด P วัดจากจุดกำเนิด O
- ii) $\theta \in [0, 2\pi)$ เป็นมุมที่วัดจากผังบวกของแกน x ไปยังตำแหน่งของภาพฉาย (projection) ของจุด P บนระนาบ xy
- iii) $\phi \in [0, \pi]$ เป็นมุมที่วัดจากผังบวกของแกน z ไปยังส่วนของเส้นตรง OP

ซึ่งสามารถอธิบายได้ดัง Figure 4

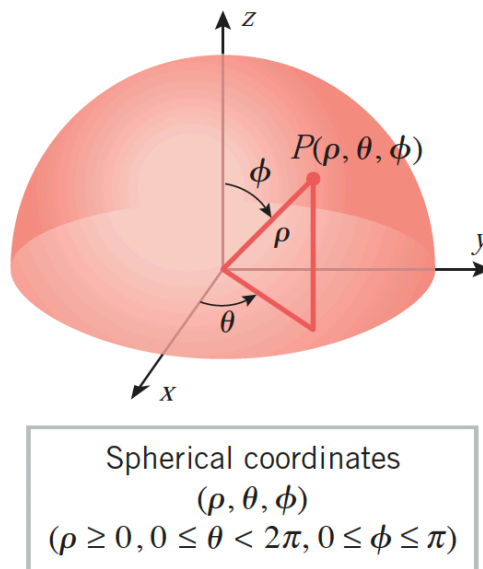


Figure 4: จุด P ในระบบพิกัดทรงกลม. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 832)

ในระบบพิกัดทรงกลม พื้นผิวของสมการ

$$\rho = \rho_0 \quad \theta = \theta_0 \quad \text{และ} \quad \phi = \phi_0$$

โดยที่ $\rho_0 \geq 0, \theta \in [0, 2\pi)$ และ $\phi \in [0, \pi]$ เป็นค่าคงตัว เป็นดัง Figure 5

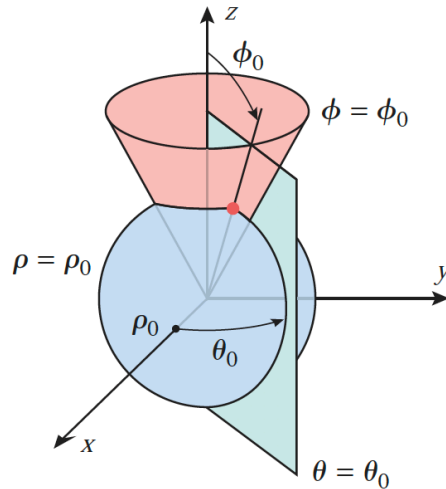


Figure 5: พื้นผิวของสมการ $\rho = \rho_0, \theta = \theta_0, \phi = \phi_0$. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 833)

หมายเหตุ 2. จากพื้นผิวของสมการ $\rho = \rho_0, \theta = \theta_0$ และ $\phi = \phi_0$ สามารถสรุปลักษณะได้ดังนี้

- i) พื้นผิว $\rho = \rho_0$ เป็นพื้นผิวทรงกลมที่มีรัศมี ρ_0 และจุดศูนย์กลางเป็นจุดกำเนิด
- ii) พื้นผิว $\theta = \theta_0$ เป็นครึ่งระนาบตั้งตรงตามแนวแกน z และทำมุม θ_0 กับผังบอกของแกน x
- iii) พื้นผิว $\phi = \phi_0$ แบ่งเป็นหลายกรณี ดังนี้
 - ถ้า $\phi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ แล้วพื้นผิวเป็นกรวยหางยี่ที่ผิวกรวยทำมุม ϕ_0 กับผังบอกของแกน z
 - ถ้า $\phi_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ แล้วพื้นผิวเป็นกรวยคว่ำที่ผิวกรวยทำมุม ϕ_0 กับผังบอกของแกน z
 - ถ้า $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ แล้วพื้นผิวเป็น.....
 - ถ้า $\phi_0 = 0$ แล้วพื้นผิวเป็น.....
 - ถ้า $\phi_0 = \pi$ แล้วพื้นผิวเป็น.....

พิจารณาระบบพิกัดทรงกระบอก ระบบพิกัดทรงกลม และระบบพิกัดฉากบนระนาบ xy โดยที่จุดกำเนิดของทั้งสองระบบเป็นจุดเดียวกัน จะพบว่าระบบพิกัดต่าง ๆ มีความสัมพันธ์กันดังนี้

จาก	เป็น	สูตร	ข้อจำกัด
(r, θ, z)	(x, y, z)	$x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ $z = z$	$r \geq 0$ $\theta \in [0, 2\pi)$ $z \in \mathbb{R}$
(x, y, z)	(r, θ, z)	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\tan \theta = \frac{y}{x}$ $z = z$	
(ρ, θ, ϕ)	(x, y, z)	$x = \rho \sin \phi \cos \theta$ $y = \rho \sin \phi \sin \theta$ $z = \rho \cos \phi$	$\rho \geq 0$ $\theta \in [0, 2\pi)$ $\phi \in [0, \pi]$
(x, y, z)	(ρ, θ, ϕ)	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\tan \theta = \frac{y}{x}$ $\cos \phi = \frac{z}{\rho}$	

ตัวอย่าง 1. จงหาตำแหน่งในระบบพิกัดฉากของจุดในระบบพิกัดทรงกระบอกต่อไปนี้

1. $P(1, 0, 1)$
2. $Q(4, \frac{\pi}{6}, 3)$

ตัวอย่าง 2. จงหาตำแหน่งในระบบพิกัดทรงกระบอกของจุดในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้

1. $P(1, -1, -1)$

2. $Q(4\sqrt{3}, 4, -4)$

ตัวอย่าง 3. จงหาตำแหน่งในระบบพิกัดฉากของจุดในระบบพิกัดทรงกลมต่อไปนี้

1. $P(1, 0, \pi)$

2. $Q(5, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$

ตัวอย่าง 4. จงหาตำแหน่งในระบบพิกัดทรงกลมของจุดในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้

1. $P(1,0,0)$

2. $Q(1, \sqrt{3}, -2)$

ตัวอย่าง 5. จงหาสมการในระบบพิกัดฉากของพื้นผิวที่มีสมการในระบบพิกัดทรงกระบอกต่อไปนี

1. $z = 2 \cos \theta$

2. $r^2 + z^2 = r^2 \cos \theta \sin \theta$

ตัวอย่าง 6. จงหาสมการในระบบพิกัดฉากของพื้นผิวที่มีสมการในระบบพิกัดทรงกลมต่อไปนี้

1. $\rho = 2 \cos \phi$

2. $\rho = 6 \sin \phi \sin \theta$

3. $\rho \sin \phi = 4 \cos \theta$

ตัวอย่าง 7. จงหาสมการในระบบพิกัดทรงกระบอกและระบบพิกัดทรงกลมของพื้นผิวที่มีสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้

1. $x + 2y + 3z = 1$

2. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

3. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$