Lecture 9
Double Integrals over Nonrectangular Regions

Chapter 2 Multiple Integrals

[1] ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการหาปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณปิดที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ในลำดับแรกนี้ เราจะพิจารณาปริพันธ์ซ้อนที่ดังนี้ กำหนดให้ $g_1(x), g_2(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $g_1(x) \le g_2(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ และ $h_1(y), h_2(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $h_1(y) \le h_2(y)$ สำหรับทุก $y \in [c,d]$ ปริพันธ์ซ้อนกำหนดโดย

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

และ

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

ตัวอย่าง 1. จงหาปริพันธ์ซ้อนต่อไปนี้

1. $\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} xy^2 dydx$
2. $\int_0^{\pi/3} \int_0^{\cos y} x\sin y dxdy$

[1] **ABD12** : Section 14.2: 1-8, 9-12, 13-14, 15-18, 19-24, 25, 26, 29-32, 33-36, 37-38, 39-44, 47-52, 53-56, 61-62
TWH14 : Section 15.2 : 1-8, 9-18, 19-24, 25-28, 29-32, 33-46, 47-54, 55, 56, 57-66
Section 15.3 : 1-12, 13-18, 23, 24

ในการศึกษาเรื่องปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากนี้ เราจำเป็นต้องรู้จักลักษณะของบริเวณในการหาปริพันธ์ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

บทนิยาม 1. เราจะกล่าวว่าบริเวณ R เป็น

1. **บริเวณแบบที่ 1** (Type I region) ถ้า R ถูกปิดล้อมด้านซ้ายและขวาด้วยเส้นตรง $x=a$ และ $x=b$ และถูกปิดล้อมด้านล่างและด้านบนด้วยกราฟของฟังก์ชันต่อเนื่อง $y=g_1(x)$ และ $y=g_2(x)$ ที่ $g_1(x) \leq g_2(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$
2. **บริเวณแบบที่ 2** (Type II region) ถ้า R ถูกปิดล้อมด้านล่างและบนด้วยเส้นตรง $y=c$ และ $y=d$ และถูกปิดล้อมด้านซ้ายและด้านขวาด้วยกราฟของฟังก์ชันต่อเนื่อง $x=h_1(y)$ และ $x=h_2(y)$ ที่ $h_1(y) \leq h_2(y)$ สำหรับทุก $y \in [c,d]$

ทฤษฎีบท 1. *1. ถ้า $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณแบบที่ 1*

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

แล้ว

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

2. ถ้า $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณแบบที่ 2

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

แล้ว

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$$

ตัวอย่าง 2. 1. จงหา $\iint_R xy^2 dA$ โดยที่ R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x=0, x=1$ และเส้นโค้ง $y=x^2, x+y=0$

2. จงหา $\iint_R x\sin y dA$ โดยที่ R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y=0, y=\pi/3$ และเส้นโค้ง $x=0, x=\cos y$

ตัวอย่าง 3. จงหาค่าของ $\iint_R (x+2y)dA$ โดยที่ R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=2x^2$ และ $y=x^2+1$

ตัวอย่าง 4. จงหาค่าของ $\iint_R xydA$ โดยที่ R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x - 1$ และ $y^2 = 2x + 6$

ตัวอย่าง 5. จงหาค่าของ $\iint_R xydA$ โดยที่ R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $|x|+|y|=1$

ตัวอย่าง 6. จงใช้ปริพันธ์สองชั้นในการหาปริมาตรของทรงสี่หน้าที่ปิดล้อมด้วยระนาบ $4x+2y+z=4, x=0, y=0$ และ $z=0$

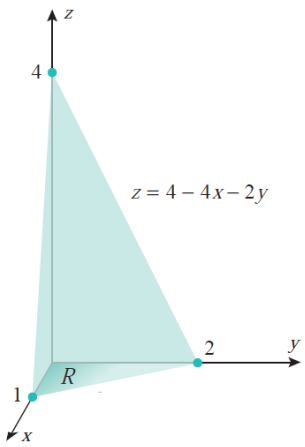

Figure 1: ทรงสี่หน้า. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1013)

ตัวอย่าง 7. จงหาปริมาตรของทรงตันที่ปิดล้อมด้วยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4$, ระนาบ $y + z = 4$ และ $z = 0$

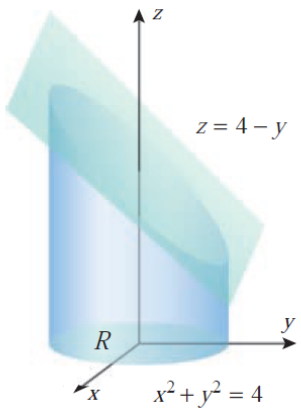

Figure 2: ทรงตัน. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1013)

ในบางครั้งการสลับอันดับการหาปริพันธ์อาจทำให้การหาค่าของปริพันธ์สองชั้นง่ายขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 8. จงหาค่าปริพันธ์ซ้อน $\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dxdy$

ตัวอย่าง 9. จงหาค่าปริพันธ์ซ้อน $\int_0^2 \int_{y/2}^1 \cos(x^2) dxdy$