Calculus for Engineering III	SC402202

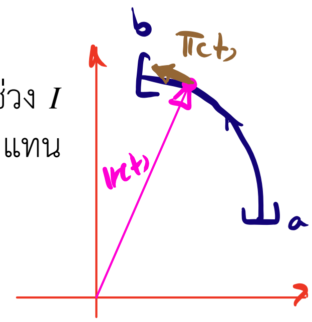
Lecture 18 Unit Tangent, Normal and Binormal Vectors

Chapter 3 Vector-Valued Functions

[1]

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาสมบัติพื้นฐานทางเรขาคณิตของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

หากเรายังจำได้ ถ้าเรามีเส้นโค้งปรับเรียบ C ที่เป็นกราฟของฟังกันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ แล้วเราจะได้ว่า $\mathbf{r}'(t)$ จะไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์และสัมผัสกับ C นอกจากนี้ทิศทางของ $\mathbf{r}'(t)$ เป็นทิศทางเดียวกันกับทิศทางการเพิ่มขึ้นของตัวแปรเสริม



บทนิยาม 1. ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ บนช่วง I ใด ๆ **เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย** (unit tangent vector) ที่สัมผัส C ณ จุด t เขียนแทนด้วย $\mathbf{T}(t)$ และกำหนดโดย

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

ตัวอย่าง 1. จงหาเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยที่สัมผัสเส้นโค้ง C ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$ ณ $t = 2$

วิธีทำ $\mathbf{r}(t) = t^2 i + t^3 j \Rightarrow \mathbf{r}'(t) = 2t i + 3t^2 j$

$$\Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} = \sqrt{4t^2 + 9t^4}$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{2t}{\sqrt{4t^2+9t^4}} i + \frac{3t^2}{\sqrt{4t^2+9t^4}} j$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}(2) = \frac{2(2)}{\sqrt{4\cdot 2^2 + 9\cdot 2^4}} i + \frac{3(4)}{\sqrt{4\cdot 2^2 + 9\cdot 2^4}} j$$

$$= \frac{4}{\sqrt{160}} i + \frac{12}{\sqrt{160}} j$$

$\square$

[1]**ABD12** : Section 12.4 : 1, 2, 5,-12, 15-18, 19-20, 21, 22, 24

ตัวอย่าง 2. จงหาเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยที่สัมผัสเส้นโค้ง C ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$$

ณ $t = t_0$

วิธีทำ $\mathbf{r}'(t) = -2\sin t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \Rightarrow \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{13}$

$$\Rightarrow \mathbf{T}(t) = -\frac{2\sin t}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \frac{2\cos t}{\sqrt{13}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{k}$$

$\square$

พิจารณาฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ หากเรายังจำได้ ถ้าเราทราบว่า $\|\mathbf{r}(t)\|$ เป็นค่าคงตัวแล้ว $\mathbf{r}(t)$ และ $\mathbf{r}'(t)$ จะเป็นเวกเตอร์ตั้งฉากกัน

จากนิยามข้างต้น เราทราบว่า

$$\|\mathbf{T}(t)\| = \left\|\frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}\right\| = 1$$

ซึ่งเป็นค่าคงตัว จึงได้ว่า $\mathbf{T}(t)$ และ $\mathbf{T}'(t)$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกันด้วย นั่นคือ $\mathbf{T}'(t)$ ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของ C ที่จุด t นั่นเอง และในที่นี้เราจะกล่าวว่า $\mathbf{T}'(t)$ เป็น **แนวฉาก** (normal) ของ C ณ จุด t

บทนิยาม 2. ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ โดยที่ $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$ **เวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วย** (unit normal vector) ของ C ณ จุด t เขียนแทนด้วย $\mathbf{N}(t)$ และกำหนดโดย

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \Longrightarrow \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

ตัวอย่าง 3. กำหนดให้ $a > 0$ จงหาเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยของเส้นโค้ง C ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$ ณ $t = t_0$

$$N(t_0) = -\cos t_0 i - \sin t_0 j$$

บทนิยาม 3. ให้ C เป็นเส้นโค้งปรับเรียบที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ โดยที่ $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$ **เวกเตอร์คู่แนวฉากหนึ่งหน่วย** (unit binormal vector) ของ C ณ จุด t เขียนแทนด้วย $\mathbf{B}(t)$ และกำหนดโดย

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

จากสมบัติของผลคูณไขว้ จะได้ว่า $\mathbf{B}(t)$ ตั้งฉากกับทั้ง $\mathbf{T}(t)$ และ $\mathbf{N}(t)$ นอกจากนี้ เรายังทราบว่า $\mathbf{B}(t)$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย กล่าวคือ

$$\|\mathbf{B}(t)\| = \|\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)\| = \|\mathbf{T}(t)\|\|\mathbf{N}(t)\| \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

การบ้าน

$\mathbf{B}(t)$

ตัวอย่าง 4. จงหาเวกเตอร์คู่แนวฉากหนึ่งหน่วยของเส้นโค้ง C ที่กำหนดโดยฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\,\mathbf{i} + e^t \sin t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ณ $t = t_0$

$$\mathbf{r}(t) \Rightarrow \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \Rightarrow \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} \Rightarrow \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$