Calculus for Engineering III SC402202

Lecture 17 Curves and their Length

Chapter 3 Vector-Valued Functions

[1]

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาความยาวของส่วนโค้งที่สามารถกำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

บทนิยาม 1. เส้นโค้ง (curve) ในปริภูมิ 2 มิติ และ 3 มิติ คือ กราฟของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่มีความต่อเนื่องบนช่วงของจำนวนจริง

ตัวอย่าง 1. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีความต่อเนื่องบนช่วง I ใด ๆ จงแสดงว่ากราฟของ f เป็นเส้นโค้ง และจงหาฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่กำหนดเส้นโค้งนี้

บทนิยาม 2. ให้ $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ เราจะกล่าวว่า

1. $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบ (smooth function) บน $[a,b]$ ถ้า $\mathbf{r}'(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ สำหรับทุก $t \in (a,b)$
2. $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง (piecewise smooth function) บน $[a,b]$ ถ้ามีส่วนแบ่งกั้น $\{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\} \subset [a,b]$ ที่ทำให้ $\mathbf{r}'(t)$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบบน $[x_{i-1}, x_i]$ สำหรับทุก $i = 1, \ldots, n$

[1] **ABD12** : Section 12.3 : 1-4, 5-8, 9-12, 13-16, 17-20, 21, 22, 23, 24, 25-30, 31, 32, 33, 38-41, 42, 43

บทนิยาม 3. ให้ C เป็นเส้นโค้งที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ เป็นที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ เราจะกล่าวว่า

1. C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบ (smooth curve) บน $[a,b]$ ถ้า $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบ
2. C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วง (piecewise smooth curve) บน $[a,b]$ ถ้า $\mathbf{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบเป็นช่วง
3. C เป็นเส้นโค้งปิด (closed curve) ถ้า $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$

ตัวอย่าง 2. จงแสดงว่าวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดเป็นเส้นโค้งปรับเรียบปิด

ตัวอย่าง 3. จงตรวจสอบว่าเส้นโค้ง C ที่กำหนดโดย $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + (e^t - t)\mathbf{k}$ เป็นเส้นโค้งปรับเรียบและปรับเรียบเป็นช่วงบน $\mathbb{R}$ หรือไม่

ทฤษฎีบท 1. *ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงบน $[a,b]$ ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ จะได้ว่า ความยาวเส้นโค้ง $\mathscr{L}$ ของ C คือ*

$$\mathscr{L} = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

ตัวอย่าง 4. จงหาความยาวส่วนโค้งของเกลียวเชิงวงกลมที่กำหนดโดย

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$$

ระหว่าง $t = 0$ ถึง $t = t_0$

ทฤษฎีบท 2. *C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงบน $[a,b]$ ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ และให้ $\mathbf{r}(t_0)$ เป็นจุดบน C จะได้ ฟังก์ชันความยาวส่วนโค้ง s ที่มีจุด $\mathbf{r}(t_0)$ เป็นจุดอ้างอิง คือ*

$$s = \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{r}'(u)\| du$$

ตัวอย่าง 5. จงหาความยาวส่วนโค้งของเกลียวเชิงวงกลมที่กำหนดโดย

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

ที่มี $\mathbf{r}(0)$ เป็นจุดอ้างอิง

ตัวอย่าง 6. สมมติว่าแมลงสาบตัวหนึ่งไต่ในถังปั่นเครื่องซักผ้าตามสมการเกลียวเชิงวงกลมในตัวอย่างก่อนหน้า กำหนดให้ตำแหน่งเริ่มต้นที่แมลงสาบตัวนี้ตกลงไปในถังปั่นคือ $(1,0,0)$ ถ้าแมลงสาบตัวนี้ไต่ไปได้ 10 หน่วย จงหาตำแหน่งปัจจุบันของแมลงสาบตัวนี้

นอกจากนี้ เรายังสามารถคำนวณความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้วได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 3. *ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบเป็นช่วงในระบบพิกัดเชิงขั้วที่กำหนดโดยฟังก์ชัน $r = f(\theta)$ บนช่วง $[\alpha, \beta]$ จะได้ว่า ความยาวเส้นโค้ง $\mathscr{L}$ ของ C บนช่วง $[\alpha, \beta]$ คือ*

$$\mathscr{L} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta$$

ตัวอย่าง 7. จงหาความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้งในระบบพิกัดเชิงขั้วที่กำหนดโดย

$$r = 1 - \cos\theta$$

บนช่วง $[0, 2\pi]$