Calculus for Engineering III SC402202

# Lecture 8
# Double Integrals over Rectangular Regions

Chapter 2 Multiple Integrals

[1] พิจารณาการหาปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

เกิดขึ้นจากการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งสำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ ที่เป็นต่อเนื่องและไม่เป็นลบบนช่วง $[a,b]$ ในทำนองเดียวกันนี้ ปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชันสองตัวแปรเกิดขึ้นจากความต้องการหาปริมาตรภายใต้พื้นผิว มีรายละเอียดดังนี้

กำหนดให้ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีความต่อเนื่องและไม่เป็นลบบนบริเวณ $R$ ในระนาบ $xy$ ในหัวข้อนี้ เราจะให้ความสนใจปัญหาการหาปริมาตร (volumn) ของทรงตันที่ถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = f(x,y)$ และบริเวณ $R$ ดัง Figure 1

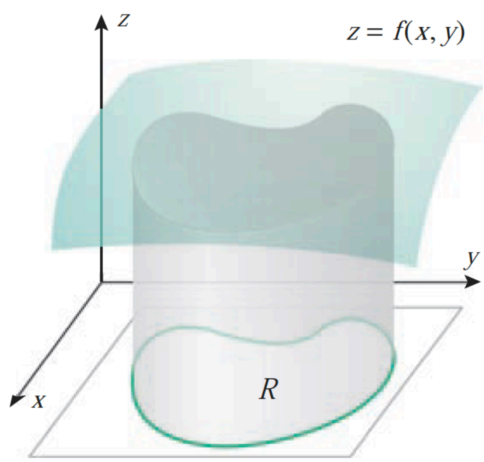


Figure 1: ปริมาตรของทรงตัน. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1001)

[1] **ABD12** : Section 14.1 : 1-12, 13-16, 17-22, 23-26, 27-28, 29-32, 33-34, 35-40
**TWH14** : Section 15.1 : 1-14, 15-22, 23-34

ในการหาปริมาตร $V$ ของทรงตันนี้เป็นไปในทำนองเดียวกันกับการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งมีรายละเอียดดังนี้

- สร้างเส้นตรงขนานกับแกนพิกัด จากนั้นแบ่งพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ล้อมบริเวณ $R$ ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อย ๆ ในที่นี้จะไม่สนใจรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยที่ไม่บรรจุจุดของบริเวณ $R$ ซึ่งจะได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่เป็นเซตย่อยของ $R$ ดัง Figure 2 สมมติว่ามีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่เป็นเซตย่อยของ $R$ จำนวน $n$ รูป และกำหนดให้พื้นที่รูปที่ $k$ ใด ๆ เป็น $\Delta A_k$

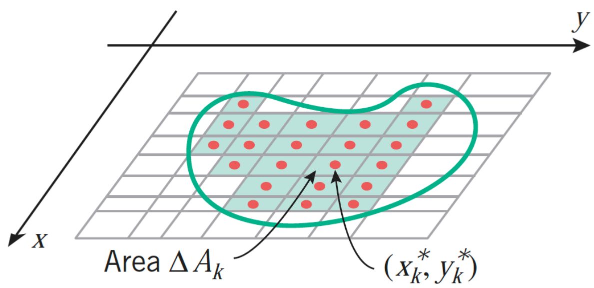


Figure 2: รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่เป็นเซตย่อยของ $R$. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1001)

- เลือกจุด $(x_k^*, y_k^*)$ จุดใดจุดหนึ่งในแต่ละรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก $k$ จะได้ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากแท่งที่ $k$ มีฐานเป็นพื้นที่ $\Delta A_k$ และสูง $f(x_k^*, y_k^*)$ คือ $f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$ ดัง Figure 3 นั่นคือ ผลรวมของปริมาตรทั้ง $n$ แท่ง คือ $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$ ซึ่งจะสามารถใช้เป็นค่าประมาณของปริมาตร $V$ ของทรงตันได้
- สังเกตว่า ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่สร้างขึ้นนี้จะมีพื้นผิวด้านบนเป็นพื้นผิวราบเรียบ ในขณะที่พื้นผิวของฟังก์ชัน $z = f(x,y)$ อาจเป็นผิวโค้งได้ นอกจากนี้ ฐานของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากรวมกันอาจไม่ปกคลุมบริเวณ $R$ ทั้งหมด ดังนั้น ถ้าเราดำเนินการตามข้างต้นโดยการแบ่งพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากย่อยให้เล็กลงเรื่อย ๆ จนความกว้างและความยาวมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ จะได้ว่า ความคลาดเคลื่อนเหล่านี้จะมีค่าลดลงเข้าใกล้ศูนย์ด้วย นั่นคือ ปริมาตรของทรงตัน คือ

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$$

**บทนิยาม 1.** กำหนดให้ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีความต่อเนื่องและไม่เป็นลบบนบริเวณ $R$ ในระนาบ $xy$ ปริมาตรของทรงตันที่ถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = f(x,y)$ และ

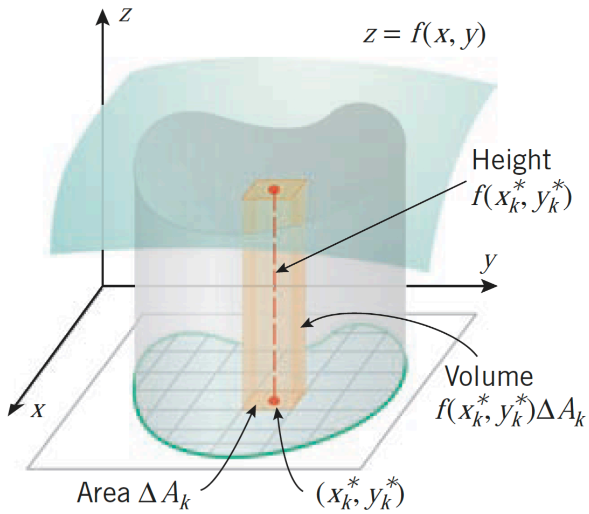


Figure 3: ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากแท่งที่ $k$. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1001)

บริเวณ $R$ คือ

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k \tag{1}$$

เราเรียกผลรวมใน (1) ว่า ผลบวกรีมันน์ (Riemann sum) และถ้าลิมิตของผลบวกรีมันน์ใน (1) หาค่าได้ เราเขียนแทนด้วย

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$$

และเรียกว่า ปริพันธ์สองชั้น (double integral) ของฟังก์ชัน $f(x,y)$ บน $R$

นั่นคือ

$$V = \iint_R f(x,y)dA$$

พิจารณาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปร $f(x,y)$ เทียบตัวแปร $x$ สามารถทำได้โดยให้ตัวแปร $y$ เป็นค่าคงตัว และทำการหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร $x$ ในทำนองเดียวกันนี้ เราสามารถพิจารณาการหาปริพันธ์จำกัดเขตย่อย (partial definite integral) ได้ดังนี้

- ปริพันธ์จำกัดย่อยเทียบ $x$ คือ การหาปริพันธ์ $\int_a^b f(x,y)dx$ โดยให้ตัวแปร $y$ เป็นค่าคงตัว ซึ่งจะได้ฟังก์ชันของตัวแปร $y$ ออกมา
- ปริพันธ์จำกัดย่อยเทียบ $y$ คือ การหาปริพันธ์ $\int_c^y f(x,y)dy$ โดยให้ตัวแปร $x$ เป็นค่าคงตัว ซึ่งจะได้ฟังก์ชันของตัวแปร $x$ ออกมา

**ตัวอย่าง 1.** จงหาปริพันธ์จำกัดเขตย่อยต่อไปนี้

1. $\int_0^1 x^2 y dx$
2. $\int_0^1 x^2 y dy$

จาก (1) ในตัวอย่างข้างต้นจะพบว่าผลลัพท์เป็นฟังก์ชันของตัวแปร $y$ ซึ่งเราอาจสามารถหาปริพันธ์เทียบกับ $y$ ได้ เราเรียกการดำเนินการเช่นนี้ว่า การหาปริพันธ์ซ้อน (iterated integral) กล่าวคือ

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

และ

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

**ตัวอย่าง 2.** จงหาค่าของปริพันธ์ซ้อนต่อไปนี้

1. $\int_0^1 \int_1^3 xy^2 dxdy$
2. $\int_1^3 \int_0^1 xy^2 dxdy$

จากตัวอย่างข้างต้น พบว่าเราสามารถเปลี่ยนอันดับการหาปริพันธ์จำกัดย่อยบนบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้ ซึ่งเป็นตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 1** (ทฤษฎีบทของฟูบินิ (รูปแบบที่ 1)). *กำหนดให้ $R$ เป็นบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก*

$$[a,b]\times[c,d]$$

*และ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีความต่อเนื่องบน $R$ จะได้ว่า*

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

**ตัวอย่าง 3.** กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x,y)=xe^{xy}$ และบริเวณ $R=[1,2]\times[1,2]$ จงหาค่าของ

$$\iint\limits_R f(x,y)dA$$

ต่อไปนี้เป็นสมบัติปริพันธ์สองชั้นซึ่งเป็นจริงแม้ว่า $R$ ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

**ทฤษฎีบท 2.** *กำหนดให้ $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีความต่อเนื่องบน $R$ จะได้ว่า สำหรับทุกค่าคงตัว $c$*

$$\iint_R cf(x,y)dA = c\iint_R f(x,y)dA$$

*และ*

$$\iint_R (f(x,y)+g(x,y))\,dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$$

*นอกจากนี้ ถ้า $R$ สามารถแบ่งออกเป็นบริเวณ $R_1$ และ $R_2$ แล้ว*

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$$

**ตัวอย่าง 4.** กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x,y)=2e^{2x}+e^{-2y}$ และบริเวณ $R=[0,1]\times[0,1]$ จงหาค่าของ

$$\iint_R f(x,y)dA$$

**ตัวอย่าง 5.** กำหนดให้ $f(x,y) = xy^2$ จงหาค่าของ

$$\iint_R f(x,y)dA$$

โดยที่ $R = \{(x,y) : -3 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ และจงอภิปรายผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ

**ตัวอย่าง 6.** กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x,y) = x\sin(xy)$ และบริเวณ $R = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1\}$ จงหาค่าของ

$$\iint_R f(x,y)dA$$

**ตัวอย่าง 7.** จงหาปริมาตรของทรงตันที่มีขอบเขตด้านบนเป็นพื้นผิว $z = 40 - 2xy$ และมีขอบเขตด้านล่างอยู่บนระนาบ $xy$ ที่ปิดล้อมด้วยระนาบ $x = 1, x = 3, y = 2, y = 4$

**ตัวอย่าง 8.** จงหาปริมาตรของทรงตันที่มีขอบเขตด้านบนเป็นระนาบ $z = 4 - x - y$ และมีขอบเขตด้านล่างเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $R = [0,1] \times [0,2]$