

Lecture 13

Surface Area

Chapter 2 Multiple Integrals

¹ ในหัวข้อเราจะศึกษาการประยุกต์ปริพันธ์สองชั้นในการหาพื้นที่ผิว (surface area) ของผิว (surface) ที่มีสมการ $z = f(x, y)$

สมมติให้ผิว σ ถูกกำหนดด้วยสมการ $z = f(x, y)$ ที่นิยามบนบริเวณ R บนระนาบ xy ดัง Figure 1 (a) และ f เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในบริเวณที่บรรจุจุดภายใน (interior point) ของ R ในลำดับแรกนี้ เราจะใช้เส้นตรงที่ขนานแกน x และแกน y แบ่งบริเวณ R เป็นบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยจะไม่พิจารณาส่วนของบริเวณ R ที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งบรรจุจุดขอบ (boundary point) ของ R เราสมมติให้มีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจำนวน n รูป คือ R_1, R_2, \dots, R_n

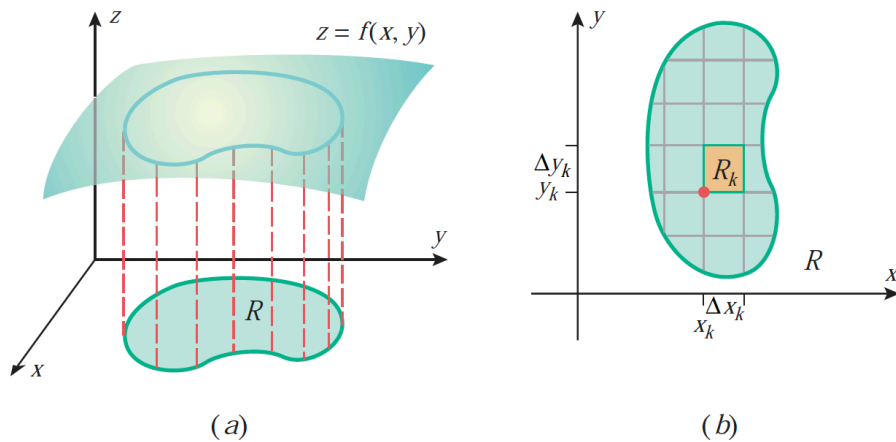


Figure 1: ผิว σ และบริเวณ R . ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 1026)

ให้ (x_k, y_k) เป็นจุดมุมด้านซ้ายมือของบริเวณรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก R_k และสมมติให้ R_k มีพื้นที่เป็น $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ โดยที่ Δx_k และ Δy_k เป็นมิติของ R_k ดัง Figure 1 (b) เราจะพบว่าส่วนของผิว σ ที่อยู่เหนือบริเวณ R_k จะเป็นแผ่นเชิงเส้นโค้ง (curvilinear patch) ที่มีจุดมุมของแผ่นเชิงเส้นโค้งดังกล่าว คือ จุด $P_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$ ซึ่งเราจะกำหนดให้พื้นที่แผ่น

¹ABD12 : Section 14.4: 1-4, 5-7, 9-10

เชิงเส้นโค้ง ΔS_k และมีค่าเป็น

$$\Delta S_k = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \Delta A_k$$

(ด้วยข้อจำกัดของเวลาทำการเรียนการสอน จึงขอละการพิสูจน์ข้างต้น สำหรับผู้เรียนที่สนใจสามารถศึกษาได้จาก Anton et al., 2012, น. 1026-1027)

นั่นคือ พื้นที่ผิวของผิว σ มีค่าประมาณ

$$S \approx \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \Delta A_k$$

ถ้าเราให้ขนาดของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเล็กลงมาก ๆ จนเข้าใกล้ 0 หรือ n เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ สู่ออนันต์ จะได้ พื้นที่ผิวของผิว σ คือ

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \Delta A_k$$

ดังนั้น

$$S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA$$

ตัวอย่าง 1. จงหาพื้นที่ผิวของส่วนของผิว $z = \sqrt{4-x^2}$ ที่อยู่เหนือบริเวณ R บนระนาบ xy ที่ซึ่ง $0 \leq x \leq 1$ และ $0 \leq y \leq 4$

ตัวอย่าง 2. จงหาพื้นที่ผิวของผิวทรงพาราโบลา $z = x^2 + y^2$ ที่อยู่ใต้ระนาบ $z = 1$

ตัวอย่าง 3. จงหาพื้นที่ผิวของผิวทรงพาราโบล่า $2z = x^2 + y^2$ ที่อยู่ภายในทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 8$