

Lecture 10

Double Integrals in Polar Coordinate Systems

Chapter 2 Multiple Integrals

¹ ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการหาปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชันในระบบพิกัดเชิงขั้ว ซึ่งมีประโยชน์อย่างใดในกรณีที่ฟังก์ชันหรือบริเวณที่จะหาปริพันธ์สองชั้นแบบปกติทำได้ไม่สะดวก โดยมีรายละเอียดดังนี้

บทนิยาม 1. เราจะกล่าวว่า บริเวณ R ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) เป็น **บริเวณเชิงขั้วอย่างง่าย** (simple polar region) ถ้า R ถูกปิดล้อมด้วย

- รัศมี $\theta = \alpha$ และ $\theta = \beta$ โดยที่ $\alpha \leq \beta$ และ $\beta - \alpha \leq 2\pi$
- ฟังก์ชันต่อเนื่อง $r = r_1(\theta)$ และ $r = r_2(\theta)$ โดยที่ $0 \leq r_1(\theta) \leq r_2(\theta)$

ตัวอย่างของบริเวณเชิงขั้วอย่างง่ายเป็นดัง Figure 1

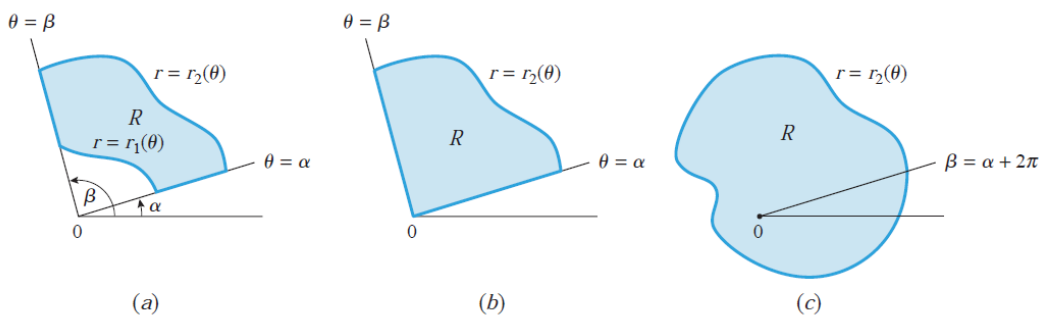


Figure 1: บริเวณเชิงขั้วอย่างง่าย. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1018)

ในการทำงานเดียวกันกับการประยุกต์ใช้ปริพันธ์สองชั้นหาปริมาตรของทรงตันที่ถูกปิดล้อมด้วยฟังก์ชันต่อเนื่องที่ไม่เป็นลบบนบริเวณ R ในระบบพิกัดฉาก ในหัวข้อนี้ เราสามารถพิจารณาการหาปริมาตรของทรงตันที่ถูกปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน $f(r, \theta)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและไม่เป็นลบบนบริเวณเชิงขั้วอย่างง่าย R กล่าวคือ

$$V = \iint_R f(r, \theta) dA$$

¹ABD12 : Section 14.3: 1-6, 7-10, 11-12, 13-16, 17-20, 23-26, 27-34, 35-38, 39, 44, 45, 46
TWH14 : Section 15.4 : 1-8, 9-22, 23-26

ซึ่งเราเรียกพจน์ฝั่งขวามือว่า ปริพันธ์สองชั้นเชิงขั้ว (polar double integral) สำหรับการคำนวณค่าปริพันธ์สองชั้นเชิงขั้วเป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1. ให้ R เป็นบริเวณเชิงขั้วอย่างง่ายที่มีขอบเขตเป็นรังสี $\theta = \alpha$ และ $\theta = \beta$ และฟังก์ชันต่อเนื่อง $r = r_1(\theta)$ และ $r = r_2(\theta)$ ถ้า $f(r, \theta)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน R แล้ว

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta$$

เนื่องจากข้อจำกัดด้านเวลาที่ทำกรเรียนการสอน นักศึกษาสามารถศึกษารายละเอียดและที่มาของการหาปริพันธ์สองชั้นเชิงขั้วและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องได้จาก Anton et al., 2012, น. 1019 - 1021

หมายเหตุ 1. ในการพิจารณาขอบเขตของบริเวณเชิงขั้วอย่างง่าย R อาจดำเนินการได้ดังนี้

1. ในขั้นตอนแรก ให้ตรึงค่า θ ไว้ก่อน และทำการลากรังสีจากจุดกำเนิดผ่านบริเวณเชิงขั้วอย่างง่าย R จะพบว่า รังสีตัดขอบเขตของ R อย่างมากสองจุด และจะได้ว่า จุดตัดที่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุดเป็นขอบเขตล่าง $r = r_1(\theta)$ และจุดตัดที่ไกลจุดกำเนิดมากที่สุดเป็นขอบเขตบน $r = r_2(\theta)$ ของการหาปริพันธ์ย่อยเทียบ r
2. ในขั้นตอนต่อไป ให้จินตนาการว่ารังสีที่ลากในขั้นตอนแรกนั้นสามารถเคลื่อนที่ไปทั่ว R จะได้ว่า มุมที่เล็กที่สุดที่ทำให้รังสีตัดกับ R เป็นขอบเขตล่าง $\theta = \alpha$ และมุมที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้รังสีตัดกับ R เป็นขอบเขตบน $\theta = \beta$ ของการหาปริพันธ์ย่อยเทียบ θ

ตัวอย่าง 1. จงหาค่าของ

$$\iint_R \sin \theta dA$$

โดยที่ R อยู่ในควอรันต์ที่หนึ่งและปิดล้อมด้วย $r = 2$ และ $r = 2(1 + \cos \theta)$ ดัง Figure 2

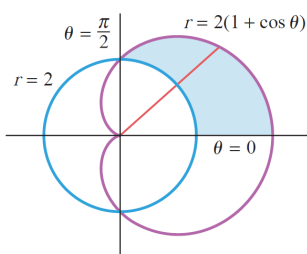


Figure 2: บริเวณเชิงขั้วอย่างง่าย R . ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1022)

ในการทำงานเดียวกันกับการประยุกต์ใช้ปริพันธ์สองชั้นหาพื้นที่ของบริเวณ R ในระบบพิกัดฉาก เราสามารถหาพื้นที่ของบริเวณเชิงขั้วอย่างง่ายในระบบพิกัดเชิงขั้วได้โดย

$$\iint_R 1dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r dr d\theta$$

ตัวอย่าง 2. จงใช้ปริพันธ์สองชั้นเชิงขั้วหาพื้นที่ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้งกลีบกุหลาบ $r = \sin 3\theta$ ในจุดภาคที่หนึ่ง ดัง Figure 3

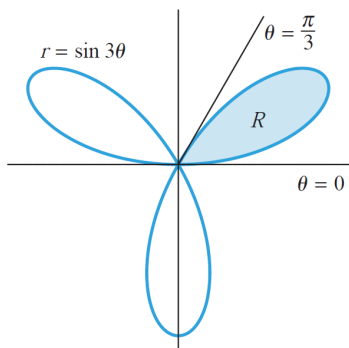


Figure 3: เส้นโค้งกลีบกุหลาบ $r = \sin 3\theta$. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1023)

ในบางครั้งการหาปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดฉาก xy อาจทำได้ไม่สะดวก แต่เมื่อแปลงเป็นระบบพิกัดฉากแล้ว สามารถหาคำนวนปริพันธ์สองชั้นเชิงขั้วได้ง่ายกว่าปริพันธ์สองชั้นในระบบพิกัดฉาก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3. จงหาค่าของ $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dy dx$

ตัวอย่าง 4. จงหาค่าของ $\int_{-4}^0 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} x dy dx$

ตัวอย่าง 5. จงหาค่าของ $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^x \frac{1}{x^2+y^2} dy dx$

ตัวอย่าง 6. จงหาพื้นที่ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยวงกลมหนึ่งหน่วย เส้นตรง $y = 2$ เส้นตรง $x = 2\sqrt{3}$ แกน X และแกน Y ในจุดภาคที่หนึ่ง