Calculus for Engineering III SC402202

Lecture 13
Surface Area

Chapter 2 Multiple Integrals

[1] ในหัวข้อเราจะศึกษาการประยุกต์ปริพันธ์สองชั้นในการหาพื้นที่ผิว (surface area) ของผิว (surface) ที่มีสมการ $z = f(x,y)$

สมมติให้ผิว σ ถูกกำหนดด้วยสมการ $z = f(x,y)$ ที่นิยามบนบริเวณ R บนระนาบ xy ดัง Figure 1 (a) และ f เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในบริเวณที่บรรจุจุดภายใน (interior point) ของ R ในลำดับแรกนี้ เราจะใช้เส้นตรงที่ขนานแกน x และแกน y แบ่งบริเวณ R เป็นบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยจะไม่พิจารณาส่วนของบริเวณ R ที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งบรรจุจุดขอบ (boundary point) ของ R เราสมมติให้มีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจำนวน n รูป คือ $R_1, R_2, \ldots, R_n$

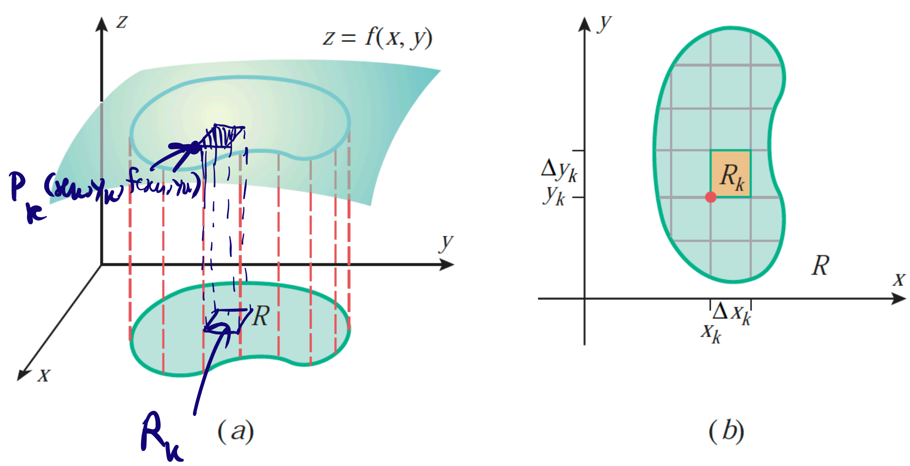


Figure 1: ผิว σ และบริเวณ R. ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1026)

ให้ (x_k, y_k) เป็นจุดมุมด้านซ้ายมือของบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก R_k และสมมติให้ R_k มีพื้นที่เป็น $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ โดยที่ Δx_k และ Δy_k เป็นมิติของ R_k ดัง Figure 1 (b) เราจะพบว่าส่วนของผิว σ ที่อยู่เหนือบริเวณ R_k จะเป็นแผ่นเชิงเส้นโค้ง (curvilinear patch) ที่มีจุดมุมของแผ่นเชิงเส้นโค้งดังกล่าว คือ จุด $P_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$ ซึ่งเราจะกำหนดให้พื้นที่แผ่น

[1] **ABD12** : Section 14.4: 1-4, 5-7, 9-10

เชิงเส้นโค้ง ΔS_k และมีค่าเป็น

$$\Delta S_k = \left[\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\right]\Delta A_k$$

(ด้วยข้อจำกัดของเวลาทำการเรียนการสอน จึงขอละการพิสูจน์ข้างต้น สำหรับผู้เรียนที่สนใจสามารถศึกษาได้จาก Anton et al., 2012, น. 1026-1027)

นั่นคือ พื้นที่ผิวของผิว σ มีค่าประมาณ

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\right]\Delta A_k$$

ถ้าเราให้ขนาดของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเล็กลงมาก ๆ จนเข้าใกล้ 0 หรือ n เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ สู่อนันต์ จะได้ พื้นที่ผิวของผิว σ คือ

$$S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\right]\Delta A_k$$

ดังนั้น

$$S = \iint_R \left[\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\right] dA$$

ตัวอย่าง 1. จงหาพื้นที่ผิวของส่วนของผิว $z = \sqrt{4-x^2}$ ที่อยู่เหนือบริเวณ R บนระนาบ xy ที่ซึ่ง $0 \le x \le 1$ และ $0 \le y \le 4$

$1 \le x \le 2$ และ $1 \le y \le 3$

วิธีทำ

พิจารณาผิว: $z = \sqrt{4-x^2}$

$\Leftrightarrow z^2 = 4 - x^2$

$\Leftrightarrow x^2 + z^2 = 4$

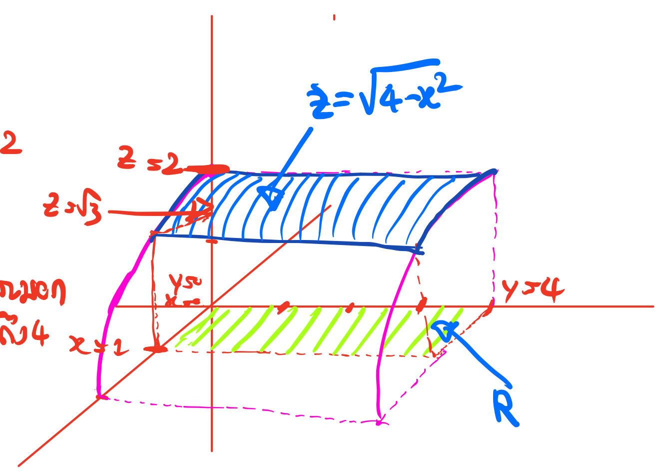
$\Leftrightarrow x^2 + z^2 = 2^2$: ทรงกระบอก

[illegible]

$x=0 \Rightarrow z = \sqrt{4} = 2$

$x=1 \Rightarrow z = \sqrt{3}$

$y=0$, $y=4$ บอกว่าทรงกระบอกยาวตั้งแต่ 0 ถึง 4

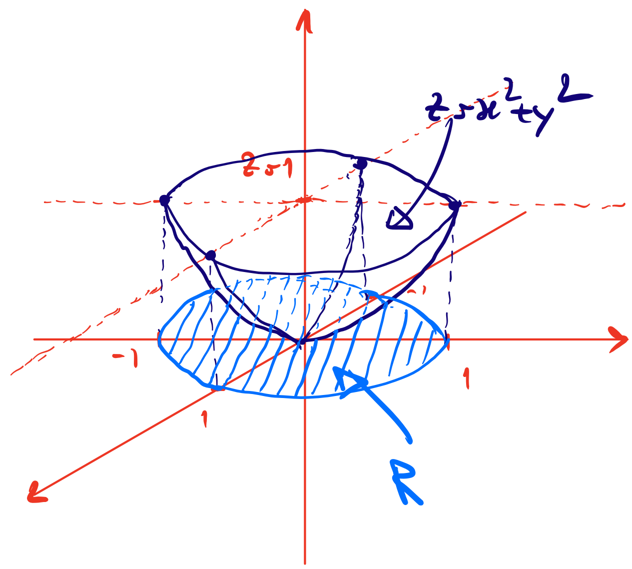


พิจารณาขอบด้านขวา $x=1$ บนผิว $z=\sqrt{4-x^2} \Rightarrow z = \sqrt{4-1^2} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial (4-x^2)^{1/2}}{\partial x} = \frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial (4-x^2)^{1/2}}{\partial y} = 0$

จะได้พื้นที่ผิว $S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2 + 1}\, dA = \int_{y=0}^{y=4} \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2 + 1}\, dx\, dy = \dots = \frac{4\pi}{3}$ ตร.ห.

ตัวอย่าง 2. จงหาพื้นที่ผิวของผิวทรงพาราโบลา $z = x^2 + y^2$ ที่อยู่ใต้ระนาบ $z = 1$



วิธีทำ

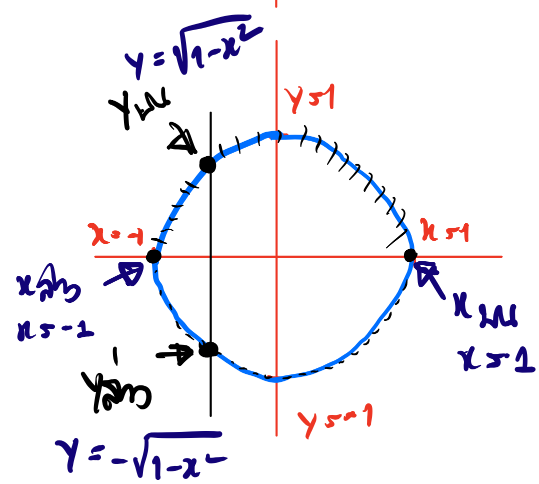
หารอยตัด $z=1$ และพาราโบลา $z=x^2+y^2$

$\Rightarrow 1 = x^2+y^2$: วงกลม 1 หน่วย

พิจารณา

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial y} = 2y$$



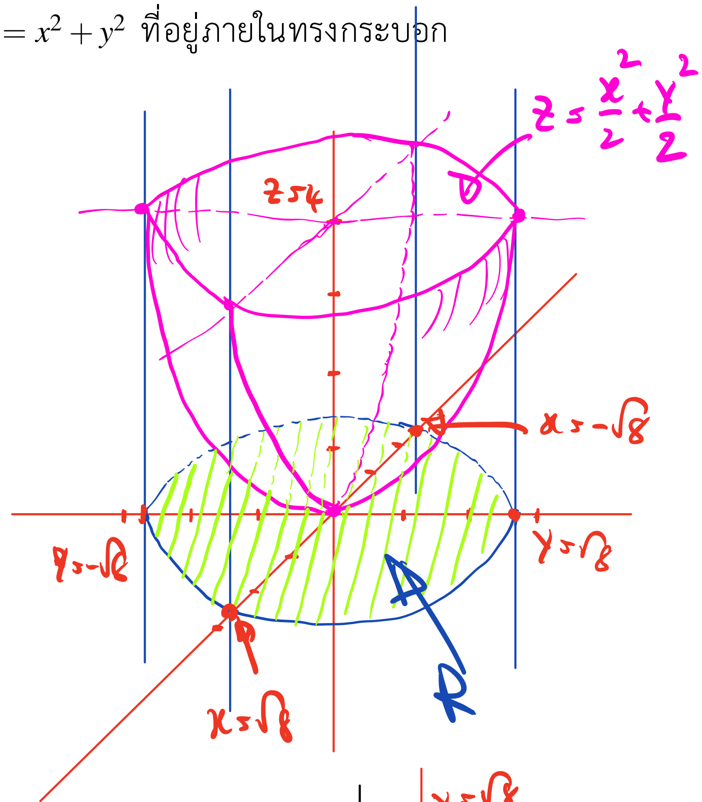
ดังนั้น พื้นที่ผิว S คือ

$$S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

$$= \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \sqrt{(2x)^2+(2y)^2+1}\, dy\, dx = \cdots = \frac{1}{6}\pi\left(5\sqrt{5}-1\right) \text{ ตร.น.}$$

$\square$

ตัวอย่าง 3. จงหาพื้นที่ผิวของผิวทรงพาราโบลา $2z = x^2 + y^2$ ที่อยู่ภายในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 8$



วิธีทำ

พิจารณาการตัดกันของทรงกระบอก $x^2+y^2=8$

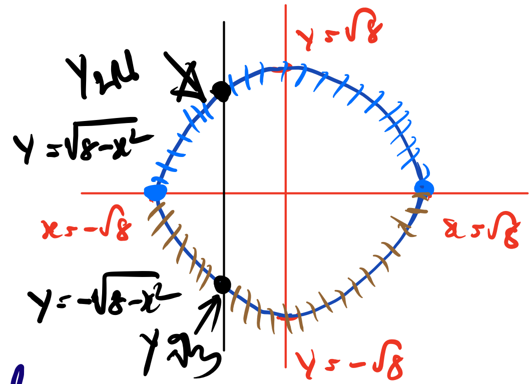
และทรงพาราโบลา $2z = x^2+y^2$

$\Rightarrow 2z = 8 \Rightarrow z = 4$

พิจารณา

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right) = \frac{2x}{2} = x$$

และ
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right) = \frac{2y}{2} = y$$



ดังนั้น พื้นที่ผิว S คือ

$$S = \int_{x=-\sqrt{8}}^{x=\sqrt{8}} \int_{y=-\sqrt{8-x^2}}^{y=\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2+1}\, dy\, dx = \cdots$$

$\square$

$$x^2+y^2 = (\sqrt{8})^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 8$$
$$\Leftrightarrow y^2 = 8-x^2$$
$$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{8-x^2}$$