

Lecture 14 Vectors and Parametric Curves in 3D-Space

Chapter 3 Vector-Valued Functions

1

ในหัวข้อนี้ เราจะทบทวนความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเวกเตอร์ซึ่งเราเคยศึกษามาแล้วในชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

พิจารณาเวกเตอร์ \mathbf{v} ในระบบพิกัดฉากที่มีจุดเริ่มต้น (initial point) เป็นจุดกำเนิดในระบบพิกัดฉาก และ จุดปลาย (terminal point) เป็นจุด (v_1, v_2) ในปริภูมิ 2 มิติหรือจุด (v_1, v_2, v_3) ในปริภูมิ 3 มิติ เราจะเขียนแทน \mathbf{v} ด้วย

$$\mathbf{v} := \langle v_1, v_2 \rangle \quad \text{หรือ} \quad \mathbf{v} := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

และเรียก v_1, v_2, v_3 ว่า ส่วนประกอบ (component) ของ \mathbf{v} ในที่นี้ เราเขียนแทนเวกเตอร์ศูนย์ในปริภูมิ 2 มิติ/3 มิติ ด้วย

$$\mathbf{0} := \langle 0, 0 \rangle \quad \text{หรือ} \quad \mathbf{0} := \langle 0, 0, 0 \rangle$$

ถ้าไม่มีหมายเหตุเพิ่มเติม ขอตกลงว่าบทนิยามและทฤษฎีบทในหัวข้อเป็นจริงสำหรับปริภูมิ 2 มิติและ 3 มิติ และเพื่อความกระชับจะอธิบายเฉพาะปริภูมิ 3 มิติเท่านั้น

บทนิยาม 1. ให้ $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ และ $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติและ k เป็นค่าคงตัวใด ๆ

1. $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ ก็ต่อเมื่อ $u_i = v_i, i = 1, 2, 3$
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} := \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3 \rangle$
3. $\mathbf{u} - \mathbf{v} := \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3 \rangle$
4. $k\mathbf{u} := \langle ku_1, ku_2, ku_3 \rangle$

ต่อไปนี้เป็นสมบัติที่สำคัญของเวกเตอร์

ทฤษฎีบท 1. ให้ \mathbf{u}, \mathbf{v} และ \mathbf{w} เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติและ k, l เป็นค่าคงตัวใด ๆ

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

¹ABD12 : Section 12.1 : 3, 4, 6, 8, 11-14, 15(b), 16(b), 18, 20, 27-30, 31, 33, 34, 39, 41

$$2. (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

$$3. \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

$$4. \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

$$5. k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$$

$$6. k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$$

$$7. (k+l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$$

$$8. 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

บางครั้งเวกเตอร์อาจไม่ได้เริ่มต้นที่จุดกำเนิดในระบบพิกัดฉากดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2. ให้ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ เป็นจุดในปริภูมิ 3 มิติ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ P_1 และจุดปลายที่ P_2 เขียนแทนด้วย $\overrightarrow{P_1P_2}$ และนิยามโดย

$$\overrightarrow{P_1P_2} := \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

บทนิยาม 3. ให้ \mathbf{v} เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ เราจะเรียกระยะทางจากจุดกำเนิดไปยังจุดปลายของเวกเตอร์ \mathbf{v} ว่า **ความยาว** (length) หรือ **นอร์ม** (norm) หรือ **ขนาด** (magnitude) ของ \mathbf{v} และเขียนแทนด้วย $\|\mathbf{v}\|$ นั่นคือ ถ้า $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ แล้ว

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

ตัวอย่าง 1. จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้

$$1. \mathbf{v} = \langle 1, 2, 3 \rangle$$

$$2. \mathbf{u} = \langle 2, 4, 6 \rangle$$

$$3. \mathbf{w} = \langle 0, -1, 2 \rangle$$

$$4. \mathbf{x} = \langle 0, 2, -4 \rangle$$

จากตัวอย่างข้างต้น จะพบว่า สำหรับเวกเตอร์ \mathbf{v} ใด ๆ และค่าคงตัว k ใด ๆ ขนาดของเวกเตอร์ $k\mathbf{v}$ เท่ากับขนาดของเวกเตอร์ \mathbf{v} คูณกับ $|k|$ เสมอ นั่นคือ

$$\|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\|$$

บทนิยาม 4. เราเรียกเวกเตอร์ \mathbf{v} ว่า **เวกเตอร์หนึ่งหน่วย** (unit vector) ถ้า $\|\mathbf{v}\| = 1$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน x, y และ z เขียนแทนด้วย

$$\mathbf{i} := \langle 1, 0, 0 \rangle, \quad \mathbf{j} := \langle 0, 1, 0 \rangle \quad \text{และ} \quad \mathbf{k} := \langle 0, 0, 1 \rangle$$

หมายเหตุ 1. ทุกเวกเตอร์ \mathbf{v} สามารถเขียนในรูปของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย \mathbf{i}, \mathbf{j} และ \mathbf{k} ได้เพียงรูปแบบเดียวเสมอ นั่นคือ

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle =$$

ตัวอย่าง 2. จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

1. $\langle 1, -2, 3 \rangle$
2. $\langle 0, 4, 0 \rangle$
3. $\langle 0, 0, 0 \rangle$

บทนิยาม 5. ให้ \mathbf{v} เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ เราจะกล่าวว่าเวกเตอร์ \mathbf{u} เป็น **เวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางเดียวกับ \mathbf{v}** ถ้า \mathbf{u} เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย และมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ \mathbf{v}

หมายเหตุ 2. โดยปกติแล้ว ถ้ามีเวกเตอร์ \mathbf{v} ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ เราสามารถหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางเดียวกับ \mathbf{v} ได้ คือ

ตัวอย่าง 3. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางเดียวกับ $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

หมายเหตุ 3. ถ้า \mathbf{u} เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย เราสามารถหาเวกเตอร์ \mathbf{v} ที่มีทิศทางเดียวกับ \mathbf{u} และมีขนาด $\|\mathbf{v}\|$ ตามที่กำหนดให้ได้โดย

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{u}$$

ตัวอย่าง 4. จงหาเวกเตอร์ \mathbf{v} ที่มีขนาด 17 หน่วย และอยู่บนส่วนของเส้นตรงเชื่อมจากจุด $A(0, 1, 2)$ ไปยัง $B(3, -1, 0)$

บทนิยาม 6. ให้ $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ และ $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ ผลคูณจุด (dot product) ของ \mathbf{u} และ \mathbf{v} เขียนแทนด้วย $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ และนิยามโดย

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

ตัวอย่าง 5. จงผลคูณจุดของเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $\langle 1, 0, 1 \rangle$ และ $\langle 0, -1, 0 \rangle$
2. $3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ และ $\mathbf{i} - \mathbf{k}$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้รวบรวมสมบัติที่สำคัญของผลคูณจุด

ทฤษฎีบท 2. ให้ \mathbf{u}, \mathbf{v} และ \mathbf{w} เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติและ k เป็นค่าคงตัวใด ๆ

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
3. $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$
4. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$
5. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$

จากทฤษฎีบทข้างต้น จะพบว่าเราสามารถคำนวณขนาดของเวกเตอร์โดยใช้ผลคูณจุดได้โดย

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

บทนิยาม 7. ให้ \mathbf{u} และ \mathbf{v} เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติที่มีจุดเริ่มต้นเดียวกัน เราจะเรียก θ ว่าเป็นมุมระหว่าง \mathbf{u} และ \mathbf{v} ถ้า θ ที่เกิดจากเวกเตอร์ \mathbf{u} และ \mathbf{v} ซึ่งสอดคล้องกับ $0 \leq \theta \leq \pi$

ทฤษฎีบท 3. ให้ \mathbf{u} และ \mathbf{v} เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง \mathbf{u} และ \mathbf{v} แล้ว

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

หมายเหตุ 4. จากทฤษฎีบทข้างต้นจะพบว่า มุมระหว่างเวกเตอร์ส่งผลกับเครื่องหมายของผลคูณจุดดังนี้

บทนิยาม 8. ให้ $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ และ $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ ผลคูณไขว้ (cross product) ของ \mathbf{u} และ \mathbf{v} เขียนแทนด้วย $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ และนิยามโดย

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} := \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

หมายเหตุ 5. เพื่อความสะดวกในการจำสูตร เราอาจเขียนผลคูณไขว้ของ \mathbf{u} และ \mathbf{v} ได้เป็น

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} := \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

ตัวอย่าง 6. ให้ $\mathbf{u} = \langle 1, -2, 2 \rangle$ และ $\mathbf{v} = \langle 2, 0, -1 \rangle$ จงหาค่าของ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ และ $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะรวบรวมสมบัติสำคัญของผลคูณไขว้

ทฤษฎีบท 4. ให้ \mathbf{u}, \mathbf{v} และ \mathbf{w} เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติและ k เป็นค่าคงตัวใด ๆ

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
4. $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$
5. $\mathbf{0} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} = \mathbf{v} \times \mathbf{0}$
6. $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$

ตัวอย่าง 7. จงแสดงว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$
2. $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$
3. $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
4. $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$
5. $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$
6. $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$

ทฤษฎีบท 5. ให้ \mathbf{u} และ \mathbf{v} เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ แล้ว

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

ตัวอย่าง 8. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\langle 2, -1, 3 \rangle$ และ $\langle -1, 2, 1 \rangle$

ต่อไปเราจะศึกษาฟังก์ชันค่าเวกเตอร์และกราฟของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

บทนิยาม 9. ให้ $f(t), g(t)$ และ $h(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปร t พิจารณาสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad \text{และ} \quad z = h(t)$$

ซึ่งก่อกำเนิดเส้นโค้ง (curve) ในปริภูมิสามมิติที่มีรอยเดิน (trace) เปลี่ยนแปลงไปตามทิศทางที่ t เพิ่มขึ้น เราจะเรียก

- ทิศทาง (direction) ที่ค่า t เพิ่มขึ้น ว่า **การกำหนดทิศทาง** (orientation) หรือ **ทิศทางการเพิ่มของตัวแปรเสริม** (direction of increasing parameter)
- เส้นโค้งที่กำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริมข้างต้นที่มีการกำหนดทิศทาง ว่า **กราฟ** (graph) ของสมการอิงตัวแปรเสริม หรือ **เส้นโค้งอิงตัวแปรเสริม** (parametric curve)

หมายเหตุ 6. ในหัวข้อนี้ ถ้าไม่มีการระบุเพิ่มเติม เราจะสมมติให้ t อยู่ในช่วง $(-\infty, +\infty)$

ตัวอย่าง 9. จงเขียนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = 1 - t, \quad y = 3t \quad \text{และ} \quad z = 2t$$

ตัวอย่าง 10. จงเขียนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad \text{และ} \quad z = 0$$

ตัวอย่าง 11. จงเขียนกราฟของเกลียวเชิงวงกลม (circular helix) ที่กำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t \quad \text{และ} \quad z = t$$

สังเกตว่าเกลียวเชิงวงกลมที่นิยามในตัวอย่างข้างต้นเป็นเซตของจุดในปริภูมิสามมิติที่อยู่ในรูป $(a\cos t, a\sin t, t)$ สำหรับทุก $t \in (\infty, +\infty)$ ดังนั้น ถ้าเราให้จุดเหล่านี้เป็นจุดปลายของเวกเตอร์ \mathbf{r} ที่จุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดกำเนิดจะได้ว่า

$$\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle = \langle a\cos t, a\sin t, t \rangle = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

นั่นคือ \mathbf{r} เป็นฟังก์ชันของตัวแปร t และเนื่องจากค่าฟังก์ชัน $\mathbf{r}(t)$ ที่ได้เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ เราจึงเรียก $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ว่า ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของตัวแปรจริง (vector-valued function of a real variable) หรือ ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ (vector-valued function)

นอกจากนี้ ถ้า $\mathbf{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของตัวแปรจริง t จะได้ว่า $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ สามารถเขียนอยู่ในรูปของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย \mathbf{i}, \mathbf{j} และ \mathbf{k} ได้เสมอ นั่นคือ จะมีฟังก์ชัน $x(t), y(t)$ และ $z(t)$ ที่

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

และเราจะเรียกฟังก์ชัน $x(t), y(t)$ และ $z(t)$ ว่า ฟังก์ชันส่วนประกอบ (component function) หรือ ส่วนประกอบ (component) ของ \mathbf{r}

บทนิยาม 10. ให้ $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ เราจะเรียกเซตของตัวแปรจริง t ที่ทำให้ฟังก์ชัน $\mathbf{r}(t)$ นิยามได้ว่า **โดเมน** (domain) ของ \mathbf{r} ถ้า \mathbf{r} อยู่ในรูปของฟังก์ชันส่วนประกอบ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ แล้ว โดเมนของ $\mathbf{r}(t)$ คืออินเตอร์เซกชันของโดเมนของฟังก์ชันส่วนประกอบทั้งหมด และเราจะเรียกโดเมนของ $\mathbf{r}(t)$ ในกรณีนี้ว่า **โดเมนธรรมชาติ** (natural domain)

ตัวอย่าง 12. จงหาโดเมนของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t) = \ln t\mathbf{i} + \sqrt{1-t}\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$

ตัวอย่าง 13. จงหาโดเมนของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t) = \ln|t-1|\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$

บทนิยาม 11. ให้ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ กราฟ (graph) ของ $\mathbf{r}(t)$ คือ กราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม $x(t), y(t)$ และ $z(t)$ ที่เป็นฟังก์ชันส่วนประกอบของ $\mathbf{r}(t)$

ตัวอย่างเช่น ถ้า $\mathbf{r}(t) = (1-t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ แล้วกราฟของ $\mathbf{r}(t)$ คือกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = 1 - t, \quad y = 3t \quad \text{และ} \quad z = 2t$$

ตัวอย่าง 14. จงหาโดเมนและเขียนกราฟของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\mathbf{r}(t) = (2 + 3t)\mathbf{i} + (-1 + t)\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$$

บทนิยาม 12. ให้ C เป็นเส้นโค้งเป็นกราฟของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

เราจะเรียก เวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและจุดปลายอยู่บนเส้นโค้ง C ณ t ใด ๆ ว่า เวกเตอร์รัศมี (radius vector) หรือ เวกเตอร์ตำแหน่ง (position vector)

ตัวอย่าง 15. จงเขียนกราฟและหาเวกเตอร์ตำแหน่งเมื่อ $t = \pi/2$ ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

หากเรายังจำได้ Lecture 1 เราได้ศึกษาสมการของเส้นตรงที่ผ่านสองจุดใด ๆ ในปริภูมิสองมิติมาแล้ว ในทำนองเดียวกัน ถ้า \mathbf{r}_0 และ \mathbf{r}_1 เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด แล้ว สมการในรูปเวกเตอร์ของเส้นตรงที่ผ่านจุดปลายของ \mathbf{r}_0 และ \mathbf{r}_1 คือ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \quad \text{หรือ} \quad \mathbf{r} = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad \forall t \in (-\infty, +\infty)$$

และถ้าเราจำกัดขอบเขตของ t เป็น $[0, 1]$ แล้ว ค่าเวกเตอร์ \mathbf{r} จะอยู่ระหว่าง \mathbf{r}_0 และ \mathbf{r}_1 และได้สมการในรูปเวกเตอร์ของจุดใด ๆ ที่อยู่บนส่วนเส้นตรงระหว่าง \mathbf{r}_0 และ \mathbf{r}_1 คือ

$$\mathbf{r} = (1-t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad \forall t \in [0, 1]$$

ตัวอย่าง 16. จงหาสมการของส่วนของเส้นตรงที่อยู่ระหว่างเวกเตอร์ $\mathbf{r}_0 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ และ $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$