Calculus for Engineering III SC402202

Lecture 11
Triple Integrals

Chapter 2 Multiple Integrals

[1] ในหัวข้อก่อนหน้านี้เราได้ศึกษาการหาปริพันธ์สองชั้นและการประยุกต์ใช้ปริพันธ์สองชั้นในการหาปริมาตรของทรงตันที่ถูกปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน $f(x,y)$ ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและมีค่าไม่เป็นลบ และบริเวณ R ที่เป็นบริเวณปิดในระนาบ xy ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการหาปริพันธ์สามชั้นของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ บนบริเวณที่เป็นทรงตัน (solid) ในระบบพิกัด xyz ในลำดับแรกนี้ เราจะกล่าวถึงการนิยามปริพันธ์สามชั้น และพิจารณาการหาปริพันธ์สามชั้นบนทรงตันที่เป็นกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก และในส่วนถัดไป เราจะพิจารณาการหาปริพันธ์สามชั้นใบบริเวณทั่วไป

เพื่อที่จะจำกัดขอบเขตของทรงตัน G ไม่ให้มีค่าเป็นอนันต์ในบางทิศทาง เราสมมติให้ทรงตัน G ถูกปิดล้อมด้วยกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาดใหญ่ที่แต่ละด้านของกล่องขนานกับระนาบพิกัดดัง Figure 1 และเราจะเรียกทรงตันในลักษณะนี้ว่า ทรงตันจำกัด (finite solid)

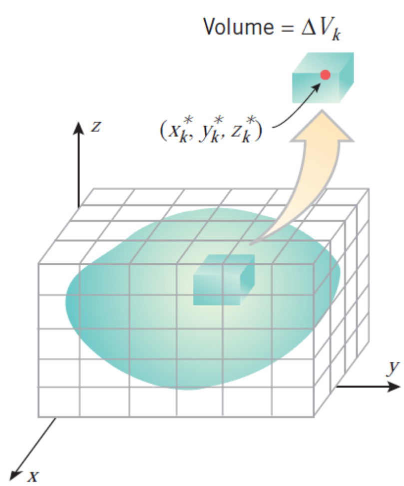

Figure 1: ทรงตัน G. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1039)

[1] **ABD12** : Section 14.5: 1-8, 9-12, 15-18, 19-20, 21-24, 25-26, 27-30, 31-32, 33-34, 37, 38, 39-40
TWH14 : Section 15.5 : 1-6, 7-20, 21-22, 23-36, 37-40

กำหนดให้ $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ในการนิยามปริพันธ์สามชั้นของฟังก์ชัน f บนทรงตันจำกัด G เราเริ่มต้นด้วยการใช้ระนาบที่ขนานกับระนาบพิกัดแบ่งกล่องที่ปิดล้อมทรงตันจำกัด G ออกเป็นกล่องย่อยจำนวน n กล่อง ทั้งนี้เราจะไม่สนใจกล่องที่มีบางส่วนอยู่นอกทรงตัน G จากนั้นให้เราเลือกจุดใดจุดหนึ่งในแต่ละกล่องย่อย สมมติว่าในกล่องย่อย k เลือกเป็นจุด (x_k^*, y_k^*, z_k^*) และถ้าปริมาตรของแต่ละกล่องย่อย k เป็น ΔV_k จะได้ ผลคูณแต่ละ k เป็น

$$f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$$

และเมื่อนำผลคูณที่เกิดขึ้นจากแต่ละกล่องย่อย k มารวมกันจะได้ ผลบวกรีมันน์ (Riemann sum)

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$$

และเมื่อเราแบ่งกล่องที่บรรจุทรงตันจำกัด G ให้มีจำนวนกล่องย่อยจากจำนวน n กล่องเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จะได้ลิมิต

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$$

ซึ่งเราเรียกค่าลิมิตนี้ว่า ปริพันธ์สามชั้น (triple integral) ของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ บนบริเวณ G และเขียนแทนด้วย

$$\iiint_G f(x,y,z)dV$$

ปริพันธ์สามชั้นมีสมบัติพื้นฐานในลักษณะเดียวกันกับปริพันธ์สองชั้น ดังนี้

กำหนดให้ G เป็นทรงตันจำกัดและให้ $f(x,y,z)$ และ $g(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน G จะได้ว่า

(i) $\displaystyle\iiint_G [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]dV = \iiint_G f(x,y,z)dV \pm \iiint_G g(x,y,z)dV$

(ii) ถ้า c เป็นค่าคงตัวใด ๆ แล้ว

$$\iiint_G cf(x,y,z)dV = c\iiint_G f(x,y,z)dV$$

(iii) ถ้า G แบ่งออกเป็น G_1 และ G_2 ได้ดัง Figure 4 แล้ว

$$\iiint_G f(x,y,z)dV = \iiint_{G_1} f(x,y,z)dV + \iiint_{G_2} f(x,y,z)dV$$

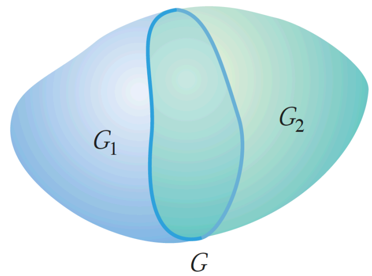

Figure 2: ทรงตัน G แบ่งออกเป็นทรงตัน G_1 และ G_2. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1040)

การคำนวณค่าปริพันธ์สามชั้นในกรณีที่ทรงตันจำกัด G เป็นกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 (ทฤษฎีบทของฟูบินิรูปแบบที่ 2). *ให้ G เป็นทรงตันจำกัดรูปกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก*

$$[a,b] \times [c,d] \times [k,l]$$

ถ้า $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน G แล้ว

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dV = \int_k^l \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz$$

โดยที่อันดับการหาปริพันธ์ซ้อนฝั่งขวามือสามารถแทนที่ด้วย $dxdzdy, dydxdz, dydzdx, dzdxdy$ และ $dzdydx$ ได้

ตัวอย่าง 1. กำหนดให้ $f(x,y,z) = y\sin z$ จงหาค่าของ $\iiint\limits_G f(x,y,z)dV$ โดยที่ G เป็นกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก $[0,\pi] \times [0,1] \times [0,\pi]$

ตัวอย่าง 2. กำหนดให้ $f(x,y,z) = 12xy^2z^3$ จงหาค่าของ $\iiint\limits_G f(x,y,z)dV$ โดยที่ G เป็นกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก $[-1,2] \times [0,3] \times [0,2]$

จากหัวข้อก่อนหน้านี้ เราสามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทฟูบินิในการหาปริพันธ์สามชั้นของฟังก์ของฟังก์ชันต่อเนื่องบนทรงตันจำกัด G รูปกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ ในหัวข้อนี้ เราจะพิจารณาการหาปริพันธ์สามชั้นบนทรงตันจำกัดทั่วไป

บทนิยาม 1. เราจะกล่าวว่าทรงตันจำกัด G เป็น **ทรงตัน xy อย่างง่าย** (simple xy-solid) ถ้า

- G ถูกปิดล้อมด้านล่างและด้านบนด้วยพื้นผิว $z = g_1(x,y)$ และ $z = g_2(x,y)$ ตามลำดับ
- ภาพฉาย (projection) ของ G ไปยังระนาบ xy เป็นบริเวณ R แบบที่ 1 หรือบริเวณแบบที่ 2 โดยที่ $g_1(x,y) \leq g_2(x,y)$ สำหรับทุก $(x,y) \in R$

ดัง Figure 3

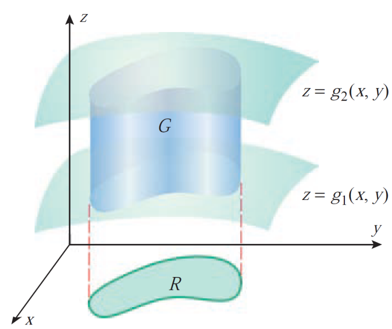

Figure 3: ทรงตัน xy อย่างง่าย. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1041)

การคำนวณค่าปริพันธ์สามชั้นในกรณีที่ทรงตันจำกัด G เป็นทรงตัน xy อย่างง่ายเป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2. *ให้ทรงตันจำกัด G เป็นทรงตัน xy อย่างง่ายที่มีพื้นผิวด้านล่างเป็น $z = g_1(x,y)$ และพื้นผิวด้านบนเป็น $z = g_2(x,y)$ และ R เป็นภาพฉายของของ G ไปยังระนาบ xy ถ้า $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน G แล้ว*

$$\iiint_G f(x,y,z)dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dA$$

หมายเหตุ 1. จากทฤษฎีบทข้างต้น เราจะต้องทำการหาปริพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ เทียบกับ z ก่อน และเมื่อแทนขอบเขตของ z แล้วจะได้ฟงัก์ชันสองตัวแปรของตัวแปร x และ y ซึ่งเราจะต้องทำการหาปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชันที่ได้นี้บนบริเวณ R ตามที่เราเคยศึกษามาก่อนหน้านี้

ตัวอย่าง 3. กำหนดให้ G เป็นลิ่ม (wedge) ในอัฐภาคที่ 1 ซึ่งเกิดจากการตัดกันของทรงกระบอก $y^2+z^2 \leq 1$, ระนาบ $y=x$ และระนาบ $x=0$ จงหาค่าของ $\iiint\limits_G z\,dV$

จากการหาปริมาตรของทรงตันโดยการประยุกต์ใช้ปริพันธ์สองชั้นนั้น เราจะพบว่าพื้นผิวด้านบนต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและไม่เป็นลบบนบริเวณ R ในระนาบ xy ในส่วนต่อไปนี้ เราสามารถประยุกต์ใช้ปริพันธ์สามชั้นในการหาปริมาตรของทรงตันโดยการกำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x,y,z) = 1$ ได้เช่นกัน กล่าวคือ ถ้าทรงตัน G เป็นทรงตัน xy อย่างง่าย แล้วปริมาตรของทรงตันจำกัด G นี้คือ

$$\iiint_G 1dV$$

ตัวอย่าง 4. จงใช้ปริพันธ์สามชั้นหาปริมาตรของทรงตันจำกัดที่ถูกปิดล้อมด้วยทรงกระบอก $x^2+y^2=9$ ระนาบ $z=1$ และระนาบ $x+z=5$ ดัง Figure 4

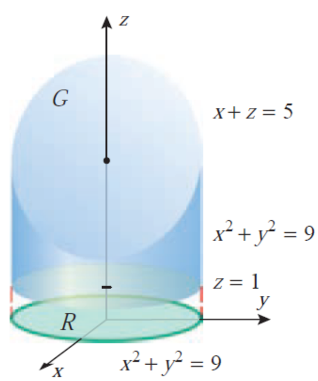

Figure 4: ทรงตัน. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1043)

ตัวอย่าง 5. จงใช้ปริพันธ์สามชั้นหาปริมาตรของทรงตันจำกัดที่ถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = xy^2$ ระนาบ $z = 0$ ดัง Figure 5

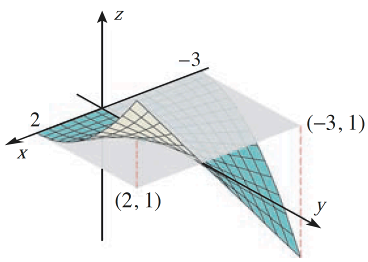

Figure 5: ทรงตัน. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1006)

ตัวอย่าง 6. จงใช้ปริพันธ์สามชั้นหาปริมาตรของทรงตันจำกัดที่ถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = 5x^2 + 5y^2$ และ $z = 6 - 7x^2 - y^2$ ดัง Figure 6

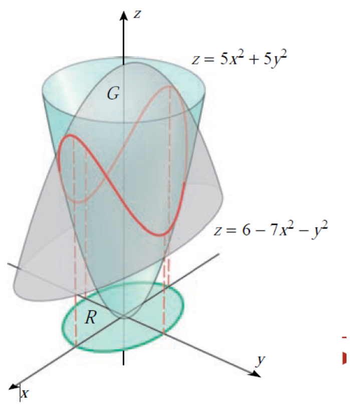

Figure 6: ทรงตัน. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1043)

จากทฤษฎีบทข้างต้น จะพบว่า เราต้องพิจารณาทรงตัน xy อย่างง่าย และทำการหาปริพันธ์ซ้อนเทียบ z ก่อนอย่างไรก็ตาม เราสามารถหาปริพันธ์สามชั้นโดยพิจารณาทรงตันลักษณะอื่นได้ดังนี้

บทนิยาม 2. เราจะกล่าวว่าทรงตันจำกัด G เป็น **ทรงตัน xz อย่างง่าย** (simple xz-solid) ถ้า

- G ถูกปิดล้อมด้านซ้ายและด้านขวาด้วยพื้นผิว $y = g_1(x,z)$ และ $y = g_2(x,z)$ ตามลำดับ
- ภาพฉาย (projection) ของ G ไปยังระนาบ xz เป็นบริเวณ R แบบที่ 1 หรือบริเวณแบบที่ 2 โดยที่ $g_1(x,z) \leq g_2(x,z)$ สำหรับทุก $(x,z) \in R$

ดัง Figure 7

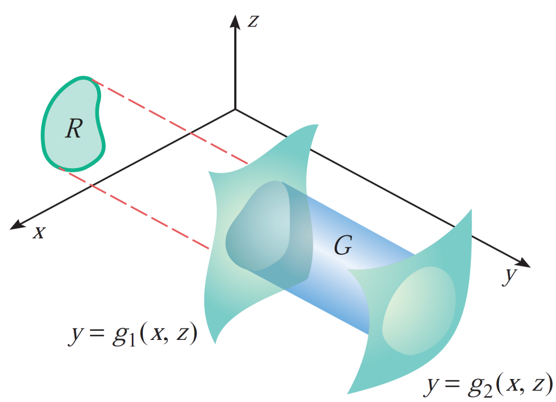

Figure 7: ทรงตัน xz อย่างง่าย. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1044)

ทฤษฎีบท 3. *ให้ทรงตันจำกัด G เป็นทรงตัน xz อย่างง่ายที่มีพื้นผิวด้านซ้ายเป็น $y = g_1(x,z)$ และพื้นผิวด้านขวาเป็น $y = g_2(x,z)$ และ R เป็นภาพฉายของของ G ไปยังระนาบ xz ถ้า $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน G แล้ว*

$$\iiint_G f(x,y,z)dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x,y,z)dy \right] dA$$

ตัวอย่าง 7. กำหนดให้ G เป็นลิ่ม (wedge) ในอัฐภาคที่ 1 ซึ่งเกิดจากการตัดกันของทรงกระบอก $y^2+z^2 \leq 1$, ระนาบ $y=x$ และระนาบ $x=0$ จงหาค่าของ $\iiint\limits_G z dV$ โดยการพิจารณาทรงตัน xz อย่างง่าย

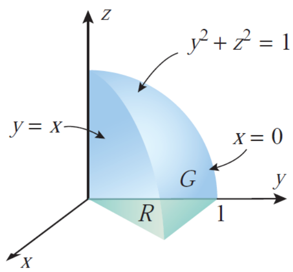

Figure 8: ลิ่ม. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1042)

บทนิยาม 3. เราจะกล่าวว่าทรงตันจำกัด G เป็น **ทรงตัน yz อย่างง่าย** (simple yz-solid) ถ้า

- G ถูกปิดล้อมด้านหลังและด้านหน้าด้วยพื้นผิว $x = g_1(y,z)$ และ $x = g_2(y,z)$ ตามลำดับ
- ภาพฉาย (projection) ของ G ไปยังระนาบ yz เป็นบริเวณ R แบบที่ 1 หรือบริเวณแบบที่ 2 โดยที่ $g_1(y,z) \leq g_2(y,z)$ สำหรับทุก $(y,z) \in R$

ดัง Figure 9

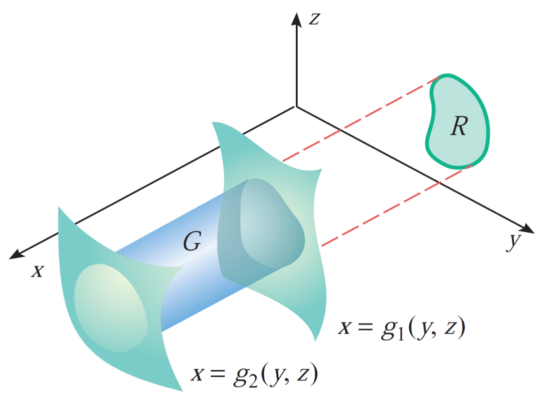

Figure 9: ทรงตัน yz อย่างง่าย. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1044)

ทฤษฎีบท 4. *ให้ทรงตันจำกัด G เป็นทรงตัน yz อย่างง่ายที่มีพื้นผิวด้านหลังเป็น $x = g_1(y,z)$ และพื้นผิวด้านหน้าเป็น $x = g_2(y,z)$ และ R เป็นภาพฉายของของ G ไปยังระนาบ yz ถ้า $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน G แล้ว*

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dV = \iint\limits_R \left[\int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)dx\right] dA$$

ตัวอย่าง 8. กำหนดให้ G เป็นลิ่ม (wedge) ในอัฐภาคที่ 1 ซึ่งเกิดจากการตัดกันของทรงกระบอก $y^2 + z^2 \leq 1$, ระนาบ $y = x$ และระนาบ $x = 0$ จงหาค่าของ $\iiint\limits_G z dV$ โดยการพิจารณาทรงตัน yz อย่างง่าย

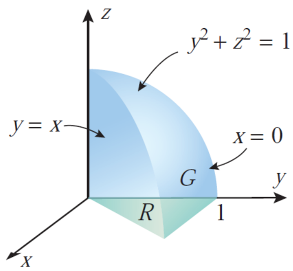

Figure 10: ลิ่ม. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1042)