Calculus for Engineering III SC402202

Lecture 19 Curvature and Radius of Curvature

Chapter 3 Vector-Valued Functions

[1]

บทนิยาม 1. ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบในปริภูมิ 2 มิติ/ 3 มิติ ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่มีความยาวส่วนโค้ง s เป็นตัวแปรเสริม **ความโค้ง** (curvature) ของ C เขียนแทนด้วย $\kappa = \kappa(s)$ และกำหนดโดย

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \|\mathbf{r}''(s)\|$$

สังเกตว่าความโค้งของเส้นโค้ง คือ ขนาดของอัตราการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย $\mathbf{T}$ เทียบกับความยาวส่วนโค้ง s นั่นเอง ซึ่งโดยทั่วไปแล้วความโค้งของเส้นโค้ง ณ แต่ละจุดบนเส้นโค้งจะไม่ทันเท่ากัน ยกเว้นเส้นตรง และวงกลมในปริภูมิ 2 มิติดังตัวอย่างที่จะกล่าวถึงต่อไป

ตัวอย่าง 1. พิจารณาสมการเส้นตรงในรูป $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ ที่ผ่านจุดปลายของเวกเตอร์ตำแหน่ง $\mathbf{r}_0$ และขนานกับเวกเตอร์ $\mathbf{v}$

1. จงเขียนสมการเส้นตรง $\mathbf{r}(s)$ ที่มีความยาวส่วนโค้ง s เป็นตัวแปรเสริม

2. จงหาความโค้งของเส้นตรง ณ จุดใด ๆ

[1] **ABD12** : Section 12.5 : 1-2, 5-12, 13-16, 17-18, 19-22, 23, 25-28, 29-32, 45-48

สังเกตว่าในการหาความโค้งของเส้นโค้งนั้น เราจำเป็นต้องเปลี่ยนฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ของตัวแปรเสริม t เป็นตัวแปรเสริมของความยาวส่วนโค้ง s ก่อน จึงจะทำการคำนวณได้ ในทฤษฎีบทต่อไปนี้ เราสามารถคำนวณความโค้งโดยใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันของตัวแปร t ดังนี้

ทฤษฎีบท 1. *ให้ C เป็นเส้นโค้งในปริภูมิ 2 มิติ/ 3 มิติ ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ ที่เป็นฟังก์ชันปรับเรียบ จะได้ว่า สำหรับทุก t ที่ $\mathbf{T}'(t)$ และ $\mathbf{r}'(t)$ หาค่าได้*

1. $\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$

2. $\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$

ตัวอย่าง 2. จงหาความโค้งของวงกลมที่มีรัศมี a หน่วยและมีจุดศูนย์กลางที่ (x_0, y_0)

ตัวอย่าง 3. กำหนดให้ $a > 0$ จงหาความโค้งของเกลียวเชิงวงกลม $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$

ตัวอย่าง 4. จงหาความโค้งของวงรี $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 3\sin t\mathbf{j}$ ณ จุดปลายแกนเอกและปลายแกนโท

จากตัวอย่างข้างต้นนี้ จะได้ว่า ความโค้ง ณ จุดปลายแกนเอกของวงรี คือ $\frac{3}{4}$ และความโค้ง ณ จุดปลายแกนโท $\frac{2}{9}$ ในอีกด้านหนึ่ง เราทราบว่าความโค้งของวงกลมรัศมี a หน่วยเป็นค่าคงตัว $\frac{1}{a}$ นั่นคือ ความโค้งของวงรี ณ จุดปลายแกนเอกของวงรีเท่ากับความโค้งของวงกลมรัศมี $\frac{4}{3}$ หน่วย และความโค้งของวงรี ณ จุดปลายแกนโทของวงรีเท่ากับความโค้งของวงกลมรัศมี $\frac{9}{2}$ หน่วยดัง Figure 1 และ 2

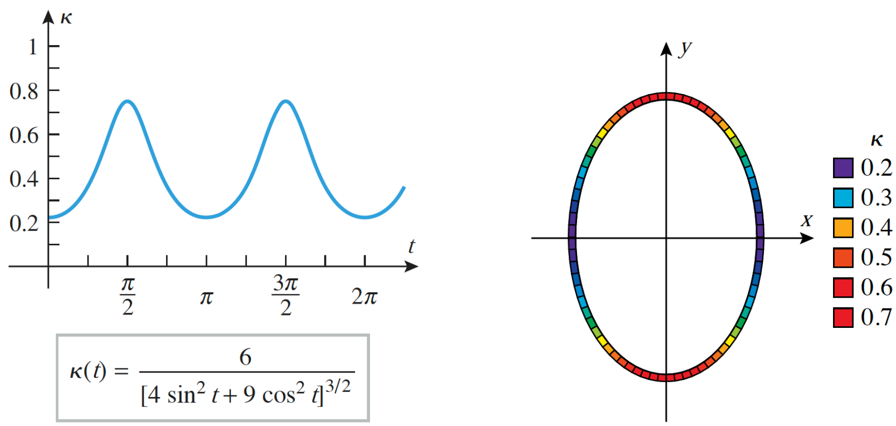

Figure 1: ความโค้ง ณ จุดต่าง ๆ ของวงรี ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 877)

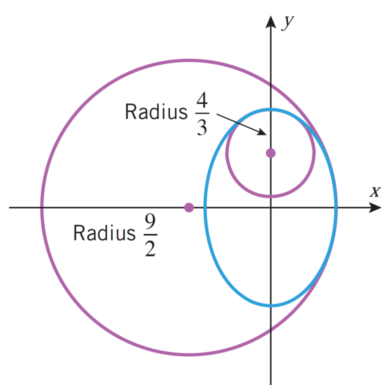

Figure 2: ความโค้งของวงรี ณ จุดปลายแกนเอกและปลายแกนโท ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 877)

บทนิยาม 2. ให้ C เป็นเส้นโค้งในปริภูมิ 2 มิติที่มีความโค้ง $\kappa \neq 0$ ณ จุด P เราจะเรียก

- วงกลมรัศมี $\rho = \frac{1}{\kappa}$ หน่วย ที่สัมผัสกับ C ที่จุด P และมีจุดศูนย์กลางอยู่ภายในด้านเว้า (concave) ของส่วนโค้ง ว่า **วงกลมสัมผัสประชิด** (osculating circle) หรือ **วงกลมของความโค้ง** (circle of curvature) ณ จุด P
- รัศมี ρ หน่วยของวงกลมสัมผัสประชิด ว่า **รัศมีของความโค้ง** (radius of curvature) ณ จุด P

- จุดศูนย์กลางของวงกลมสัมผัสประชิด ว่า **จุดศูนย์กลางของความโค้ง** (center of curvature) ณ จุด P

ซึ่งอธิบายได้ดัง Figure 3

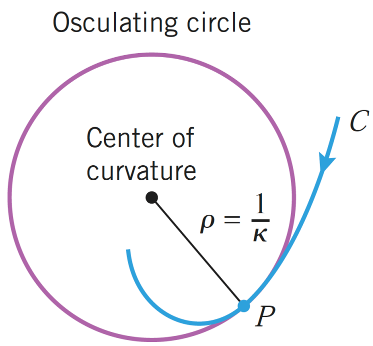

Figure 3: วงกลมสัมผัสประชิดและรัศมีของความโค้ง ณ จุด P ปรับปรุงจาก (Anton et al., 2012, น. 877)

ตัวอย่าง 5. จงหารัศมีของความโค้งของเส้นโค้งที่กำหนดโดย $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\cos t\mathbf{i} + e^{-t}\sin t\mathbf{j}$ เมื่อ t มีค่าใกล้อนันต์